

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКРЕПЛЕНИЯХ КРАЕВ

*В.И. Еришов, канд. физ.-мат. наук, доц., З.Г. Еришова, канд. физ.-мат. наук, доц.,  
Тутаевский филиал Рыбинской государственной авиационной технологической академии,  
г. Тутаев, Россия*

Общая постановка проблемы и ее связь с научно-практическими задачами. Область применения оболочечных конструкций чрезвычайно широка: машиностроение, авиация, ракетостроение. Они находятся в различных условиях, в частности под воздействием динамических нагрузок, поэтому актуальным является расчет на устойчивость.

Обзор публикаций и анализ нерешенных проблем. Общие вопросы устойчивости оболочек разработаны Н.А. Алфутовым, Д. Бушнеллом, А.С. Вольмиром, В.В. Кабановым, П.Е. Товстиком и др. Влияние граничных условий на критическую нагрузку при осевом сжатии цилиндрической оболочки рассмотрено в работах В.И. Кожевникова, Б. Альмрота, Х.М. Муштари, Э.И. Григолюка, В.В. Кабанова, П.Е. Товстика и др. В настоящей работе рассмотрены случаи, когда один из прямолинейных краев оболочки является слабозакрепленным. Эти случаи характерны тем, что форма потери устойчивости локализуется в окрестности этого края, экспоненциально затухая при удалении от него.

Цель исследований. Целью исследований являлось исследование потери устойчивости цилиндрической панели со слабозакрепленным прямолинейным краем и различными закреплениями криволинейных краев.

Результаты исследований. Рассмотрим устойчивость полубесконечной цилиндрической панели:

$$0 \leq x \leq 1 = \frac{L}{R}, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

где  $L$  – длина оболочки,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки (рис. 1).

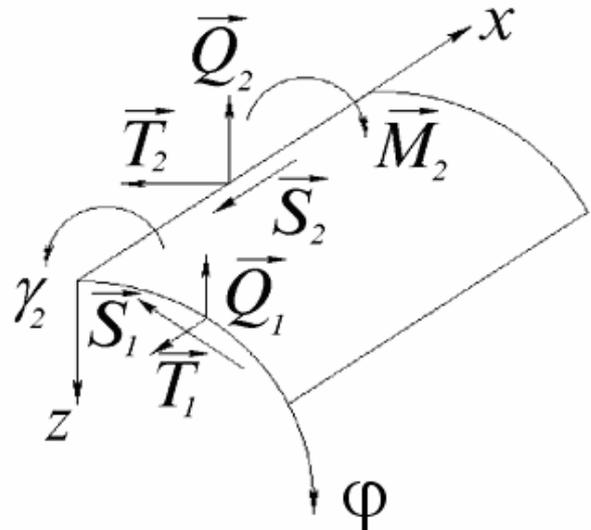


Рис. 1.

При исследовании влияния граничных условий на каждом из краев оболочки традиционно рассматриваются 16 различных вариантов граничных условий, при которых на краю оболочки полагаются равными нулю обобщенные перемещения  $u, v, w, \gamma$  или соответствующие им обобщенные усилия. Четыре условия на криволинейных краях  $x = 0, x = 1$  получаются в результате приравнивания к нулю одной из величин

$$\begin{matrix} u & v & w & \gamma & (1) \\ T_1 & S & Q_1^* & M_1 & (0) \end{matrix} \quad (1)$$

на прямолинейных  $\varphi = 0, \varphi = \varphi_0$

$$\begin{matrix} v & u & w & \gamma_2 & (1) \\ T_2 & S & Q_2^* & M_2 & (2). \end{matrix}$$

В работе [4] рассматриваемые 16 вариантов граничных условий (1) разбиваются на четыре группы в зависимости от того, какие условия должны выполняться при интегрировании системы уравнений, представляющих собой краевую задачу в нулевом

приближении. Эти условия называются главными. Задача об их выделении решалась также в работе [5]. Группы и соответствующие главные условия таковы:

1) группа заделки

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1111, 1110, 1101, 1100, 1011, 1010);$$

2) группа шарнирной опоры

$$w = \Phi = 0, \quad (0111, 0110, 0101, 0100, 0011, 0010);$$

3) группа слабого закрепления

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (1001, 1000);$$

4) группа свободного края

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (0001, 0000).$$

В случае замкнутой в окружном направлении оболочки или оболочки с шарнирно опертыми прямолинейными краями в [4] обнаружено 7 вариантов граничных условий, для которых имело место двукратное снижение критической нагрузки.

$$(0000)(1000)(0001)(0100)(0010)(1100)(1010).$$

Рассмотрим устойчивость панели со слабозакрепленным прямолинейным краем  $\varphi = 0$ .

При потере устойчивости полное напряженное состояние складывается из основного (полубезмоментного) напряженно-деформированного состояния и краевого эффекта вблизи криволинейного края. Для цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевого сжатия с безмоментным докритическим усилием  $T_1^0 = -2Eh\mu^2\lambda$ , уравнения устойчивости в безразмерных переменных имеют вид [1, 2, 3]:

$$\mu^2 \Delta \Delta w - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \mu^2 \Delta \Delta \Phi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

$$\mu^4 = h^2 / (12R^2(1 - \nu^2))$$

(2)

где  $\Phi$  - функция усилий, с которой мембранное усилие  $T_1$  связано формулой  $T_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ . Параметр

$\lambda$  введен таким образом, чтобы для наименьшей критической нагрузки, замкнутой в окружном

направлении цилиндрической оболочки при  $\mu \rightarrow 0$ , выполнялось соотношение  $\lambda \rightarrow 1$ .

Систему уравнений (2) можно привести к виду:

$$\mu^4 \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} - 2\lambda \mu^2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^4 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим случай жесткой заделки обоих криволинейных краев [3] и случай, когда один край закреплен шарнирно, а другой - жестко [ШЗ]. В этом случае переменные  $x$  и  $\varphi$  не разделяются.

Введем полную систему функций  $X_k(x)$ , удовлетворяющих граничным условиям, и будем искать решение уравнения (3) в виде

$$w(x, \varphi) = \sum_{k=1}^N X_k(x) w_k(\varphi). \quad (4)$$

Применяя метод Бубнова - Галеркина, для функций  $w_k(\varphi)$  приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^N \left( \mu^4 a_{kj}^{(2)} \frac{d^8 w_j}{d\varphi^8} - 2\lambda \mu^2 a_{kj}^{(1)} \frac{d^4 w_j}{d\varphi^4} + a_{kj}^{(0)} w_j \right) = 0, \quad (5)$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ ,

$$a_{kj}^{(m)} = \int_0^1 \frac{d^m X_k}{dx^m} \frac{d^m X_j}{dx^m} dx, \quad m = 0, 1, 2. \quad (6)$$

Решение системы (5), затухающее при удалении от края  $\varphi = 0$ , имеет вид

$$w_k = \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} e^{iq_j \varphi}. \quad (7)$$

Здесь  $C_j$  - произвольные постоянные, а  $q_j$  удовлетворяют алгебраическому уравнению степени  $8N$

$$\det(\mu^4 a_{kj}^{(2)} q^8 - 2\lambda \mu^2 a_{kj}^{(1)} q^4 + a_{kj}^{(0)}) = 0 \quad (8)$$

и  $\text{Im}(q_j) > 0$ .

Остальные неизвестные функции, входящие в формулировку граничных условий при  $\varphi = 0$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}
w(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} e^{iq_j \varphi}, \\
u(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N \frac{dX_k(x)}{dx} \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^{-2} e^{iq_j \varphi}, \\
v(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^{-1} e^{iq_j \varphi}, \\
\gamma_2(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j e^{iq_j \varphi}, \\
Q_{2*}(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^3 e^{iq_j \varphi}, \\
S(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N \frac{d^3 X_k(x)}{dx^3} \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^{-3} e^{iq_j \varphi}, \\
T_2(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N \frac{d^4 X_k(x)}{dx^4} \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^{-4} e^{iq_j \varphi}, \\
M_2(x, \varphi) &= \sum_{k=1}^N X_k(x) \sum_{j=1}^{4N} C_j w_{kj} q_j^2 e^{iq_j \varphi}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Искомый параметр  $\lambda$  определяется из уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad (10)$$

получающегося после подстановки решений (9) в граничные условия (1) и имеющего вид определителя порядка  $4N$ .

В случае жесткой заделки (33) обоих краев  $x = 0, x = 1$  функции  $X_k(x)$  возьмем в виде

$$X_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{1} - \frac{2k-1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

В случае, когда один из краев закреплен шарнирно, а другой – жестко (ШЗ), положим

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{1} - \frac{k}{k+1} \sin \frac{(k+1)\pi x}{1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Для слабо закрепленного прямолинейного края значения параметра  $\lambda(0)$  приведены в таблице.

Таблица

Граничные усл. на прямолин. крае	ШШ	ШЗ		ЗЗ	
		N=1	N=2	N=1	N=2
0000	0.113	0.141	0.129	0.188	0.161
0100, 0001	0.223	0.279	0.277	0.372	0.330
0101	0.419	0.524	0.541	0.698	0.651

Найденные значения получены с использованием либо одной ( $N = 1$ ), либо двух ( $N = 2$ ) координатных функций (11) и (12). Для сравнения в столбце (ШШ) напечатаны значения параметра нагрузки  $\lambda(0)$ , соответствующие случаю шарнирного закрепления обоих краев. Граничные условия 0010 и 1000, которые в случае шарнирной опоры обоих краев  $x = 0, x = 1$  давали снижение критической нагрузки, уже не являются условиями слабого закрепления, так как уравнение (10) не имеет корней  $\lambda < 0$ .

#### Выводы и перспективы дальнейших исследований.

В данной работе построено нулевое (по отношению к малому параметру  $\mu$ ) приближение. Можно взять более точные уравнения равновесия и учесть влияние различных граничных условий на параметр нагрузки в пределах одной группы.

Подобную задачу можно рассмотреть в случае низкочастотных колебаний.

#### Литература

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.: Гостехиздат.- 1949.- 784 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М.: Наука.- 1976.- 512 с.
3. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука.- 1978.- 360 с.
4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. – М.: Наука. Физматлит.- 1995.- 320 с.
5. Черных К.Ф. Простой краевой эффект и расчленение граничных условий в линейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. Механика.-1965.- Вып. 1.- С. 89-98.

*Поступила в редакцию 05.05.03*

**Рецензент:** д-р техн. наук, профессор Ю.С. Воробьев, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков.