УДК 539.3

В.А. БАЖЕНОВ, Є.С. ДЕХТЯРЮК, В.В. ОТРАШЕВСЬКА, М.В. ГОНЧАРЕНКО

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

СТАБІЛІЗАЦІЯ СТІЙКОСТІ СТАЛИХ КОЛИВАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ ЗБУДЖЕННІ

Вивчено питання, пов'язані з аналізом можливості стабілізації за допомогою додаткового випадкового збудження динамічних станів пружних систем, обумовлених детермінованим періодичним параметричним навантаженням. Розглянуто параметричне збудження, що є сумою гармонійного і експоненціально-корельованого гауссового випадкового збуджень. При певних параметрах додаткового випадкового навантаження має місце ефект стабілізації. Межі областей динамічної стійкості будуються, виходячи з означення стійкості відносно моментних функцій. Відповідні диференціальні рівняння для цих функцій одержано на основі апроксимації експоненціально-корельованого нормального випадкового процесу випадковим процесом з обмеженою кількістю станів. Результати досліджень порівняні з відповідними даними, отриманими на основі методу усереднення Стратоновича – Хасьмінського для стохастичних диференціальних рівнянь. Розглянуто задачу про динамічну стійкість кругової циліндричної оболонки при осьовому параметричному навантаженні.

динамічна стійкість, параметричний резонанс, періодично нестаціонарний процес, моментні функції, метод усереднення, області стійкості, радіус кореляції

Вступ

У роботі досліджується принципова можливість підвищення динамічної стійкості пружних систем за рахунок збудження додаткових випадкових вібрацій. Ці питання являються частиною загальної проблеми аналізу параметричних резонансів у динамічних системах. Параметричні коливання, що часто супроводжують вимушені коливання, схожі з ними за зовнішніми проявами, і тому можуть бути віднесені інженерами-практиками до звичайних резонансних коливань. Між тим в ряді випадків відомі методи демпфірування і віброізоляції можуть не знизити рівень впливу, при якому виникають параметричні коливання, або навіть призвести до протилежних результатів. Тому вивчення умов виникнення параметричних коливань є актуальною проблемою у машинобудуванні, транспорті і промисловому будівництві [1].

Систематичні положення теорії динамічної стійкості пружних систем при детерміністичному періодичному параметричному збудженні наведено в монографії В.В. Болотіна [1]. Аналогічні питання для стохастичних систем розглядались в роботах В.В. Болотіна [2], Р.Л. Стратоновича [3], Р.З. Хасьмінського [4], М.Ф. Діментберга [5,6], В.І. Кляцкіна [7] та інших.

Вперше питання про можливість підвищення стійкості пружних систем за допомогою періодичних вібрацій було поставлене В.Н. Челомеєм [8], який досліджував поведінку авіаційних конструкцій. Було показано, що дана проблема актуальна в цій галузі, оскільки такі типові для авіаційної техніки елементи, як циліндричні замкнені оболонки, панелі різного обрису та інші, часто знаходяться під дією динамічного параметричного навантаження.

На принципову можливість підвищення стійкості за рахунок випадкових вібрацій вказано в роботах М.Ф. Діментберга і К.В. Фролова [9]. Аналогічні питання розглядались в дослідженнях S.T. Ariaratnam [10]. Але в указаних роботах були застосовані асимптотичні підходи, область використання яких обмежена.

В даній роботі для спеціального виду стохастичних параметричних навантажень викладено підхід, що не використовує асимптотичні методики. Це дозволяє отримати результати з контрольованою точністю. Як показано нижче, має місце істотне розходження з результатами, отриманими за допомогою асимптотичного підходу [10].

1. Формулювання проблеми

У даній роботі досліджується вплив стохастичної складової параметричного навантаження на конфігурацію областей динамічної стійкості системи. У представлених дослідженнях використовується метод моментів, що передбачає складання детерміністичних рівнянь відносно моментів різних порядків на основі стохастичних рівнянь руху цієї системи. Задача формулюється таким чином. Розглядаються два вигляди параметричного збудження, яке діє на пружну механічну систему: гармонійне збудження і сума гармонійного і експоненціально-корельованого гауссового випадкового збуджень. Якщо при певних параметрах додаткового випадкового навантаження область динамічної стійкості, що відповідає комбінованому збудженню, ширше області динамічної стійкості, що відповідає детермінованому збудженню, то має місце ефект стабілізації, обумовлений додатковим стохастичним навантаженням.

2. Динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному навантаженні

Досліджується задача про стійкість параметричних коливань лінійних стохастичних систем у випадку, коли навантаження являє собою періодично нестаціонарний процес.

Нехай поведінка деформівної системи із скінченним числом степенів вільності описується системою рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}} + C\dot{\bar{u}} + Ku + \varphi(t)K_{G_1}\bar{u} + \psi(t)K_{G_2}\bar{u} = 0\,, \qquad (1)$$

де $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))^T$ – n-вимірний вектор динамічних змінних; M, C, K – матриці мас, демпфірування і жорсткості відповідно; K_{G_1} і K_{G_2} – матриці геометричної жорсткості, що відповідають різним типам параметричного впливу. У деяких випадках матриці K_{G_1} і K_{G_2} можуть збігатися. Функція $\varphi(t)$ визначає закон зміни в часі детерміністичної складової параметричного навантаження $\psi(t)$, яка є випадковою.

Досліджується стійкість тривіальних розв‘язків стохастичної системи (1) за моментними функціями від динамічних змінних [2]. Процедура побудови диференціальних рівнянь відносно моментних функцій істотно залежить від вигляду випадкової складової $\psi(t)$. Якщо $\psi(t)$ – білий шум, то завдяки некорельованості розв‘язку системи (1) і випадковості збудження $\psi(t)$ у збіжні моменти часу, побудова рівнянь відносно моментних функцій може бути виконана точно [11]. Якщо випадковий процес $\psi(t)$ має скінченний радіус кореляції, то при побудові зазначеної системи рівнянь використовуються наближені підходи, які базуються на методах усереднення нелінійної механіки [6] або формуючих фільтрів [2]. При застосуванні першої групи методів для визначення меж областей динамічної стійкості конкретних стохастичних систем завжди відкритим залишається питання про коректність одержуваних результатів для заданого рівня випадкової складової параметричного навантаження. Методи другої групи грунтуються на переході до задачі з некорельованим зовнішнім впливом шляхом розширення фазового простору за рахунок включення в число фазових змінних складових зовнішнього навантаження. Для цього вплив за допомогою рівнянь формуючого фільтра подається у вигляді реакції на білий шум, що приводить до нелінійної системи стохастичних диференціальних рівнянь. Через нелінійність послідовність рівнянь для моментних функцій стає нескінченною [2]. Проблема редукції нескінченних систем рівнянь до скінченних у випадку параметричного збудження вдалого вирішення не знайшла.

У даній роботі розглядається підхід, який дозволяє для експоненціально-корельованого збудження $\psi(t)$ переходити до розширеного фазового простору, залишаючись у рамках лінійної системи.

Це досягається за рахунок зображення випадкового процесу $\psi(t)$ у вигляді нескінченної суми статистично незалежних телеграфних сигналів [7]. При дослідженні стійкості складається нескінченна послідовність рівнянь для моментів відповідного порядку відносно динамічних змінних і добутків динамічних змінних на доданки зазначеного зображення випадкового процесу $\psi(t)$. Редукція нескінченної послідовності в даному випадку проводиться природним чином – шляхом заміни у зображенні випадкового процесу $\psi(t)$ нескінченної суми скінченною. Збільшуючи число доданків у скінченній сумі, можна досліджувати збіжність обчислюваних оцінок і одержувати результат з контрольованою точністю.

2.1. Побудова моментних рівнянь

При побудові системи диференціальних рівнянь відносно моментних функцій певного порядку зручно переходити до фазових координат. У фазових координатах $\bar{x}(t) = (x_1(t),\, x_2(t),\, ...,\, x_{2n}(t))^T =$ $= (u_1(t),\, u_2(t),\, ...,\, u_n(t),\, \dot{u}_1(t),\, \dot{u}_2(t),\, ...,\, \dot{u}_n(t))^T$ система (1) набирає вигляду

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}(t) + \varphi(t)B_1\bar{x}(t) + \psi(t)B_2\bar{x}(t)\ , \qquad (2)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K_{G_1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K_{G_2} & 0 \end{pmatrix};$$

E – одинична матриця розмірністю $n \times n$. Для системи (2) розглядається задача Коші з початковими умовами

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0\ , \qquad (3)$$

де вектор $\bar{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{02n})^T$ вважається детермінованим.

Нижче техніка побудови рівнянь для моментних функцій від фазових змінних демонструється на прикладі моментів другого порядку. Спочатку необхідно записати систему диференціальних рівнянь відносно добутків фазових координат. Оскільки випадковий процес $\psi(t)$ має скінченний радіус кореляції, з урахуванням (2) і (3) ці диференціальні рівняння набирають вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right) = A\left(\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right) + \left(\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right)A^T +$$
$$\varphi(t)B_1\left(\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right) + \varphi(t)B_1\left(\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right)B_1^T +$$
$$+\psi(t)B_2\left(\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right) + \psi(t)B_1\left(\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right)B_2^T. \qquad (4)$$

Початкові умови розглядуваної задачі задаються виразом

$$\bar{x}(0)\bar{x}^T(0) = \bar{x}_0\bar{x}_0^T\ . \qquad (5)$$

Система (4) являє собою матричний запис $(2n)^2$ скалярних диференціальних рівнянь. З них внаслідок симетрії матриці $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$ незалежними є $n(2n+1)$ рівнянь. Далі для спрощення запису буде постійно використовуватися також матричне зображення. Перехід від матричного запису до незалежних скалярних рівнянь здійснюється за допомогою взаємно однозначного відображення $[\cdot]$ множини $\boldsymbol{F}$ симетричних матриць порядку $2n \times 2n$ на множину $\boldsymbol{H}$ $n(2n+1)$**-**вимірних векторів, яке кожній матриці $F = \left\| f_{ij} \right\|_{i,j=1}^{2n} \in \boldsymbol{F}$ ставить у відповідність вектор $h = [F] = \left(f_{11}, f_{21}, ..., f_{2n1}, f_{22}, f_{32}, ..., f_{2n2n}\right)^T \in \boldsymbol{H}$, який є прямою сумою розташованих не вище головної діагоналі послідовних підстовпців матриці *F*.

Шляхом усереднення (4) по ансамблю реалізацій випадкового процесу $\psi(t)$ можна записати систему матричних рівнянь відносно інших моментів:

$$\frac{d}{dt}\left\langle\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle = A\left\langle\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle + \left\langle\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle A^T +$$
$$+\varphi(t)B_1\left\langle\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle + \varphi(t)B_1\left\langle\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle B_1^T +$$
$$B_2\left\langle\psi(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle + B_1\left\langle\psi(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle B_2^T\ , \qquad (6)$$

де символом $\langle\ \rangle$ позначено операцію усереднення по ансамблю реалізацій випадкового процесу. Для системи (6) розглядається задача Коші з початковими умовами

$$\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle = \bar{x}_0\bar{x}_0^T . \qquad (7)$$

Система (6) незамкнена відносно інших моментів

$$\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle = \boldsymbol{m_2} = \left\| m_{ij} \right\|_{i,j}^{2n} = \left\| \left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle \right\|_{i,j=1}^{2n} ,$$

тому що містить нові невідомі функції $\left\langle \psi(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)\right\rangle = \left\| \left\langle \psi(t)\bar{x}_i(t)\bar{x}_j{}^T(t)\right\rangle \right\|_{i,j=1}^{2n}$. Ці функції є кореляціями в момент t випадкового процесу $\psi(t)$ з розв‘язком задачі Коші для системи (4), (5), компоненти якого є функціоналами від цього процесу в інтервалі [0, t]. Саме наявність цих нових невідомих у кожному наступному рівнянні приводить до нескінченної послідовності моментних рівнянь. При розв‘язанні конкретних задач нескінченну послідовність необхідно редукувати до скінченної.

2.2. Динамічна стійкість при експоненціально-корельованому параметричному навантаженні

Коли $\psi(t)$ є експоненціально-корельованим нормальним випадковим процесом з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|} , \qquad (8)$$

проблема редукції вирішується у такий спосіб. Відомо [7], що такий процес може бути апроксимований випадковим процесом зі скінченним числом станів. Тому можна одержати скінченні послідовності моментних рівнянь, які наближають нескінченні послідовності рівнянь. Ця апроксимація здійснюється за допомогою телеграфних процесів. Телеграфний процес $\xi(t)$ визначається формулою

$$\xi(t) = a(-1)^{n(0,t)} , \qquad (9)$$

де a – детермінована величина, $n(t_1,t_2)$ – пуассонівський стаціонарний потік, що описує число стрибків в інтервалі. Такий процес послідовно набуває одного з двох значень: a або $-a$. Середнє число стрибків в одиницю часу позначимо через ν.

Зазначена апроксимація здійснюється за допомогою такого зображення:

$$\psi_N(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + ... + \xi_N(t) , \qquad (10)$$

де $\xi_i(t)$ – незалежні телеграфні процеси, що визначаються співвідношенням (9) при $a = \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{N}}$ і $\nu = \alpha$.

Взаємно кореляційна матриця процесів $\xi_i(t)$ має вигляд

$$\left\langle \xi_i(t)\xi_j(t+\varepsilon)\right\rangle = \delta_{ij}\frac{\sigma_0^2}{N}e^{-\alpha|\tau|} , \qquad (11)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. При $N \to \infty$ випадковий процес $\psi_N(t) \to \psi(t)$.

Нехай $\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t)$ є розв‘язком задачі Коші (4), (5), в якій параметричне збудження $\psi(t)$ замінено апроксимацією $\psi_N(t)$. Для $\left\langle \bar{x}_N(t)\bar{x}^T{}_N(t)\right\rangle$ записується система, аналогічна (6), у якій будуть нові невідомі $\left\langle \psi_N(t)\bar{x}_N(t)\bar{x}^T{}_N(t)\right\rangle$. Для $\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t)$ справедливе таке правило винесення операції диференціювання з-під знака усереднення [7]:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \xi_1(t)...\xi_k(t)\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \xi_1(t)...\xi_k(t)\frac{d}{dt}\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t)\right\rangle -$$

$$-\alpha k\left\langle \xi_1(t)...\xi_k(t)\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t)\right\rangle \quad (k=1,2,...,N).$$

(12)

Враховуючи це, відносно вказаних нових невідомих можна записати нову систему рівнянь з відповідними початковими умовами. У цю систему крім $\left\langle \bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t)\right\rangle$ і $\left\langle \psi_N(t)\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t)\right\rangle$ увійдуть свої нові невідомі, відносно яких, ґрунтуючись на співвідношенні (12), можна записати нову систему рівнянь з відповідними початковими умовами і т.д. Через незалежність випадкових процесів $\xi_k(t)$ (k = 1, 2,..., N) у рівнянні, яке буде записане на N-му кроці, нові невідомі не з'являться. Таким чином, скінченна послідовність рівнянь буде замкненою.

Сказане вище записується таким чином. Визначається послідовність N+1 матриць:

$$\boldsymbol{m}_{02}(t) = \left\langle \bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t)\right\rangle ,$$

$$\boldsymbol{m}_{12}(t) = \left\langle \xi_1(t)\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t) \right\rangle,$$

$$\boldsymbol{m}_{22}(t) = \left\langle \xi_1(t)\xi_2(t)\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t) \right\rangle,$$

…………………………………………

$$\boldsymbol{m}_{k2}(t) = \left\langle \xi_1(t)\xi_2(t)...\xi_k(t)\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T(t) \right\rangle,$$

…………………………………………

$$\boldsymbol{m}_{N2}(t) = \left\langle \xi_1(t)\xi_2(t)...\xi_N(t)\bar{x}_N(t)\bar{x}_N^T \right\rangle . \qquad (13)$$

Відносно цих матриць з урахуванням (4) і (12) записується послідовність матричних рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{m}_{02} = (A + \varphi(t)B_1)\boldsymbol{m}_{02} + \boldsymbol{m}_{02}(A^T + $$
$$+ \varphi(t)B_1)\boldsymbol{m}_{N2} + \boldsymbol{m}_{N2}(A^T + \varphi(t)B_1^T)$$

....

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{m}_{k2} = \frac{k\sigma_0^2}{N}(B_2\boldsymbol{m}_{(k-1)2} + \boldsymbol{m}_{(k-1)}B_2^T) +$$
$$+ (A - \alpha kE + \varphi(t)B_1)\boldsymbol{m}_{k2} + \boldsymbol{m}_{k2}(A^T + \varphi(t)B_1^T) +$$
$$+ (N-k)(B_2\boldsymbol{m}_{(k+1)2} + \boldsymbol{m}_{(k+1)2}B_2^T),$$
$$(k=1, 2, \dots, N-1),$$

....

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{m}_{N2} = \sigma_0^2(B_2\boldsymbol{m}_{(N-1)2} + \boldsymbol{m}_{(N-1)}B_2^T) + (A - \alpha NE +$$
$$+ \varphi(t)B_1)\boldsymbol{m}_{N2} + \boldsymbol{m}_{N2}(A^T + \varphi(t)B_1^T), \qquad (14)$$

де E – одинична матриця розмірністю $2n \times 2n$. Для матриць-функцій (13) визначаються початкові умови:

$$\boldsymbol{m}_{02}(0) = \bar{x}_0\bar{x}_0^T \;,\; \boldsymbol{m}_{k2}(0) = 0 \;, (k = 1, 2, \dots, N). \qquad (15)$$

Система (14) має блокову тридіагональну структуру.

Таким чином, питання про стійкість тривіальних розв‘язків системи (2) у середньоквадратичному зводиться до стійкості тривіальних розв‘язків детерміністичної системи (14). Одержувана точність оцінки критичного рівня збудження, взагалі кажучи, залежить від *N*. Тому при аналізі стійкості розглядається система (14) з послідовним збільшенням *N*, поки не буде досягнуто збіжності оцінки рівня критичного збудження.

Отже, за рахунок розширення фазового простору при переході від матриці $\boldsymbol{m}_2(t)$ до системи матриць $\boldsymbol{m}_{k2}(t)$ (k = 0, 1,..., N) питання про стійкість тривіальних розв‘язків системи (6) зводиться до питання
про стійкість системи (14). Аналогічний перехід від моментних функцій

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{r}}(t) = \left\langle x_i(t)x_j(t)..x_l(t) \right\rangle$$

до моментних функцій

$$\boldsymbol{m}_{kr}(t) = \left\langle \xi_1(t)\xi_2(t)..\xi_k(t)x_i(t)x_j(t)..x_l(t) \right\rangle$$

може бути реалізований при дослідженні стійкості тривіального розв‘язку системи (2) за сукупністю моментних функцій $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{r}}$ при $r > 2$. Тут має місце така проблема: перехід від моментних функцій $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{2}}(t)$ до $\boldsymbol{m}_{k2}(t)$ може розширити в просторі параметрів зовнішнього навантаження області стохастичної нестійкості, що може призвести до завищення значення рівня критичного параметричного впливу. У силу нерівності Буняковського – Шварца для парних *r* такого розширення не відбувається.

Структура детерміністичної системи

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = G(t)\bar{w} \;, \qquad (16)$$

до якої зводиться розглянута задача про стохастичну стійкість (2), не залежить від вигляду функції $\varphi(t)$. В системі (16) координати вектора

$$\bar{w} = \left(w_1, w_2, \dots, w_l\right)^T$$

є компонентами системи матриць

$$\boldsymbol{m}_{0r} \,,\; \boldsymbol{m}_{1r} \,, \dots ,\; \boldsymbol{m}_{Nr} \,.$$

У даній роботі за $\varphi(t)$ приймається $\frac{2\pi}{\omega}$-періодична функція. У цьому випадку матриця $G(t)$ розмірністю $p \times p$ має $\frac{2\pi}{\omega}$-періодичні коефіцієнти. Для оцінки характеристичних показників *h* системи (16) за допомогою редукції здійснюється перехід до вирішення алгебричної проблеми на власні значення системи скінченного порядку

$$det\left(K^* - hE^*\right) = 0 \;, \qquad (17)$$

де E^* і K^* – редуковані матриці.

Відзначимо ще раз характерну рису розглянутого підходу: може бути здійснена його чисельна реалізація у вигляді послідовності таких обчислювальних процедур, які допускають контроль точності одержуваних оцінок.

2.3. Стабілізація стійкості динамічних систем

У даній роботі викладений підхід застосовується для дослідження можливості стабілізації за допомогою додаткового випадкового збудження динамічних станів, обумовлених детермінованим періодичним параметричним навантаженням пружних систем.

Спочатку досліджується стійкість тривіальних розв'язків стохастичного аналога рівняння Мат'є – Хілла:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\varepsilon\xi\omega_0\frac{du}{dt}+\omega_0^2\left[1+\varepsilon h\sin\omega t+\varepsilon^{1/2}\psi(t)\right]u=0, \tag{18}$$

де $\psi(t)$ – експоненціально-корельований центрований випадковий процес з кореляційною функцією (8), ε – малий параметр, що характеризує інтенсивність гармонійного й випадкового збуджень, а також рівень демпфірування в системі. Подібна задача розглядалася в [10]. У цій роботі за допомогою принципу усереднення в сполученні з методом марковських процесів вихідна стохастична система (18) на підставі теореми Стратоновича – Хасьмінського [6] зводиться до системи двох укорочених стохастичних рівнянь у розумінні Іто. Далі з використанням некорельованості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з випадковим збудженням у момент часу t будується система детермінованих диференціальних рівнянь відносно моментних функцій, за допомогою якої досліджується задача стійкості [6].

На рис. 1 при $\varepsilon=0{,}1$, $\xi=0{,}1$ і дисперсії $\sigma_0^2=2$ випадкового процесу $\psi(t)$ для різних значень радіуса кореляції $\rho=\dfrac{1}{\alpha}$ в координатах $\left(h,\overline{\omega}=\dfrac{\omega}{2\omega_0}\right)$ показано межі області стійкості в середньоквадратичному, одержані методом усереднення (пунктирна лінія) і за допомогою викладеної методики (суцільна лінія).

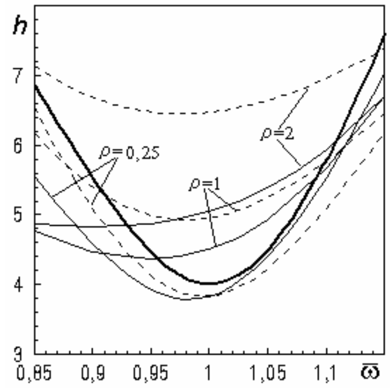

Рис. 1. Межі областей динамічної стійкості при $\varepsilon=0{,}1$, $\xi=0{,}1$, $\sigma_0^2=2$

Для кожної межі вказано відповідне значення радіуса кореляції ρ. Для $\rho=0{,}25$ значення N у вигляді (10), при якому досягається збіжність оцінки, дорівнює 5, для $\rho=1$ N = 30, для $\rho=2$ N = 35. Товстою лінією на рисунку показано межу області динамічної стійкості за відсутності випадкового збудження. Хоча кількісно оцінки меж області стійкості, отримані за допомогою двох зазначених підходів, відрізняються, якісно вони збігаються. При значеннях радіуса кореляції додаткового випадкового збудження $\rho=1$ і $\rho=2$ критичне значення h при комбінованому параметричному навантаженні вище, ніж при гармонійному, тобто має місце ефект стабілізації.

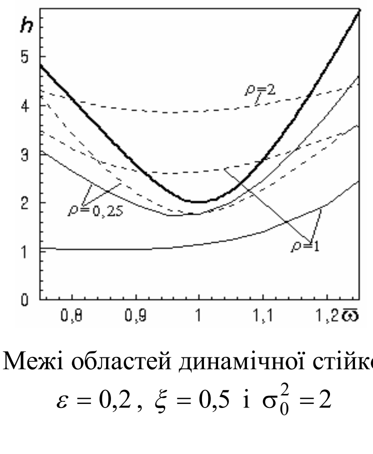

Рис. 2. Межі областей динамічної стійкості при $\varepsilon=0{,}2$, $\xi=0{,}5$ і $\sigma_0^2=2$

На рис. 2 показано аналогічні результати для $\varepsilon = 0{,}2$, $\xi = 0{,}5$ і $\sigma_0^2 = 2$, при цьому значення параметра загасання ($\varepsilon\xi = 0{,}1$) в обох задачах однакові.

Для таких значень параметрів результати, отримані за допомогою двох зазначених методик, відрізняються не тільки кількісно, але і якісно. При використанні методики, що грунтується на застосуванні апроксимації (10), зі збільшенням радіуса кореляції ρ випадкового процесу $\psi(t)$ критичні значення параметра модуляції h зменшуються, а при $\rho = 2$ відповідний динамічний стан нестійкий навіть за відсутності гармонійної складової параметричного збудження (h = 0). Отже, при даному значенні ε ефект стабілізації не спостерігається. У той же час результати, отримані методом усереднення, вказують на можливість стабілізації.

Істотна розбіжність результатів при ε = 0,2 пояснюється тим, що для розглядуваної задачі таке значення ε недостатньо мале. Ця ситуація є типовою при застосуванні методу усереднення. Вказана теорема стверджує, що розв‘язок вихідної стохастичної задачі зводиться до розв‘язку укороченої системи при $\varepsilon \to 0$, між тим у кожній прикладній задачі доводиться мати справу з деяким скінченним значенням ε. Таким чином, строго встановлені локальні результати фактично використовуються нелояльно. Зроблене зауваження не применшує значення методів усереднення для розв’язання нелінійних задач статистичної динаміки. Застосування двох зазначених методів розв‘язання розглянутої задачі сприяє взаємному обгрунтуванню одержуваних результатів, а також дає істотну додаткову інформацію про аналітичну природу розв‘язку.

2.4. Динамічна стійкість замкненої кругової циліндричної оболонки

Досліджувалася також можливість стабілізації за допомогою додаткового випадкового збудження динамічних станів оболонок, обумовлених детермінованим параметричним навантаженням. Вивчалася динамічна стійкість замкненої кругової циліндричної оболонки, шарнірно обпертої по контуру. Закріплення допускає вільний зсув країв у поздовжньому напрямку і перешкоджає зсуву в дуговому. По торцях оболонки прикладено рівномірно розподілене параметричне навантаження $p(t) = p_0 \sin\omega t + \mu\psi(t)$, де $\psi(t)$ – експоненціально-корельований випадковий процес з одиничною дисперсією. Якщо подати розв‘язок системи трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує деформацію оболонки, у вигляді ряду по власних формах коливань, то нескінченна система звичайних диференціальних рівнянь відносно узагальнених координат розпадеться на незв'язані групи по три рівняння (узагальнений особливий випадок [12]). У рамках кожної групи рівняння зв'язані. Але внаслідок того, що в кожній групі зведена матриця мас і матриця геометричної жорсткості відрізняються тільки множником, можна за допомогою перетворення координат у межах групи перейти до системи трьох рівнянь типу Мат‘є – Хілла, що розпадається.

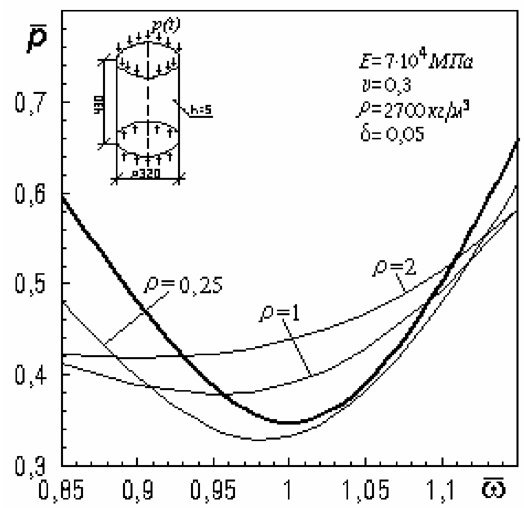

Рис. 3. Межі областей динамічної стійкості циліндричної оболонки

Розглядалася оболонка, геометричні характеристики, а також фізичні параметри (модуль пружності E, щільність ρ, коефіцієнт Пуассона ν і логарифмічний декремент коливань δ) якої наведені на рис. 3.

У координатах $\left(\overline{p} = \dfrac{p_0}{p_{кр}},\ \overline{\omega} = \dfrac{\omega}{2\omega_0} \right)$, де $p_{кр} = 0{,}605 E \dfrac{h^2}{R}$ [13], $\omega_0 = 4764{,}205 \dfrac{1}{c}$ – мінімальна частота власних коливань розглянутої оболонки, зображено границі областей динамічної стійкості для різних значень радіуса кореляції ρ при інтенсивності додаткового випадкового збудження $\overline{\mu} = \dfrac{\mu}{p_{кр}} = 0{,}375$. Товстою лінією зображено межу області динамічної стійкості при гармонійному параметричному впливі ($\mu = 0$). З рисунка видно, що при додаткових стохастичних навантаженнях з радіусами кореляції $\rho = 1$ і $\rho = 2$ має місце ефект стабілізації.

Висновки

У даній роботі досліджувалася можливість стабілізації за допомогою додаткового випадкового збудження динамічних станів пружних систем, обумовлених детермінованим періодичним параметричним впливом. При цьому розглядався спеціальний вигляд додаткового стохастичного навантаження $\psi(t)$ – експоненціально-корельований випадковий процес. Ці дослідження базуються на зображенні (10) для таких випадкових процесів. Для ширшого класу випадкових процесів такий підхід непридатний, і необхідно використовувати більш універсальний підхід, що грунтується на формулі Фурутцу – Новікова для розщеплення середнього добутку двох функціоналів [14].

Література

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
2. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
3. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы. – М.: МГУ, 1966.
4. Хасьминский Р.З. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – Т. 11. – № 3.
5. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1980.
6. Диментберг М.Ф. Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 176 с.
7. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
8. Челомей В.Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. – М.: Редиздат Аэрофлота, 1939. – 79 с.
9. Диментберг М.Ф., Фролов К.В. Колебания системы с одной степенью свободы при действии периодической силы и изменении собственной частоты по случайному закону // Машиноведение. – 1966. – № 4.
10. Ariaratnam S.T., Tam D.S. Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator // ZAMM, 56, 1976. – P. 449 – 452.
11. Стійкість динамічних систем при періодично нестаціонарному параметричному навантаженні / В.А. Баженов, М. Бусетта, Є.С. Дехтярюк, В.В. Отрашевська // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА. – 2002. – № 71. – С. 21 – 29.
12. Вибрации в технике. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.
13. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
14. Дехтярюк Є.С., Гераймович Ю.Д. Використавня марковських і надмарковських наближень при дослідженні динамічної стійкості пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА. – 2002. – № 71. – С. 30 – 46.

Надійшла до редакції 05.02.04

Рецензент: д-р техн. наук О.Л. Синявський, Національний університет "Києво-Могилянська Академія", м. Київ