УДК 623. 021: 005

В.Б. КОНОНОВ

Харьковский военный университет, Украина

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РАЗНОРОДНЫХ СИЛ И СРЕДСТВ СТОРОН ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕВЗВЕШЕНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СУММАРНОГО КОЛИЧЕСТВА ОСНОВНЫХ СИЛ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩЕЙ СТОРОНЫ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В статье рассматривается формулировка задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определенности при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

разнородные силы и средства, критерий минимума средневзвешенного математического ожидания

Введение

Постановка задачи. При решении задач планирования в конфликтных ситуациях необходимо определить законы оптимального управления распределением разнородных сил и средств, имеющихся у оперирующей стороны, исходя при этом от поставленных целей, складывающейся ситуации и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств, а также управление распределением сил и средств резерва в условиях современной конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооруженных Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств оперирующих сторон рассматривались в работах [1 – 5]. Так, в [1] сформулирована задача исследования и определены критерии оптимального распределения сил и средств оперирующей стороны в динамических процессах конфликтных ситуаций. В [2] рассмотрен метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. В [3] рассмотрена методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств. В [4] изложена методика решения задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммарного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. Однако в этих работах не рассматривалось оптимальное управление распределением разнородных сил и средств сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определенности при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

Цель статьи. Целью статью является формулировка задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определенности при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

1. Анализ существующих моделей

Рассмотренные в [1 – 5] математические модели оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующей стороны не учитывают относительную важность разнородных сил противника, так как в предлагаемых критериях:

– минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конце конфликтной ситуации

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_1} y_j(T);$$

– максимума среднего суммарного количества основных сил оперирующей стороны в конце конфликтной ситуации

$$\max_{\{\alpha\}} \sum_{i=1}^{m_1} x_i(T);$$

– минимума среднего суммарного количества основных сил противника за весь период конфликтной ситуации

$$\min_{\{\alpha\}} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=1}^{n_1} y_j(t)\,dt;$$

– максимума среднего суммарного количества основных сил противника за весь период конфликтной ситуации

$$\max_{\{\alpha\}} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{m_1} x_i(t)\,dt$$

основные силы как противника, так и оперирующей стороны имеют одинаковые веса.

В предложенных критериях:

$x_i(t),\ y_j(t)$ – математические ожидания количества боевых средств сторонами А и В, сохранившихся к моменту времени t;

$x_i(T), y_j(T)$ – математические ожидания количества боевых средств сторонами А и В, сохранившихся к моменту времени Т;

$n_1,\ m_1$ – количество типов основных средств сторон В и А соответственно;

m, n – количество типов сил и средств сторон А и В соответственно;

t – промежуточное время конфликтной ситуации;

Т – заданное время конфликтной ситуации;

$\alpha = \left\|\alpha_{ji}\right\|_{n,m}$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны А по силам и средствам стороны В.

Кроме того, управляющие параметры $\alpha = \left\|\alpha_{ji}\right\|_{n,m}$ предполагается неизменными в ходе конфликтной ситуации, что исключает возможные маневры сил и средств, а также их перенацелевания на другие типы сил и средств противника.

2. Обобщение рассмотренных моделей

Существенным обобщением рассмотренных моделей является задача оптимального распределения разнородных сил и средств стороны А, в которой сторона А стремится выбрать свои управляющие параметры $\alpha = \left\|\alpha_{ji}\right\|_{n,m}$ таким образом, чтобы к концу боя средневзвешенное количество основных сил стороны В было минимальным при известной стратегии распределения сил и средств стороны В.

Математическая модель данной задачи имеет вид:

$$\min_{\{\alpha\}} \sum_{j=1}^{n_1} w_j y_j(T); \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} = 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{ji} \ge 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{3}$$

где $w_j \left(j = \overline{1, n_1}\right)$ – коэффициент важности основного средства j-го типа стороны B;

$\beta_{ij} \left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right)$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны B;

$\alpha_{ji} \left(j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \le t \le T\right)$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны A по силам и средствам стороны B;

$x_i^0, y_j^0 \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ – количество сил и средств i-го типа стороны A и j-го типа стороны B в начале конфликтной ситуации;

$\alpha_{ji}, \beta_{ij} \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ – эффективные скорострельности средств i-го типа стороны A и j-го типа стороны B соответственно.

Это задача оптимального управления с терминальным функционалом, закрепленным временем и свободным правым концом.

Функция Гамильтона-Понтрягина для задачи (1) – (3) имеет вид:

$$H(x, y, \varphi, \eta, \alpha) = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t) + \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t)\right]. \tag{4}$$

Соответствующую систему представим следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_i(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(x, y, \varphi, \eta, \alpha)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{d\eta_j(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(x, y, \varphi, \eta, \alpha)}{\partial y_j}, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{d\eta_j(t)}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t) \varphi_i(t), \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5}$$

Для решения задачи (1) – (3) воспользуемся принципом максимума Понтрягина:

если $\left\{x^*(t), y^*(t), \alpha^*(t), t \in [0, T]\right\}$ – решение задачи (1) – (3), то существует непрерывные вектор-функции

$$\varphi(t) = \left[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t)\right];$$

$$\eta(t) = \left[\eta_1(t), \eta_2(t), \cdots, \eta_n(t)\right],$$

и постоянная φ_0 такие, что

$$\varphi_0 \ge 0, \quad \left|\varphi_0\right| + \left\|\varphi(t)\right\| + \left\|\eta(t)\right\| \ne 0, \quad t \in [0, T];$$

1) $\{\varphi(t), \eta(t)\}$ является решением сопряженной системы (5), соответствующее рассматриваемому решению;

2) при каждом $t \in [0, T]$ функция $H\left(x(t), y(t), \varphi(t), \eta(t), \alpha\right)$ переменной α достигает своей верхней грани на множестве D, которое задается ограничениями (3);

3) на правом конце выполняется условие трансверсальности

$$\varphi(T) = \varphi_0 \nabla_x \Phi(y(T)) = [0, 0, \cdots, 0]';$$

$$\eta(T)=\varphi_0 \nabla_y \Phi(y(T))=$$
$$=\left[\varphi_0 w_1, \varphi_0 w_2, \cdots, \varphi_0 w_{n_1}, 0, 0, \cdots, 0\right]',$$

где

$$\Phi(y(T))=\sum_{j=1}^{n_1} w_j y_j(T);$$

$$\eta_j(T)=\varphi_0 w_j, \quad j=\overline{1, n_1};$$
$$\eta_j(T)=0, \quad j=\overline{n_1+1, n}.$$

Константа $\varphi_0 \neq 0$, так как если $\varphi_0 = 0$, то система (5) при нулевых условиях на правом конце имеет лишь нулевое решение:

$$\varphi(t)\equiv 0; \quad \eta(t)\equiv 0 ,$$

что противоречит пункту 1 условий оптимальности. Поэтому, можно считать $\varphi_0 = -1$, а условия трансверсальности примут вид

$$\begin{cases} \varphi_i(T)=0, \quad i=\overline{1, m}; \\ \eta_j(T)=-w_j, \quad j=\overline{1, n_1}; \\ \eta_j(T)=0, \quad j=\overline{n_1+1, n}. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом требуется найти аналитическое решение задачи

$$\max_{\alpha\in D}\left\{-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\beta_{ij} b_{ij} y_j(t)\varphi_i(t)+\alpha_{ji} a_{ji} x_i(t)\eta_j(t)\right]\right\}.$$

Заключение

1. В статье сформулирована задача оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определенности при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны А.

2. Использование метода условного градиента для решения данной задачи в процессе конфликтной ситуации при изменившихся начальных условиях проблематично. Требуется определить достаточно простой и “быстродействующий” алгоритм решения данной задачи.

Литература

1. Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: ХВФ «Транспорт України». – 2001. – Вип. 1(11). – С. 129 – 133.

2. Кононов В.Б. Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2(18). – С. 155 – 158.

3. Кононов В.Б., Рафальский Ю.И., Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5(21). – С. 45 – 47.

4. Кононов В.Б., Нестеренко А.П., Кожушко Я.Н. Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2002. – Вип. 6(22). – С. 277 – 280.

5. Кононов В.Б. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ, 2002. – Вип. 1. – С. 59 – 62.

Поступила в редакцию 1.06.2004

Рецензент: д-р техн. наук, доц. А.В. Гайдачук, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.