

УДК 539.375, 539.376

В.А. БАЖЕНОВ, О.І. ГУЛЯР, С.О. ПИСКУНОВ

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ І РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ АВІАЦІЙНИХ ДВИГУНІВ

Наведено опис розробленої методики розв'язання задач континуального й дискретного руйнування просторових тіл методом скінченних елементів. Виконано дослідження впливу урахування зовнішніх силових впливів на тривимірний характер напружено-деформованого стану і ресурс ялинкового з'єднання лопаток авіаційного газотурбінного двигуна. Розв'язано задачу про визначення траєкторії магістальної тріщини у колесі вентилятора.

повзучість, пошкодженість, ресурс, механіка руйнування, траєкторія тріщини, просторові тіла

Вступ

Для забезпечення надійної і безпечної роботи агрегатів авіаційних двигунів при проведенні розрахунків на міцність необхідним є не тільки визначення пружного деформованого стану, а й моделювання нелінійного деформування з урахуванням зміни властивостей матеріалу, а також руйнування. Руйнування матеріалу може відбуватися шляхом поступового накопичення несучільностей у матеріалі (континуальне руйнування) і внаслідок розвитку магістральних тріщин (дискретне руйнування). Найчастіше континуальне руйнування реалізується внаслідок поширення зон пошкоджень в результаті розвитку деформацій повзучості. Дискретне руйнування є переважним у випадку розповсюдження магістральних тріщин при наявності початкових дефектів. Розв'язання задач континуального й дискретного руйнування просторових тіл складної форми, якими є більшість відповідальних елементів конструкцій авіаційних двигунів (лопатки і їх з'єднання, диски турбін і вентиляторів, ін.), можливе лише на основі чисельних методів. Для побудови відповідних математичних моделей об'єктів складної форми найбільш доцільним є використання методу скінченних елементів (МСЕ), а також його

модифікації – напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) [6].

1. Постановка проблеми

Теоретичні основи механіки континуального руйнування закладені в роботах Ю. Работнова, Л. Качанова та ін. [5, 7]. Для опису деформування й супутнього континуального руйнування в умовах повзучості найчастіше використовуються рівняння теорії зміцнення, що містять параметр пошкодженості Качанова – Работнова [6] ω , $0 \leq \omega \leq 1$:

$$\xi_i^c = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = \frac{B_1 \sigma_i^{n-(a+1)}}{(v_c)^a (1-\omega^{a+1})^m}, \quad (1)$$

де ξ_i^c – інтенсивність швидкості деформацій повзу-

чості; $v_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon^{ijc}}$ – параметр зміцнення

при повзучості.

Параметр пошкодженості матеріалу визначається з кінетичного рівняння, загальний вигляд якого [3] є таким:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = C \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega^r} \right]^m \frac{1}{(1-\omega)^q} \omega^\beta, \quad (2)$$

де C, m, r, q, β – константи матеріалу, σ_e – еквівалентне напруження, обчислене за вибраним критерієм міцності.

При розгляді дискретного руйнування стан матеріалу визначається за допомогою параметрів лінійної механіки руйнування коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Сингулярні поля напружень і переміщень у місцевій полярній системі координат, пов'язаній з вершиною тріщини, описуються виразами вигляду [8]

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij})_k &= f(K_k, r, \sin \theta, \cos \theta), \\ (u_j)_k &= f(K_k, r, \sin \theta, \cos \theta), \end{aligned} \quad (3)$$

де K_k – КІН, індексом $k = I, II, III$ позначено розглядуваний тип деформування і розкриття тріщини; r, θ – радіус-вектор і кут, що описують розташування точки, де обчислюються напруження і переміщення відносно вершини тріщини. Якщо КІН є відомими, поля напружень і переміщень у вершині тріщини цілком визначені.

Для коректного визначення ресурса безвідмовної роботи відповідальних елементів конструкцій необхідним є визначення часу до моменту утворення зони континуального руйнування або досягнення тріщиною критичної довжини.

Метою даної роботи є розробка ефективних методик і алгоритмів розв'язання нелінійних задач механіки континуального руйнування та визначення траєкторії росту тріщини і ілюстрація можливостей їхнього практичного застосування.

2. Методика розв'язання задач континуального руйнування

Моделювання еволюційного процесу нелінійного деформування здійснюється кроковим методом за параметром часу. Для розв'язання системи нелінійних рівнянь, отриманої на кожному кроці за часом t величиною Δt_m , використовується алгоритм, що ґрунтується на сполученні методу неявної схеми інтегрування за параметром з ітераційною процеду-

рою Ньютона – Канторовича. Розв'язання системи нелінійних рівнянь виконується за методом блочних ітерацій:

$$\{u\}_{n+1}^m = \{u\}_n^m + \beta [K] (\{Q\}^m - \{R\}_n^m), \quad (4)$$

де $\{u\}_n^m, \{u\}_{n+1}^m$ – вектори вузлових переміщень на ітераціях n і $n+1$ відповідно; β – параметр релаксації, $1 < \beta < 2$; $[K]$ – матриця жорсткості системи; $\{Q\}^m$ – вектор вузлових навантажень; $\{R\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n .

Умова збіжності ітераційного процесу на кроці є такою:

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta u\}_l^n \right\| \geq \lambda \left\| \sum_{l=0}^L \{u\}_l^n \right\|, \quad (5)$$

де λ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь.

На кожному кроці t обчислення напружень здійснюється з урахуванням рівня накопичених деформацій повзучості. Зважаючи на прийняте припущення про нестискуваність матеріалу при повзучості, величини приростів деформацій повзучості на кроці враховуються при обчисленні дійсних компонент девіатора напружень \overline{S}^{ij} :

$$\overline{S}^{ij} = S^{ij} - G_1 \Delta \varepsilon_{ij}^c, \quad \Delta \varepsilon_{ij}^c = \xi_{ij}^c \Delta t, \quad (6)$$

де $G_1 = E / (1 - 2\mu)$; $\xi_{ij}^c = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{S_{ij}}{\sigma_i}$.

Ітераційний процес обчислення напружень (6) припиняється при виконанні умови (5), а отримані на кроці приросту деформацій повзучості додаються до відповідних накопичених значень. В кінці кроку для всіх СЕ здійснюється перевірка умови початку руйнування $\omega > \omega_{кр}$, де $\omega_{кр} \approx 1$ – критичне значення параметра пошкоженості. У випадку виконання зазначеної умови для деяких СЕ фіксується момент початку руйнування конструкції, і обчислювальний процес припиняється.

Методика розв'язання задач континуального руйнування просторових тіл складної форми, розроблена з використанням НМСЕ, була апробована на низці тестових прикладів. Отримані результати засвідчили вірогідність і ефективність розробленого підходу [2].

3. Методика визначення траєкторії розвитку магістральної тріщини

При проведенні моделювання дискретного руйнування найбільш важливою задачею є визначення траєкторії розвитку магістральної тріщини.

Припустимо, що в деякій конструкції існує дефект у вигляді початкової тріщини. Тоді, обчислюючи K_I і K_{II} у вершині наявної в тілі тріщини, можна одержати напрямок дотичної до траєкторії розвитку тріщини, що утворить з початковим напрямком тріщини кут θ_i (рис. 1):

$$\theta_i = f(K_{Ii}, K_{IIi}). \quad (9)$$

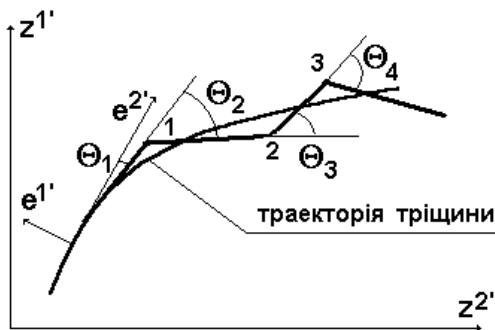


Рис. 1. Визначення траєкторії розвитку тріщини

Вважаючи далі, що тріщина подовжиться вздовж отриманого напрямку на відрізок Δl , одержимо точку 1, що несуттєво відхилилася від дійсної траєкторії, оскільки приріст відбувся не по дійсній траєкторії, а по дотичній до неї. Обчислюючи для нової точки K_I і K_{II} , визначимо новий кут θ_2 (9), що поверне траєкторію так, щоб наблизити її до дійсної. Повторюючи дану операцію n разів, одержимо ламану траєкторію розвитку тріщини, що є характерною рисою всіх покерованих (диференціальних) методів її

розрахунку [9]. Згладжування цієї ламаної для одержання дійсної траєкторії можна робити на кожному кроці просування, але при застосуванні МСЕ це вимагає значних додаткових обчислень, пов'язаних з перебудовою сітки. Більш раціональним є метод, при якому спочатку одержана ламана траєкторія апроксимується кривою, що проведена через центри відрізків ламаної. Оскільки отримана траєкторія має вид ламаної лінії, то після її вирівнювання варто провести K -тарування (обчислення значень КІН уздовж траєкторії тріщини).

Для моделювання тріщин використовуються спеціальні скінченні елементи (СЕ) з тріщиною, які не сприймають нормальних і дотичних напружень в площині тріщини, що досягається шляхом відповідної корекції тензору пружних констант матеріалу [5]. Використання для апроксимації тріщини спеціальних СЕ дозволяє задавати тріщину незалежно від скінченноелементної сітки, а при розв'язанні задачі про тріщину, що розвивається, дає можливість уникнути порушення регулярності структури сіткової області, зміни числа ступенів вільності дискретної моделі і перебудови СЕ сітки на кожному кроці просування тріщини.

Відповідно до критерію локального руйнування, запропонованому Ердоганом і Сі, розвиток тріщини при несиметричному навантаженні відбувається в напрямку, перпендикулярному дії максимальних розтяжних напружень. Для плоскої тріщини формула (4) має вигляд

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right],$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} \cos \theta]. \quad (10)$$

Отже, напрямок поширення тріщини можна одержати з умови $\partial \sigma_\theta / \partial \theta = 0$ або $\tau_{r\theta} = 0$. Це приводить до рівняння для визначення θ_i :

$$K_I \sin \theta_i + K_{II} (3 \cos \theta_i - 1) = 0, \quad (11)$$

звідки отримаємо

$$\theta_i = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{4\lambda} \right),$$

де
$$\lambda = \frac{K_{II}}{K_I}. \quad (12)$$

Для обчислення K_I і K_{II} можуть бути використані прямі і енергетичні методи. Прямі методи ґрунтуються на обчисленні КІН за результатами визначення напружено-деформованого стану в околі тріщини за формулами, що можуть бути отримані з (4) [1]. Енергетичні методи базуються на критерії руйнування Гріфїтса, згідно до якого тріщина зростатиме лише у випадку, коли звільнювана енергія буде достатньою для забезпечення всіх витрат, пов'язаних з цим зростанням. Величина звільнюваної енергії визначається за формулою $G = -\frac{dW}{dF}$, де W – потенційна енергія тіла, F – площа поверхні тріщини. При розв'язанні просторових задач механіки дискретного руйнування величина G може бути подана сумою трьох складників, що відповідають різним типам розкриття у вершині тріщини:

$$G = G_I + G_{II} + G_{III}; \quad G_k = \frac{(1 - \nu^2) K_k^2}{E}. \quad (7)$$

Використання для апроксимації тріщин спеціальних СЕ дозволяє реалізувати методіку роздільного обчислення КІН, засновану на припущенні, що розвиток тріщини в загальному випадку відбувається шляхом порушення по її поверхні трьох типів в'язів, що відповідають трьом незалежним типам руйнування. Отже, можна ввести три поверхні тріщини F_I , F_{II} і F_{III} , на яких порушуються в'язі, що перешкоджають кожному з типів руйнування. Тоді збільшення енергії при просуванні тріщини подається виразом

$$dW = \frac{\partial W}{\partial F_I} dF_I + \frac{\partial W}{\partial F_{II}} dF_{II} + \frac{\partial W}{\partial F_{III}} dF_{III}, \quad (8)$$

де перший доданок – збільшення енергії тільки за рахунок порушення зв'язків, що перешкоджають розриву, другий – поперечному і третій – подовж-

ньому зсуву. Величини похідних у (8) характеризують інтенсивність виділення енергії по кожному типу руйнування:

Отже, величини K_I , K_{II} і K_{III} можна обчислити окремо, варіюючи незалежно поверхнями F_I , F_{II} і F_{III} . Цей підхід легко здійснити на основі спеціальних СЕ, задовольняючи по черзі умовам дорівнювання нулю нормальних і дотичних напружень в місцевих системах координат тріщини. Орієнтація тріщини при цьому може бути довільною стосовно ліній сіткової області, що апроксимує поперечний переріз тіла.

Для обґрунтування вірогідності результатів, одержуваних на основі розробленого підходу, розв'язано контрольну задачу про розвиток початкової тріщини.

Розглянемо задачу про визначення траєкторії похилої тріщини в прямокутній пластині (рис. 2).

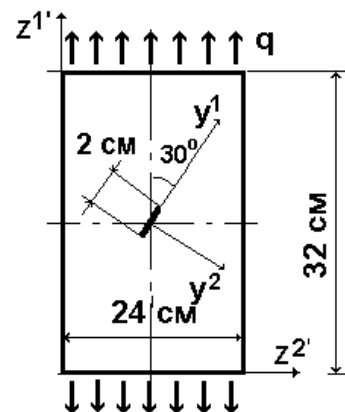


Рис. 2. Пластина з похилою тріщиною

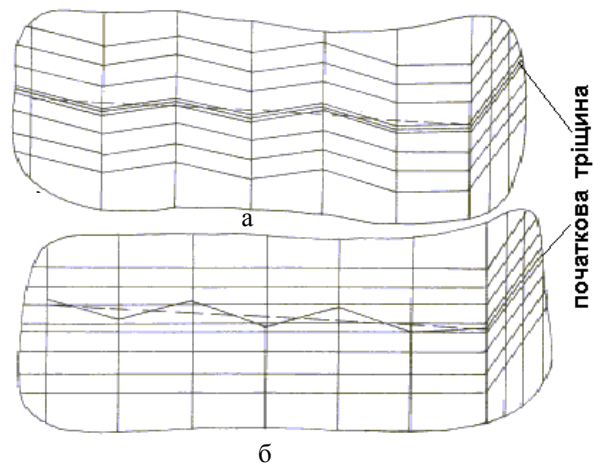


Рис. 3. Траєкторія розвитку тріщини

Спочатку досліджено можливість визначення траєкторії тріщини при сітці СЕ, що збігається (рис. 3, а) і не збігається (рис. 3, б) з траєкторією тріщини. Розміри сіткової області в обох випадках були однакові. На рис. 3, б наведено сітку СЕ, яка у процесі визначення траєкторії від кроку до кроку перебудовувалася, і такий вигляд вона набула на останньому кроці. Проводячи лінію через центри відрізків отриманої ламаної лінії, знаходимо траєкторію розвитку тріщини, яку на рис. 3, б подано пунктирною лінією. Згущення сітки СЕ і зменшення кроку подовження тріщини у два рази не привело до зміни траєкторії тріщини, що свідчить про збіжність результату розрахунку. Так само було розраховано траєкторію тріщини і при незбіжній з нею сітці СЕ. Сіткова область, приведена на рис. 3, б, не змінювалась в процесі розрахунку. Проведені дослідження збіжності довели вірогідність отриманої траєкторії.

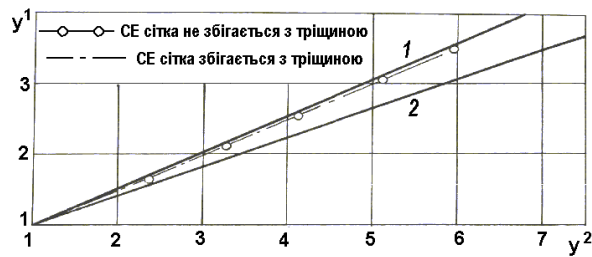


Рис. 4. Порівняння результатів визначення траєкторії тріщини з еталонними даними

На рис. 4 наведено траєкторії розвитку похилої тріщини в розтягнутій пластині, які отримані в роботі [9] (суцільна лінія 1), експериментально – в роботі [4] (суцільна лінія 2), при сітці СЕ, що збігається (штрихпунктирна лінія) і не збігається (кружечками) з траєкторією тріщини. Використана система координат y^j пов'язана з центром початкової тріщини. Отримані результати дають можливість зробити висновок про те, що траєкторії тріщини, отримані при однакових розмірах сіткової області, що збігається і не збігається з траєкторією тріщини, практично однакові і знаходяться в проміжку між експериментальними даними і результатами роботи [9].

4. Практичне застосування

Для ілюстрації можливостей практичного застосування розробленого підходу розв'язання задач континуального руйнування розглянемо задачу про деформування ялинкового з'єднання лопатки газової турбіни авіаційного газотурбінного двигуна (ГТД). Ялинкове з'єднання лопатки першого ступеня являє собою систему масивних призматичних тіл. Зовнішні впливи на з'єднання складаються з відцентрових та згинаючих зусиль, що впливають на лопатку, спільна дія яких спричиняє нерівномірне розподілене по площині S нормальне навантаження $q(z^3)$, та газових зусиль, що спричиняють дотичне навантаження q_r (рис. 5).

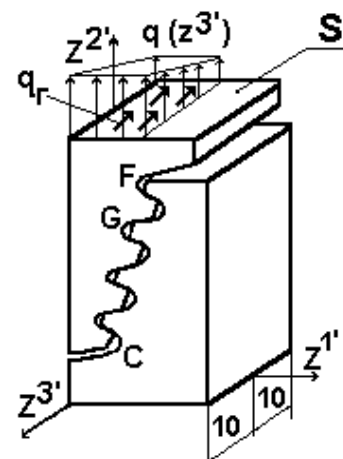


Рис. 5. Ялинкове з'єднання лопатки авіаційного ГТД

На основі проведених досліджень збіжності за кількістю невідомих у поперечному перетині обрано розрахункову скінченноелементну модель з 544 вузлів. При розгляді пружного деформування деталі з'ясовано, що максимальні напруження виникають на верхніх галтелях хвостовика і в пазах обода диска. При розв'язанні задачі з урахуванням повзучості проведено дослідження впливу урахування зовнішніх зусиль на розрахунковий ресурс деталі. Розглянуто три випадки навантаження: рівномірно розподілене по поверхні хвостовика розтяжне навантаження $q(z^3 = 0) = 160 \text{ МН/м}^2$, що відповідає дії від-

центрових сил пера лопатки без урахування згину; нерівномірне розподілення розтяжного навантаження $q(z^3)$, $q_{\max} \approx 1.1q(z^3 = 0)$; сумісна дія нерівномірно розподіленого розтягуючого $q(z^3)$ і дотичного до поверхні хвостовика навантаження $q_r \approx 0.1q(z^3 = 0)$. Розрахунковий ресурс деталі у випадку $q(z^3 = 0) = 160 \text{ МН/м}^2$ складає 1560 год. Розподілення пошкодженості у поперечному перетині деталі в момент часу, попередній до початку руйнування, свідчить, що руйнування починається на верхніх галтелях хвостовика (у точках F і G). При впливі нерівномірно розподіленого навантаження $q(z^3)$ та сумісній дії навантажень $q(z^3)$ і q_r якісна картина розподілення напружень і пошкодженості у поперечному перетині не змінюється, але отримані величини ресурсу становлять відповідно 1220 і 1130 год. Таким чином, урахування сумісної дії всіх перелічених навантажень зменшує розрахунковий ресурс деталі майже на 30% порівняно із результатами традиційного розрахунку, що враховує лише розтяжне навантаження відцентрових сил лопатки. При цьому напружено-деформований стан з'єднання є суттєво просторовим, про що свідчать отримані розподілення пошкодженості матеріалу в характерних точках поперечного перетину за напрямком z^3 (рис. 6): значення параметра пошкодженості в точках поперечного перетину для перерізу $z^3 = 10 \text{ мм}$, що відповідає q_{\max} , перевищують значення ω в перетинах $z^3 = -10 \text{ мм}$, що відповідає q_{\min} , в 2 – 2,5 рази, в той час як відхилення прикладеного навантаження від середнього значення становить $\sim 10\%$. Крім того, розподілення пошкодженості за напрямком z^3 , на відміну від прикладеного зовнішнього навантаження є нелінійним.

Як приклад розв'язання задач механіки дискретного руйнування розглянемо визначення траєкторії зростання тріщини у колесі вентилятора. Розрахункова схема фрагмента колеса з одним із варіантів скінченноелементної сітки наведено на рис. 7. Колесо навантажене масовим відцентровим зусиллям і

рівномірно розподіленим по ділянці CD навантаженням, що зумовлене відцентровими зусиллями лопаток.

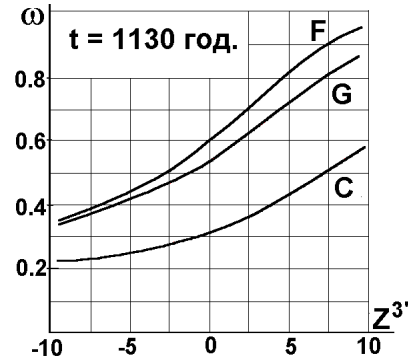


Рис. 6. Розподілення пошкодженості в небезпечних точках ялинкового з'єднання

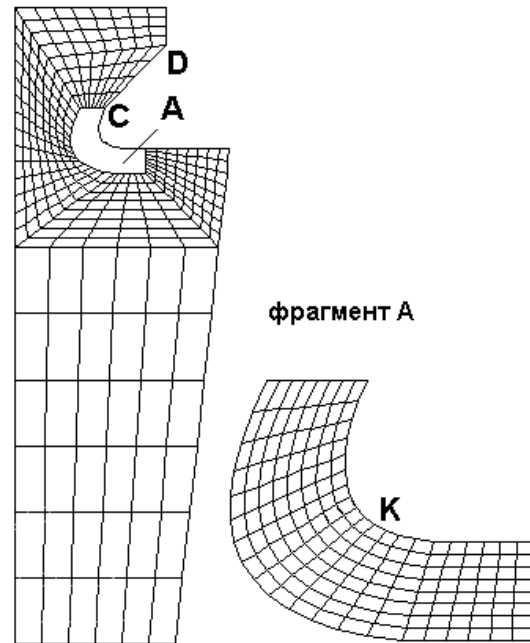


Рис. 7. Дискретна модель колеса вентилятора

На першому етапі було проведено дослідження характеру напружено-деформованого стану об'єкта. Результати розрахунку наведено на рис. 8 у вигляді ізоліній головних напружень у верхній частині колеса. Аналіз результатів дозволив виявити зону максимальних головних напружень в околі перехідної галтелі. У зв'язку з цим розташування початкової тріщини було задано в області точки K за нормаллю до поверхні галтелі.

В подальшому на основі описаного вище алгоритму було визначено траєкторію тріщини, яка наве-

дена на рис. 9. Даний результат є визначним для подальшого обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень і визначення ресурсу.

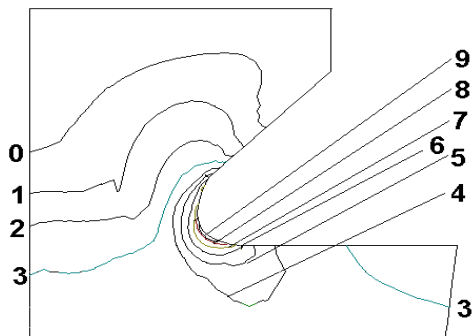


Рис. 8. Ізолії головних напружень в околі галтелі колеса вентилятора:

0 – 17.25 МПа, 1 – 37.5 МПа, 2 – 57.71 МПа,
3 – 77.95 МПа, 4 – 98.18 МПа, 5 – 118.4 МПа,
6 – 138.6 МПа, 7 – 158.9 МПа, 8 – 179.1 МПа,
9 – 199.3 МПа

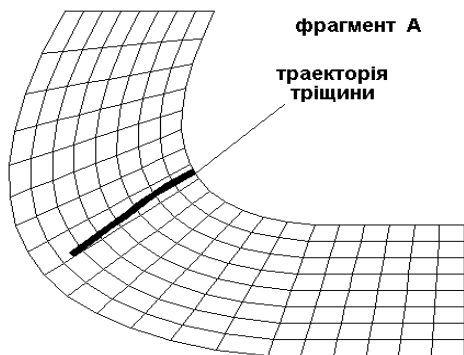


Рис. 9. Траєкторія тріщини в колесі вентилятора

Висновки

Розроблена методика розв'язання задач континуального і дискретного руйнування дозволяє визначати розташування зон континуального руйнування і траєкторію магістральних тріщин в просторових елементах конструкцій. Наведені результати розв'язання прикладних задач свідчать про високу ефективність розробленої методики стосовно до елементів конструкцій авіаційних двигунів.

Література

1. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О. Чисельне моделювання нелінійного деформування, континуального і дискретного руйнування методом скінченних елементів // Технологические системы. –

2002. – № 2. – С. 30 – 33.

2. Анализ сходимости и достоверности решения задачи вязкоупругости полуаналитическим методом конечных элементов / В.А. Баженов, А.И. Гуляр, Е.Е. Майборода, С.О. Пискунов // Проблемы машиностроения. – 1998. – № 3–4. – С. 97 – 101.

3. Голуб В.П., Романов А.В. О кинетике повреждения изотропных материалов в условиях ползучести // Прикладная механика – 1989. – № 12. – С. 107 – 115.

4. Иида С., Кобаяси А. Скорость распространения трещин в пластинах из сплава 7075-T6 при циклическом растяжении и поперечном сдвиге. // Тр. амер. об-ва инж.-мех. – Сер. Д. – 1969. – № 4. – С. 210 – 214.

5. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.

6. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел / В.А. Баженов, А.И. Гуляр, А.С. Сахаров, А.Г. Топор. – К.: НИИ СМ, 1993. – 376 с.

7. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 732 с.

8. Райс Дж. Р. Математические методы в механике разрушения // Разрушение. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – С. 205 – 335.

9. Саврук М.П., Осив П.Н. О расчете статической траектории распространения трещин // Проблемы прочности. – 1982. – № 11. – С. 19 – 23.

Надійшла до редакції 12.05.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.С. Городецький, Науково-дослідний інститут автоматизованих систем в будівництві, м. Київ