

УДК 519.95:62-50

А.А. РЕВА, А.Б. НЕКРАСОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ГЕНЕРАЦИЯ ПРЕДЕЛЬНО ПЛОСКОГО ГРАФА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА НА ОСНОВЕ ВЗВЕШЕННОГО НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА КЕРНИ

Проведен анализ применения разновидности графов – плоских графов – в современной человеческой деятельности, в частности, в сфере проектирования и построения телекоммуникационных сетей. Изложен алгоритм генерации предельно плоского графа минимального веса на основе взвешенного неориентированного графа Керни, произведен аналитический и экспериментальный анализ и расчет сложности алгоритма.

теория графов, предельно плоский граф минимального веса, алгоритм, аналитическое определение сложности алгоритма, экспериментальное определение сложности алгоритма

Введение

Широкое применение теории графов в современной человеческой деятельности [1] обусловлено сочетанием большой гибкости данной математической модели с одновременной широтой предоставляемых возможностей по представлению топологических структур различных систем, что не в последнюю очередь относится к области проектирования сетей передачи данных, широко используемых в авиационной отрасли. Применение теории графов в вышеупомянутой сфере позволяет решать задачи построения оптимальной сети с точки зрения топологии, стоимостных и надежностных характеристик.

Отдельно можно выделить задачу получения структуры сети, максимально насыщенной связями между узлами, но в тоже время имеющей минимальное суммарное значение критерия, используемого для взвешивания линий связи между узлами (это может быть, например, стоимость или расстояние), и, кроме того, отсутствием пересечений линий связи. Анализ существующих алгоритмов [2 – 4] не выявил готовых решений данной задачи. Целью статьи является описание разработанного алгоритма решения данной задачи.

Для решения этой задачи используется специальный раздел теории графов – планарные, или плоские графы.

Сопоставив вершинам графа точки на плоскости, а ребрам – прямые линии, соединяющие точки, соответствующие концам ребра, можно получить диаграмму – визуальное представление графа.

Очевидно, что для любого графа можно построить бесконечное количество таких диаграмм. Если на некоторой диаграмме среди точек, соответствующих вершинам графа, нет совпадающих, а прямые линии, соответствующие ребрам графа, не имеют общих точек (за исключением концов), то эта диаграмма называется геометрической реализацией графа, а такой граф – планарным, или плоским.

1. Алгоритм генерации

1.1. Общие сведения

Получение предельно плоского графа минимального веса на основе графа Керни сопряжено с выполнением одновременно двух критериев – получение плоского графа с максимально возможным количеством ребер и с минимальным весом.

Следует отметить, что первый из критериев имеет больший вес, так как он является необходимым условием алгоритма, второй же является вспомогательным.

Граф минимального веса создается на основе пустого графа, содержащего вершины исходного графа, и состоит из ребер исходного графа, имеющих минимальный вес среди остальных, при этом не пересекающихся друг с другом [3]. Ребра добавляются до состояния насыщения, при котором ни одного ребра более нельзя добавить.

1.1.1. Входные данные

Взвешенный граф Керни $K(V, E)$, $n = |V|$, матрица весов ребер $A[n, n]$, матрица $G[n, 2]$, содержащая координаты вершин графа, пустой граф $K'(V, E')$, содержащий множество вершин V графа K и множество ребер $E' = \emptyset$

1.1.2. Ход генерации

1. Формируем множество E'' на основе множества ребер E графа K и сортируем его по возрастанию.

2. Осуществляем циклический просмотр множества E'' , начиная с нулевого элемента. Если текущее ребро $R_n = E''\{i\}$, $R_n \cap E' = \emptyset$, то добавляем это ребро в граф K' .

3. Если $E''\{i\} \neq \emptyset$, то $i = i+1$ и возвращаемся на шаг 3.

1.1.3. Выходные данные

Взвешенный предельный граф $K'(V, E')$ минимального веса, модифицированная матрица весов ребер $A[n, n]$.

Подробное пошаговое рассмотрение всех алгоритмов приведено ниже.

1.2. Рассмотрение работы алгоритма

1.2.1. Шаг 1

Формируем множество E'' на основе множества ребер E графа K и выполняем сортировку по возрастанию весов ребер в его составе методом быстрой сортировки [5]. Результатом этого действия

является множество, в котором ребра с большим последовательным номером имеют больший вес.

1.2.2. Шаг 2

При формировании множества ребер E' графа K' основной задачей является добавление только тех ребер из отсортированного множества E'' , которые в составе графа K' не вызовут возникновения пересечений. Для этого производится итерационное выявление возможности возникновения пересечений между добавляемым ребром и ребрами, входящими в множество ребер E' графа K' . За каждую итерацию производится одна попытка выявления возможности пересечения между добавляемым и текущим ребрами из множества E' .

Пусть обрабатывается два ребра R_n и R_m , вершинами которых являются V_{n1} , V_{n2} и V_{m1} , V_{m2} соответственно. Эти вершины имеют следующие координаты:

$V_{n1}\{G_{n1,0}, G_{n1,1}\}$ для краткости обозначим $V_{n1}\{x1, y1\}$;

$V_{n2}\{G_{n2,0}, G_{n2,1}\} - V_{n2}\{x2, y2\}$;

$V_{m1}\{G_{m1,0}, G_{m1,1}\} - V_{m1}\{x3, y3\}$;

$V_{m2}\{G_{m2,0}, G_{m2,1}\} - V_{m2}\{x4, y4\}$.

Для выявления пересечения ребер составляется система канонических уравнений прямых l_n и l_m , проходящих соответственно через ребра графа R_n и R_m :

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \\ \frac{x-x_3}{x_4-x_3} = \frac{y-y_3}{y_4-y_3}, \end{cases}$$

решая которую, получаем координаты точки пересечения прямых $\{x_i, y_i\}$ в том случае, если они пересекаются, или $\{\emptyset\}$ в противном случае.

Далее выявляется вопрос принадлежности точки пересечения прямых $\{x_i, y_i\}$ ребрам графа. Для этого используем выражение

$$(x_i \in [x_1, x_2]) \vee (x_i \in [x_3, x_4]) \vee (y_i \in [y_1, y_2]) \vee (y_i \in [y_3, y_4]), \quad (1)$$

принимая значение ИСТИНА в случае принадлежности точки обоим ребрам графа.

В том случае, если выражение принимает значение ЛОЖЬ, то итерационное выявление пересечений для ребра R_n оканчивается и производится переход на Шаг 3, иначе – производится переход к следующему ребру множества E .

Если в ходе выполнения всех итераций выражение (1) ни разу не приобрело значение ЛОЖЬ, то ребро R_n не вызывает возникновения пересечений в графе K' и добавляется в множество ребер E' графа K' .

1.2.3. Шаг 3

Производится переход к следующему ребру во множестве E' . Если таковое есть, то осуществляется переход на Шаг 2, иначе – генерация останавливается.

В ходе работы алгоритма граф изначально строится на основе ребер минимального веса, а затем максимально насыщается ребрами.

Составляя на начальных итерациях граф исключительно из ребер, имеющих минимальный вес, получаем соответственно граф, имеющий минимально возможный вес. Затем, насыщая его ребрами, получаем предельно плоский граф.

Таким образом, выполняется изначально поставленное условие получения предельно плоского графа минимального веса.

2. Анализ сложности алгоритма

Сложность алгоритма N определяется по формуле

$$N = \sum_{j=1}^k (P)^j,$$

где P – сложность шага алгоритма, k – количество шагов алгоритма, i – количество итераций на шаге.

Исходный граф Керни имеет $q = \frac{1}{2}n(n-1)$ ребер. В ходе выполнения алгоритма на его основе создается пустой граф, имеющий ту же топологическую структуру вершин, однако ребра в нем отсутствуют. Соответственно число итераций, необходимое для генерации предельно плоского

графа, будет напрямую зависеть от числа ребер этого предельно плоского графа.

Для любого предельно плоского графа, не содержащего циклов, выполняется условие $q = 3(n-2) - (k-3)$, где n – количество вершин, k – количество внешних ребер, q – количество ребер.

Таким образом, для получения предельно плоского графа на основе исходного графа необходимо выполнить $3(n-2) - (k-3)$ итераций алгоритма.

Определим сложность для каждого из шагов алгоритма.

Шаг 1 – средняя сложность алгоритма быстрой сортировки составляет $\frac{1}{6}n \log(n)$, что и является сложностью данного шага.

Шаг 2 – итерационное выявление возможности возникновения пересечений при добавлении ребра, в наихудшем случае (когда производится полный перебор всех $\frac{1}{2}(3(n-2) - (k-3))$ ребер получаемого плоского графа) требует $(\frac{1}{2}(3(n-2) - (k-3)))^2$ итераций.

Шаг 3 – не имеет весомой вычислительной сложности, поэтому примем его вычислительную сложность равной 1.

В наихудшем случае сложность алгоритма имеет следующий вид:

$$\frac{n \log(n)}{6} + \left(\frac{(3(n-2) - (k-3))^2}{4} + 1 \right)^{(3(n-2) - (k-3))}.$$

Выражение имеет экспоненциальную форму, что в общем случае не является хорошим показателем для алгоритма. Однако следует учесть, что рассматривался наихудший вариант, однако на практике результаты могут быть несколько иными.

В целях более точного выявления сложности алгоритма было проведено экспериментальное тестирование работы алгоритма. Для этого была составлена программа на языке «Паскаль», а также набор типовых тестов, основанных на графах Керни, имеющих вид правильных многоугольников с количеством вершин 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,

15, 16, 17, 18, 19, 20 и соответственно количеством внешних ребер 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Результаты проведенного эксперимента приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты эксперимента

Число вершин n	Число внешних ребер k	Число итераций C	$\frac{\ln(C)}{\ln(n)}$
4	4	355	4.235838
5	5	865	4.20192
6	6	1706	4.153407
7	7	3157	4.140673
8	8	5346	4.128081
9	9	8262	4.104916
10	10	12682	4.103188
11	11	18062	4.08757
12	12	26180	4.093816
13	13	35144	4.080864
14	14	47482	4.080285
15	15	62784	4.079487
16	16	79214	4.068367
17	17	102345	4.071739
18	18	126419	4.064307
19	19	157117	4.063506
20	20	191895	4.060678

Результаты эксперимента в графическом виде показаны на рис. 1.

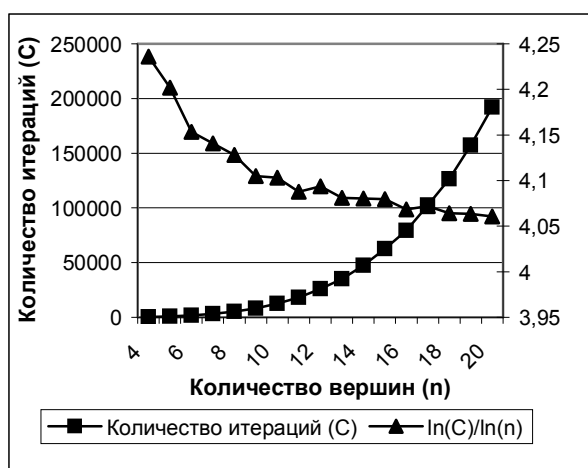


Рис. 1. Зависимость количества итераций от числа вершин

Результатом анализа результатов эксперимента стали следующие выводы:

– зависимость числа итераций от количества вершин имеет степенную зависимость, что наглядно показывает логарифмическое соотношение;

– степенное значение сложности алгоритма $\approx 4,1$;

– логарифмическое отношение имеет стойкую тенденцию к уменьшению и стремится к 4.

Заключение

В статье проведен анализ применения разновидности графов – плоских графов – в современной человеческой деятельности, в частности, в сфере проектирования и построения сетей передачи данных для авиационной отрасли. Изложен алгоритм генерации предельно плоского графа минимального веса на основе взвешенного неориентированного графа Керни, произведен анализ и расчет сложности алгоритма.

Применение данного алгоритма при проектировании топологии сетей передачи данных позволит снизить затраты на построение и значительно ускорить сам процесс проектирования.

Литература

1. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 384 с.
2. Филипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 434 с.
4. Нечепуренко М.И., Попков В.К., Майнагашев С.М. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1990. – 576 с.
5. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 360 с.

Поступила в редакцию 21.01.04

Рецензент: канд. техн. наук А.В. Калмыков, директор ООО «Интерпорт», г. Харьков