

УДК 536.244

Ю.Н. АГАФОНОВ, В.И. АНТЮФЕЕВ, Ю.А. ТКАЧЕНКО

Военный научный центр космических исследований (При Харьковском военном университете)

МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрен метод расчета многомерных нестационарных температурных полей в многослойных телах сложной формы. Сеточная схема для расчета температурных полей построена интегро-интерполяционным методом на криволинейных сетках. Использование криволинейных ортогональных сеток позволяет повысить точность описания составных тел сложной формы и реализовать экономичную локально-одномерную схему.

теплообмен, нестационарное температурное поле, интегро-интерполяционный численный метод, конформное преобразование, криволинейная сетка, криволинейная система координат

Введение

1. Формулирование проблемы

Расчет слоистых структур сложной формы в классических системах ортогональных координат затруднен из-за невозможности описания криволинейных границ контактирующих элементов сетками канонической формы. Сгущение сетки вблизи границ областей, увеличивая вычислительные затраты, не позволяет в ряде случаев в принципе решить подобную задачу. Для того чтобы использовать при расчетах нестационарных полей в конструкциях сложной формы локально-одномерные экономичные схемы сквозного счета, необходимо применение ортогональных криволинейных сеток, координатные линии которых совпадают с границами элементов конструкций [1].

1.1 Анализ литературы

Расчеты многомерных нестационарных тепловых полей в телах сложной формы достаточно успешно выполняются с помощью известных численных методов [1 – 3]. Многие из них положены в основу автоматизированных методик для универсальных программ расчета. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, однако их использование при расчетах теплового состояния конструкций сложной

формы не позволяет обеспечить требуемую точность расчетов и высокую эффективность вычислений.

1.2 Цель статьи

Разработать метод расчета нестационарных температурных полей в составных конструкциях сложной формы.

2. Решение проблемы

Рассмотрим решение задачи определения нестационарного температурного поля неявным интегро-интерполяционным методом по локально-одномерной схеме. Область, в которой ищется решение (рис. 1), разбивается на элементарные объемы (элементарные ячейки), построенные вокруг каждого узла сетки.

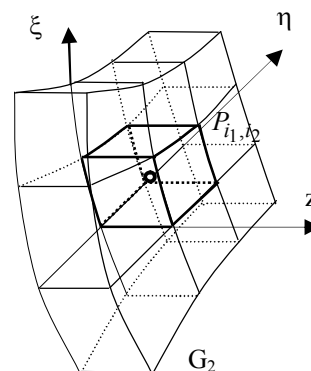


Рис. 1. К постановке задачи

При пространственном разбиении в качестве элементарных объемов будем рассматривать криволинейные призмы, у которых одна грань образована секущими плоскостями с равномерным шагом h_z в направле-

нии оси z . Остальные стороны и грани параллельны криволинейным координатам η и ξ , построенным путем конформного отображения внутренности кольца на двусвязную область [5]. Узлы элементарных блоков помещаются в геометрические центры описанных криволинейных призм.

Введем равномерную сетку по времени $\{\tau_j\}$, $\tau_j = j\Delta\tau$, $j \in \overline{1, N_\tau}$ и равномерную пространственную сетку $\overline{\Omega}' = \{(x_{i_1, i_2}^1, x_{i_1, i_2}^2)\}$, $i_k \in \overline{1, N_k}$; $k \in \overline{1, 2}$ в плоской области G_1 , которая при конформном пре-

образовании $w = p(z) = \sum_{k_1=-2m_1}^{2m_1-1} C_{qk_1+1} z^{qk_1+1}$ [6] пе-

рейдет в ортогональную сетку $\overline{\Omega}$ в области G_2 . Обозначим координаты узлов в новой системе координат через $\eta_{i_1, i_2} = w^1(z(x_{i_1, i_2}^1, x_{i_1, i_2}^2))$,

$\xi_{i_1, i_2} = w^2(z(x_{i_1, i_2}^1, x_{i_1, i_2}^2))$. Вокруг внутреннего

(i_1, i_2) -го узла в области G_1 выделим прямоугольник P'_{i_1, i_2} , стороны которого образованы отрезками

$$l_{i_1, i_2}^1 : x^1 = x_{i_1-1/2, i_2}^1, \quad x^2 \in [x_{i_1, i_2-1/2}^2, x_{i_1, i_2+1/2}^2],$$

$$l_{i_1+1, i_2}^1 : x^1 = x_{i_1+1/2, i_2}^1, \quad x^2 \in [x_{i_1, i_2-1/2}^2, x_{i_1, i_2+1/2}^2],$$

$$l_{i_1, i_2}^2 : x^2 = x_{i_1, i_2-1/2}^2, \quad x^1 \in [x_{i_1-1/2, i_2}^1, x_{i_1+1/2, i_2}^1],$$

$$l_{i_1, i_2+1}^2 : x^2 = x_{i_1, i_2+1/2}^2, \quad x^1 \in [x_{i_1-1/2, i_2}^1, x_{i_1+1/2, i_2}^1]$$

и рассмотрим в области G_2 (рис. 2) ячейку

$P_{i_1, i_2} = w(P'_{i_1, i_2})$, ограниченную линиями

$$h_{i_1, i_2}^1 = w(l_{i_1, i_2}^1), \quad h_{i_1+1, i_2}^1 = w(l_{i_1+1, i_2}^1), \quad h_{i_1, i_2}^2 = w(l_{i_1, i_2}^2),$$

$$h_{i_1, i_2+1}^2 = w(l_{i_1, i_2+1}^2).$$

При расщеплении задачи по пространственным координатам моделирование одномерных процессов производится с помощью неявных схем, а последовательное действие процессов учитывается явным образом.

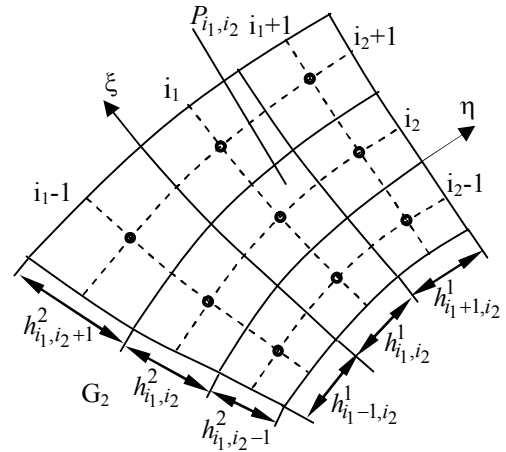


Рис. 2. Схема формирования ортогональной сетки $\overline{\Omega}$ в области G_2

Решение многомерной задачи на каждом шаге по времени сводится к расчету набора одномерных задач, решаемых методом прогонки. При этом уравнение теплопроводности запишется в виде следующей системы, получаемой при расщеплении для промежутка времени $[\tau_{j-1}, \tau_j]$:

$$c\rho \frac{\partial \theta^*}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} \right), \quad (1)$$

$$\theta^*(\xi, \eta, \tau_{j-1}) = T(\xi, \eta, \tau_{j-1}), \quad (2)$$

$$c\rho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right), \quad (3)$$

$$\theta(\xi, \eta, \tau_{j-1}) = \theta^*(\xi, \eta, \tau_j). \quad (4)$$

Приближенное решение начинается с точного распределения $T(\xi, \eta, z, \tau_{j-1})$, при этом сначала решается уравнение (1) с начальным условием (2), а затем уравнение (3), в качестве начального условия берется полученное решение к концу временного интервала с распределением $\theta^*(\xi, \eta, \tau_j)$ (4).

Проинтегрировав уравнение (1) по области $G_2 \times \{\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]\}$, получим уравнение баланса

$$\int_{\eta_{i_1-1/2}}^{\eta_{i_1+1/2}} c\rho \left(\theta^{*j} \right) \left(\theta^{*j+1} - \theta^{*j} \right) d\eta = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_{\eta_{i_1-1/2}}^{\eta_{i_1+1/2}} q^1 d\eta d\tau, \quad (5)$$

где, исходя из закона Фурье, $q^1 = -\lambda(\theta^*) \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta}$.

Выражение в левой части представляет собой количество тепла, идущее на нагрев элементарной

ячейки, которое аппроксимируется выражением

$$\int_{\eta_{i-1/2}}^{\eta_{i+1/2}} c\rho(\theta^{*j}) \left(\theta^{*j+1} - \theta^{*j} \right) d\eta = (c\rho)_{i_1} V_{i_1} \left(\theta^{*j+1} - \theta^{*j} \right),$$

где V_{i_1} - объем ячейки P_{i_1, i_2} .

Для составления разностной схемы необходимо выразить тепловой поток q^1 через решение и коэффициенты исходного уравнения. Полагая, что изменение потока q^1 по переменной η на рассматриваемом интервале мало, получим

$$\int_{\eta_{i-1/2}}^{\eta_{i+1/2}} q^1 d\eta = \int_{\eta_{i-1/2}}^{\eta_{i+1/2}} [q_{i_1-1/2}^1 - q_{i_1+1/2}^1] d\eta = q_{i_1+1/2, i_2}^1 - q_{i_1-1/2, i_2}^1,$$

что соответствует интерполяции потока q^1 полиномом нулевого порядка, $q_{i_1-1/2, i_2}^1, q_{i_1+1/2, i_2}^1$ - тепловые потоки через его грани в направлении η . Подставив эти выражения в (5) получим уравнение баланса

$$q_{i_1-1/2, i_2}^1 - q_{i_1+1/2, i_2}^1 - \frac{(c\rho)_{i_1, i_2} V_{i_1, i_2} \left(\theta^{*j+1} - \theta^{*j} \right)}{\Delta\tau} = 0. (6)$$

Рассмотрим уравнение теплового баланса для внутренней ячейки, изображенной на рис. 3.

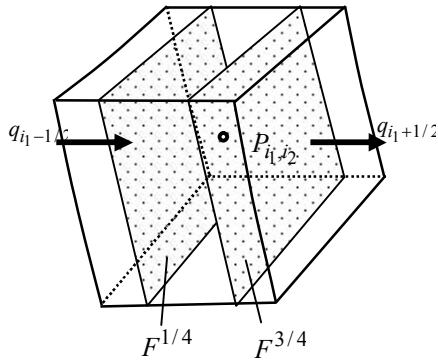


Рис. 3. Схема внутренней ячейки

Тепловой поток из предыдущей ячейки определяется из выражения

$$q_{i_1-1/2, i_2}^1 = \frac{(\theta_{i_1-1, i_2}^* - \theta_{i_1, i_2}^*)}{R_{i_1-1, i_2}},$$

где $R_{i_1-1} = \frac{h_{i_1-1, i_2}^1 / 2}{\lambda_{i_1-1, i_2} F_{i_1-1, i_2}^{3/4}} + \frac{h_{i_1, i_2}^1 / 2}{\lambda_{i_1, i_2} F_{i_1, i_2}^{1/4}}$ - термическое сопротивление участка $P_{i_1-1, i_2} - P_{i_1, i_2}$; $F_{i_1-1, i_2}^{3/4}$ - сред-

няя площадь сечения ячейки на участке $h_{i_1-1, i_2}^1 / 2$; $F_{i_1, i_2}^{1/4}$ - средняя площадь сечения ячейки на участке $h_{i_1, i_2}^1 / 2$.

Тепловой поток в следующую ячейку определяется аналогично:

$$q_{i_1+1/2, i_2}^1 = \frac{(\theta_{i_1+1}^* - \theta_{i_1}^*)}{R_{i_1+1, i_2}},$$

$$\text{где } R_{i_1+1, i_2}^1 = \frac{h_{i_1, i_2}^1 / 2}{\lambda_{i_1, i_2} F_{i_1, i_2}^{3/4}} + \frac{h_{i_1+1, i_2}^1 / 2}{\lambda_{i_1+1, i_2} F_{i_1+1, i_2}^{1/4}}.$$

Рассмотрим порядок определения длин шагов h и площадей F . Если построена аналитическая функция $w = p(z)$, конформно отображающая двувязную область $G_1, r_0 \leq |z| \leq 1$, на область G_2 в плоскости w , и построена полярная сетка в этой области $z = \rho e^{i\varphi}$, тогда лучам $\varphi = const$ в плоскости z соответствуют кривые $w = p(\rho e^{i\varphi}), 0 \leq \rho \leq 1$, а окружностям $|z| = \rho = const$ - кривые $w = p(\rho e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Координаты узлов сетки определяются соотношениями

$$x_{kj}^1 = \text{Re}(p(\rho_k e^{i\varphi_j})), \quad x_{kj}^2 = \text{Im}(p(\rho_k e^{i\varphi_j})).$$

Наряду с полярными координатами (ρ, φ) в плоскости z введем полярные координаты (P, Φ) в плоскости w и построим вещественные функции $P(\rho, \varphi) = |p(\rho e^{i\varphi})|, \Phi(\rho, \varphi) = \arg(p(\rho e^{i\varphi}))$. Если обозначить декартовы координаты в плоскости w через $(x^1 = P \cos \Phi, x^2 = P \sin \Phi)$, то компоненты метрического тензора Римана определяются выражениями [4]

$$g_{11}(\rho, \varphi) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \rho} \right)^2;$$

$$g_{22}(\rho, \varphi) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \right)^2;$$

$$g_{12}(\rho, \varphi) = g_{21}(\rho, \varphi) = \frac{\partial x^1}{\partial \rho} \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial x^2}{\partial \rho} \frac{\partial x^2}{\partial \varphi}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial x^1}{\partial \rho} = \frac{\partial x^1}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial x^1}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} = \frac{\partial x^1}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial x^1}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \rho} = \frac{\partial x^2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial x^2}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = \frac{\partial x^2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial x^2}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

а также учитывая, что $\frac{\partial x^1}{\partial P} = \cos \Phi$, $\frac{\partial x^1}{\partial \Phi} = -P \sin \Phi$,

$$\frac{\partial x^2}{\partial P} = \sin \Phi, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \Phi} = P \cos \Phi, \text{ получим}$$

$$g_{11}(\rho, \varphi) = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)^2 + P^2(\rho, \varphi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)^2; \quad (7)$$

$$g_{22}(\rho, \varphi) = \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)^2 + P^2(\rho, \varphi) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2; \quad (8)$$

$$g_{12}(\rho, \varphi) = g_{21}(\rho, \varphi) = \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + P^2(\rho, \varphi) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0. \quad (9)$$

Длина кривой, соединяющей узлы с номерами

$(i_1, i_2), (i_1 + 1, i_2)$, равна

$$h_{i_1, i_2}^1 = \int_{\rho_{i_1}}^{\rho_{i_1+1}} \sqrt{g_{11}(\rho, \varphi_{i_2})} d\rho, \quad (10)$$

длина кривой, соединяющей узлы с номерами

$(i_1, i_2), (i_1, i_2 + 1)$, равна

$$h_{i_1, i_2}^2 = \int_{\varphi_{i_2}}^{\varphi_{i_2+1}} \sqrt{g_{22}(\rho_{i_1}, \varphi)} d\varphi. \quad (11)$$

Площадь ячейки P_{i_1, i_2} , содержащей узлы с номе-

рами $(i_1, i_2), (i_1, i_2 + 1), (i_1 + 1, i_2), (i_1 + 1, i_2 + 1)$, определяется выражением

$$F_{i_1, i_2} = \int_{\rho_{i_1}}^{\rho_{i_1+1}} \int_{\varphi_{i_2}}^{\varphi_{i_2+1}} I(\rho, \varphi) d\rho d\varphi, \quad (12)$$

где $I(\rho, \varphi) = \sqrt{g_{11}(\rho, \varphi) g_{22}(\rho, \varphi)}$.

Заменим в уравнении (6) потоки

$q_{i_1-1/2, i_2}^1, q_{i_1+1/2, i_2}^1$ соответствующими выражениями, а для последних ячеек используем граничные условия. Тогда уравнение принимает вид

$$A_{i_1, i_2} \theta_{i_1-1, i_2}^* + B_{i_1, i_2} \theta_{i_1, i_2}^* + A_{i_1, i_2} \theta_{i_1+1, i_2}^* + D_{i_1, i_2} = 0 \quad (13)$$

и решается методом прогонки (модификация метода Гаусса для системы уравнений с трехдиагональной матрицей).

По аналогичным формулам выполняется приближенное решение уравнения (3) в направлении

оси ξ , в качестве начального условия берется полученное решение к концу временного интервала с распределением $\theta^*(\xi, \eta, \tau_j)$.

На каждом шаге по времени для нахождения разностного решения требуется решать методом прогонки систему уравнений (13).

Рассмотренная для двумерного случая локально-одномерная схема естественным образом обобщается и на трехмерные задачи. В этом случае вычисления на каждом шаге по времени проводятся путем прогонок в направлениях ξ, η, z .

Заключение

Предложен метод расчета нестационарных температурных полей в составных конструкциях сложной формы, основанный на применении криволинейных ортогональных сеток. Математическая модель позволяет использовать интегро-интерполяционный численный метод и расщепить многомерную задачу на независимые локально-одномерные, обеспечивающие с учетом суперпозиции частных решений реализацию экономичной схемы.

Литература

1. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
2. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.М. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1971. – 342 с.
3. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – С. 760.
5. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений. – К.: Наук. думка, 1964. – 530 с.
6. Угодчиков А.Г. Построение конформно-отображающих функций. – К.: Наук. думка, 1966. – 77 с.

Поступила в редакцию 20.11.2003

Рецензент: д-р физ-мат. наук, проф. Николаев А.Г., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, г. Харьков.