УДК 629.7:534.1

И.Г. НЕМАН

Харьковский авиационный институт, Украина

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С НАКЛОННЫМИ ГЛАВНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ УПРУГОСТИ. ЧАСТЬ 1. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ СЖАТИИ

Изложен общий теоретический подход автора и приближенный метод определения критических усилий в бесконечно длинной ортотропной пластине с наклонными главными направлениями осей упругости относительно действующих усилий. Дана реализация метода для частного случая пластины при одностороннем сжатии. Результаты получены автором до 1946 года и ранее не публиковались.

устойчивость, бесконечно длинная ортотропная пластина с наклонными главными осями упругости, одностороннее сжатие.

Введение

В самолетостроении применяется большое количество деревянных конструкций с фанерной обшивкой, наборные панели обшивок крыльев и фюзеляжа, обшивки из пластифицированной древесины и др.

В металлических конструкциях широко применяются обшивки со стрингерами или с гофровым подкреплением.

Такого же типа панели встречаются в кораблестроении и в гражданских сооружениях.

Все эти конструкции либо ортотропные по материалу (фанера, большинство пластиков), либо ортотропные по структуре. Для наиболее рационального использования материала в сооружении, необходимо знать работу ортотропных пластин с любым образом ориентированными относительно линии заделки главными направлениями упругости.

Физико-механические свойства ортотропной пластины меняются с поворотом главного направления упругости относительно краев пластин. Для правильного выбора наивыгоднейшего угла наклона главного направления необходимо теоретическое изучение поведения таких пластин.

В литературе решены достаточно полно только задачи с нормально ориентированными главными направлениями. Все эти решения можно найти в книгах [1 – 2], в которых автор собрал все решенные задачи по устойчивости ортотропных пластин и добавил свои решения.

Для наклонных направлений в этой книге, в учебниках и в справочной литературе приведена только одна, решенная приближенным методом, задача – устойчивости бесконечно длинной фанерной пластинки с наклоном волокон рубашки под углами в 45 и 135°, нагруженной касательной нагрузкой.

Насколько нам известно, опубликована только одна статья Л.И. Балабуха [3], в которой автор выводит теоретические формулы расчета свободно опертых бесконечно длинных ортотропных пластин с наклонными главными направлениями (приближенный метод).

При выбранной системе координат, привязанной к сторонам пластины, автор получил систему трех формул, по которым он численным способом получил для фанерной пластины с наклоном рубашки под углом 45° кривую коэффициентов устойчивости совместного действия продольного сжатия – Kq

со сдвигом Kt. Получил он замечательный результат – повышение Kq совместного действия по отношению к Kq изолированного действия.

К сожалению, эта часть работы прошла без внимания почти во всей дальнейшей литературе. Результаты, полученные Л.И. Балабухом, приведены только в книгах С.Г. Лехницкого [1 – 2], где этой работе уделяется полстраницы и в «Руководстве для конструкторов» [4], где приведена упомянутая кривая Kq совместного действия.

В учебной литературе нигде об эффекте повышения Kq совместного действия не упоминается.

Хотя за границей строится много самолетов из дерева, древесных и других пластиков, по-видимому, там не знают работы Л.И. Балабуха и не знают об отличном поведении ортотропных пластин с наклоном главного направления.

Так, в статье по устойчивости фанерных пластин [5] автор пишет: «Случай совместного действия сдвига и сжатия также привлек внимание (исследователей), но простые решения не найдены. Для изотропных пластин существует формула

$$\left(\frac{Kqc}{Kqиз}\right)^2 = 1 - \frac{Ktc}{Ktиз},$$

и это, вероятно, хорошее первое приближение для анизотропных пластин».

Инженеры в своей практической работе и пользуются последним соотношением. Расхождение экспериментов с подсчитанными данными исключительно велико и выходит далеко за пределы допустимых инженерных ошибок.

Данная работа была нами начата в связи с большими расхождениями, получившимися при сравнении результатов статиспытаний с расчетами крыла одного самолета с деревянной обшивкой, поставленной под углом 45°. При испытаниях волнообразование получилось при нагрузке на 200% больше расчетной. Произошло это в 1942 году.

Объяснить это явление можно было бы на основании графика, приведенного в статье Л.И. Балабуха [3].

Этот случай заставил нас заняться теоретическим исследованием.

Вначале мы попытались вывести общие формулы влияния наклона главного направления из дифференциального уравнения, выраженного в системе координат, привязанной к сторонам пластины. Так принято во всей литературе и рекомендуется С.Г. Лехницким в [1]. Формулы получились, как мы впоследствии сверили, такими же, как их получил Л.И. Балабух. Анализировать по ним поведение пластины затруднительно.

Поэтому мы решили оси координат связать с главными направлениями упругости. Этот прием упростил формулы и сильно облегчил их анализ в общем виде.

Дифференциальное уравнение равновесия сохраняет свою каноническую форму.

В приближенном методе, которым вначале решается свободно опертая пластина, мы выражаем граничные условия в этих же координатах.

Удалось привести функцию нагрузки к довольно простому выражению, что дало возможность провести полный анализ зависимости критической нагрузки от выбранного наклона главного направления.

§1. Общетеоретическая часть

Условие равновесия ортотропной пластины, нагруженной в своей плоскости, выражается следующим известным уравнением [1]:

$$\begin{aligned} &D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ &= q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2q_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

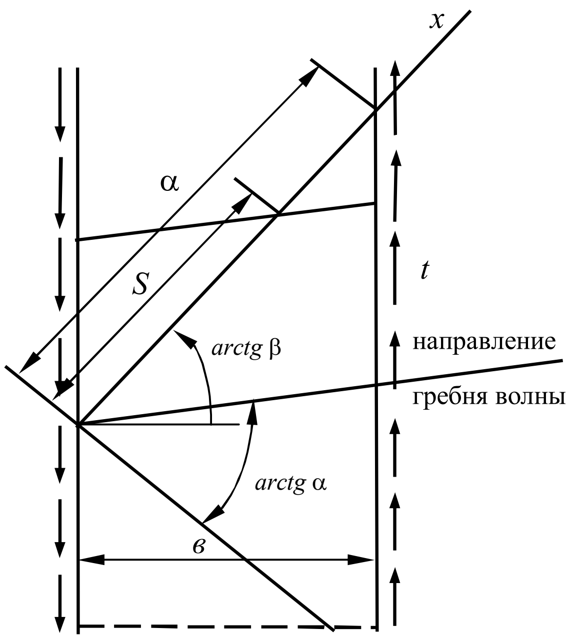
где x и y – главные направления упругости; q_x и q_y – сжимающие погонные нагрузки, параллельные осям x и у; q_t – погонная касательная нагрузка.

При рассмотрении устойчивости пластины направляем оси координат вдоль главных направлений упругости, а форме равновесия удовлетворяем, подобрав для w выражение, удовлетворяющее краевым условиям в выбранных координатах.

Бесконечно длинная пластина с наклонно ориентированным главным направлением под влиянием любой нагрузки: нормальной, касательной или их комбинации – теряет устойчивость с образованием наклонной волны к направлению действия силы и, в общем случае, также и к главному направлению упругости.

Форма волны получается сложной, но с достаточной степенью точности можно предположить, как это сделал для изотропной пластины Тимошенко, что гребень волны идет по прямой линии.

Поэтому форму волны, получающейся при потере устойчивости, выражаем уравнением (рис. 1):



$$W = A \sin \frac{\pi(x+\beta y)}{a} \cdot \sin \frac{\pi(x-\alpha y)}{S}, \qquad (2)$$

Рис. 1. Бесконечно длинная ортотропная пластина под действием нагрузок q и t

где β – тангенс угла наклона главного направления «Х» к поперечному размеру пластины; α – тангенс угла наклона гребня волны к оси «У»; a – отрезок оси Х, заключенный между сторонами пластины; S – отрезок оси Х, заключенный между гребнями двух соседних полуволн.

Членом $sin\,\dfrac{\pi(x+\beta y)}{a}$ обеспечивается граничное условие $W=0$ на продольных сторонах пластины.

Граничное условие $M=0$ не обеспечено.

Выразим q_x, q_y и q_t, зависящие от q и t – погонных нагрузок сжатия и сдвига, действующих на контуре пластины, через β:

$$q_x = -q\frac{\beta^2}{1+\beta^2} + t\frac{2\beta}{1+\beta^2};$$

$$q_y = -q\frac{1^2}{1+\beta^2} - t\frac{2\beta}{1+\beta^2}; \qquad (3)$$

$$q_t = q\frac{\beta}{1+\beta^2} - t\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}.$$

Вставив выражения (2) и (3) и уравнение (1), получим:

$$\pi^4 \Bigg\{D_x\left[\frac{1}{a^4}+\frac{6}{a^2s^2}+\frac{1}{s^4}\right]+$$
$$+2\,D_{xy}\left[\frac{\beta^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{a^2s^2}-\frac{4\beta\alpha}{a^2s^2}+\frac{a^2}{a^2s^2}+\frac{a^2}{s^4}\right]+$$
$$+D_y\left[\frac{\beta^4}{a^4}+\frac{6\alpha^2\beta^2}{a^2s^2}+\frac{\alpha^4}{s^4}\right]\Bigg\}\times$$
$$\times \sin\frac{\pi(x+\beta y)}{a}\sin\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}-$$
$$-\pi^4\left\{D_x\left[\frac{4}{a^3s}+\frac{4}{as^3}\right]+\right.$$
$$+2D_{xy}\left[\frac{2\beta^2}{a^3s}-\frac{2\beta\alpha}{a^3s}-\frac{2\beta\alpha}{as^3}+\frac{2\alpha^2}{as^3}\right]+$$

$$+D_y\left[\frac{4\beta^3\alpha}{a^3 s}+\frac{4\beta\alpha^3}{as^3}\right]\Bigg\}\times$$

$$\times\cos\frac{\pi(x+\beta y)}{a}\cos\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}=$$

$$=\frac{\pi^2}{1+\beta^2}\left[q\frac{(\beta+\alpha)^2}{s^2}+t^2\,\frac{2(\beta+\alpha)(\beta\alpha-1)}{s^2}\right]\times$$

$$\times\sin\frac{\pi(x+\beta y)}{a}\sin\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}+$$

$$+\frac{\pi^2}{1+\beta^2}t\frac{2\beta(1+\beta\alpha)}{as}\cos\frac{\pi(x+\beta y)}{a}\times$$

$$\times\cos\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}. \quad (4)$$

Умножив уравнение (4) на

$$\sin\frac{\pi(x+\beta y)}{a}\sin\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}$$

и произведя двойное интегрирование сперва по $(x+\beta y)$ от 0 до a, потом по $(x-\alpha y)$ от 0 до s, учтем, что

$$\int_0^a\int_0^s\sin^2\frac{\pi(x+\beta y)}{a}\sin^2\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}\times$$

$$\times d(x+\beta y)d(x-\alpha y)=\frac{as}{4},$$

$$\int_0^a\int_0^s\sin\frac{\pi(x+\beta y)}{a}\cos\frac{\pi(x+\beta y)}{a}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}\cos\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}\times$$

$$\times d(x+\beta y)d(x-\alpha y)=0.$$

Вынесем в левой части множитель $\frac{1}{a^2s^2}$, в правой части – множитель $\frac{1}{s^2}$. Сократим обе части уравнения на $\frac{\pi^2}{s^2}$. Примем $\left(\frac{a}{s}\right)^2=\gamma$. Учтя, что $a^2=в^2\left(1+\beta^2\right)$, $в$ – ширина рассматриваемой пластины, получим уравнение (4) в следующем виде:

$$\frac{\pi^2 D_x}{в^2}\left[\frac{1}{\gamma}+6+\gamma+\frac{2D_{xy}}{D_x}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\beta^2}{\gamma}+\beta^2-4\beta\alpha+\alpha^2+\gamma\alpha^2\right)+$$

$$\left.+\frac{D_y}{D_x}\left(\frac{\beta^4}{\gamma}+6\beta^2\alpha^2+\gamma\alpha^4\right)\right]= \quad (5)$$

$$=q(\beta+\alpha)^2+t2(\beta+\alpha)(\beta\alpha-1).$$

Здесь D_x – максимальная жесткость, направленная вдоль оси x; D_y – минимальная жесткость, направленная вдоль оси y;

$$2D_{xy}=2D_к+\mu_x D_y+\mu_y D_x,$$

где $D_к$ – жесткость кручения.

В дальнейшем будем принимать:

$$2\frac{D_{xy}}{D_x}=S \quad \text{и} \quad 2\frac{D_y}{D_x}=T.$$

При выбранном главном направлении β критическая нагрузка q или t. В случае совместно действующих сжимающих и касательных нагрузок принимаем $t_c=mq_c$, где $m=const$ является функцией двух независимых переменных γ и α. Последние определяются из уравнений:

$$\frac{\partial q}{\partial\gamma}=0; \qquad \frac{\partial q}{\partial\alpha}=0$$

(при анализе изолированно действующей касательной нагрузки вместо q пишем t).

Первое уравнение одинаковое для всех случаев нагружения и дает следующее выражение:

$$\gamma^2=\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}.$$

Подставим это значение γ в уравнение (5), получим:

$$q(\beta+\alpha)^2+2t(\beta+\alpha)(\beta\alpha-1)=\frac{\pi^2 D_x}{в^2}\times$$

$$\times[2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)}+ \quad (6)$$

$$+6+s\beta^2+s\alpha^2-4s\beta\alpha+6T\beta^2\alpha].$$

Теперь внешняя нагрузка является функцией только β и α.

В дальнейшем будем принимать:

$$q_{\,крит.} = \frac{\pi^2 D_x}{в^2} K_q\,; \quad t_{\,крит.} = \frac{\pi^2 D_x}{в^2} K_t$$

и рассматривать только безразмерные коэффициенты K_q и K_t, и K_{qc} и K_{tc} в случае их совместного действия.

В этих безразмерных коэффициентах уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &Kq(\beta+\alpha)^2 + 2K_t(\beta+\alpha)(\beta\alpha-1) = \\ &= 2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)} + \\ &+ 6 + S\beta^2 - 4s\beta\alpha + s\alpha^2 + 6T\beta^2\alpha^2. \end{aligned} \tag{7}$$

§2. Предельные значения условных экстремумов функции двух переменных при одном произвольно фиксируемом

(*Геометрический смысл minimaxim΄a*)

Переменные α и β функции $f(\alpha,\beta)$, экстремумы которой ищем при произвольно фиксируемом β, должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = 0\,, \tag{8}$$

сами экстремумы зависят от β. Отсюда следует, что они могут иметь свои максимальные и минимальные значения.

Определим условия, которым должна удовлетворять функция $f(\alpha,\beta)$ при минимальном максимуме или максимальном минимуме $f(\alpha,\beta)$.

Определяются они знаком

$$\begin{aligned} d^2 f(\alpha,\beta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} d\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\cdot\partial\beta} d\alpha \times \\ &\times d\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} d\beta^2 = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где β – независимая переменная, а α – зависимая.

Из (8) имеем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} d\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\cdot\partial\beta} d\beta = 0$$

или

$$d\alpha = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}} d\beta\,.$$

Заменим $d\alpha$ через $d\beta$ в уравнении (9). Получим:

$$\frac{d^2 f}{d\beta^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}}\,. \tag{10}$$

Минимумы $f(\alpha,\beta)$ при произвольно фиксируемом β имеем при $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} > 0$, соответственные максимумы – при $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} < 0$.

Максимальный минимум требует $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} < 0$, а, соответственно, минимальный максимум требует $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} > 0$. Из выражения (10) видим, что оба эти условия выполняются при

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\cdot\partial\beta}\right)^2 < 0\,. \tag{11}$$

Найдем еще одно условие, которому должна удовлетворять функция $f(\alpha,\beta)$ при minimaxim΄ax.

Согласно способу множителей Лангранжа можем записать

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} = 0\,; \quad \frac{\partial f}{\partial\beta} + \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\cdot\partial\beta} = 0\,.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\cdot\partial\beta}}\,, \tag{12}$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\cdot\partial\beta}$ имеет значение отличное от нуля, ибо в противном случае $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ и $f(\alpha,\beta)$ были бы линейными функциями от β.

Левая часть уравнения (12) имеет числитель, равный нулю, и знаменатель, отличный от нуля. Отсюда следует, что и $\dfrac{\partial f}{\partial\beta}=0$.

Формулируем следующее: максимальный минимум или минимальный максимум функции двух переменных, из которых одна произвольно фиксируемая, в отличие от абсолютного экстремума, определяется отрицательным значением дискриминанта.

§3. Сжатие

В случае изолированно действующего сжатия уравнение (7) представим в виде

$$Kq=\frac{2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)}}{(\beta+\alpha)^2}+ \\ +\frac{6+S\beta^2-4s\beta\alpha+s\alpha^2+6T\beta^2\alpha^2}{(\beta+\alpha)^2}. \tag{13}$$

Приравняем нулю первую производную по α:

$$\frac{\partial K_q}{\partial\alpha}=\frac{2}{(\beta+\alpha)^2}\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\times \\ \times\left(-2+S\beta\alpha-s\alpha^2+2T\beta\alpha^3\right)+ \\ +\frac{6}{(\beta+\alpha)^2}(-2+s\beta\alpha-s\beta^2++2T\beta^3\alpha)=0. \tag{14}$$

Для любого фиксированного наклона главного направления упругости находим α, вставив соответствующее β в уравнение (14). Определив α, находим $\dfrac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha^2}$ – уравнение (20) (см. ниже). Если оно положительно, то, вставив β и α в выражение (13), получаем коэффициент критической нагрузки сжатия – K_q.

Разным наклонам главного направления упругости соответствуют разные K_q. Для практических целей желательно знать весь диапазон изменений K_q, его максимальное и минимальное значения и соответствующие им направления главных осей. Назовем эти направления β-экстремум. Конструкторам выгодно пользоваться тем направлением, которое дает $K_{q\max}$. Назовем это направление β-оптимум.

Для нахождения β-экстремума добавляем к уравнению (14) уравнение

$$\frac{\partial K_q}{\partial\beta}=0. \tag{15}$$

Тогда

$$\frac{\partial K_q}{\partial\beta}=\frac{1}{(\beta+\alpha)^2}\sqrt{\frac{1+s\alpha^2+T\alpha^4}{1+s\beta^2+T\beta^4}}\times \\ \times\left(-2+S\beta\alpha-s\beta^2+2T\beta^3\alpha\right)+ \\ +\frac{3}{(\beta+\alpha)^2}\left(-2+s\beta\alpha-s\alpha^2+2T\beta\alpha^3\right)=0. \tag{16}$$

Ищем вещественные корни уравнений (14) и (16).

Их числители должны быть равны нулю.

Отсюда получаем два уравнения::

$$\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\left(-2+S\beta\alpha-s\alpha^2+2T\beta\alpha^3\right)= \\ =3\left(2-s\beta\alpha+s\beta^2-2T\beta^3\alpha\right); \tag{17}$$

$$\sqrt{\frac{1+s\alpha^2+T\alpha^4}{1+s\beta^2+T\beta^4}}\left(2-S\beta\alpha+s\beta^2-2T\beta^3\alpha\right)= \\ =3\left(-2+s\beta\alpha-s\alpha^2+2T\beta\alpha^3\right). \tag{18}$$

Разделим левую часть уравнения (17) на правую (18), а правую (17) – на левую (18):

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}=3\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\,.$$

Данное равенство возможно при:

1) $\alpha=\infty$ и $\beta=a$ или $\beta=0$,

и при:

2) $\beta=\infty$ и $\alpha=a$ или $\alpha=0$.

Проверим, какие из этих случаев удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial K_q}{\partial\alpha}=\frac{\partial K_q}{\partial\beta}=0$$

и уравнениям (14) и (16).

В случае $\alpha=\infty$, $\beta=a$:

$$\frac{\partial K_q}{\partial\beta}=\sqrt{\frac{T}{1+sa^2+Ta^4}}\left(sa+2Ta^3\right)+6Ta\neq 0\,.$$

В случае $\beta=\infty$, $\alpha=a$:

$$\frac{\partial K_q}{\partial\alpha}=\sqrt{\frac{T}{1+sa^2+Ta^4}}\left(sa+2Ta^3\right)+6Ta\neq 0\,.$$

В случаях $\alpha=\infty$, $\beta=0$ и $\beta=\infty$, $\alpha=0$:

$$\frac{\partial K_q}{\partial\alpha}=\frac{\partial K_q}{\partial\beta}=0\,.$$

Разобрав случай, когда знаменатели уравнений (14) и (16) равны ∞, мы получили тот же результат.

Таким образом, остаются только два случая:

1) $\beta=\infty$, $\alpha=0$;

2) $\beta=0$, $\alpha=\infty$.

Проверим, какого рода эти экстремумы.

Определим значения вторых производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha^2}&=\frac{2}{(\beta+\alpha)^4}\left\{\left\{\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\times\right.\right.\\&\times\left\{\left[\frac{-s\alpha-2T\alpha^3}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}\left(-2+s\beta\alpha-s\alpha^2+2T\beta\alpha^3\right)+\right.\right.\\&\left.+s\beta-2s\alpha+6T\beta\alpha^2\right]-3(\beta+\alpha)\times\\&\left.\times\left(-2+s\beta\alpha-s\alpha^2+2T\beta\alpha^3\right)\right\}+\\&+3\left[\left(s\beta+2T\beta^3\right)(\beta+\alpha)-\right.\\&\left.\left.\left.-3\left(-2+s\beta\alpha-s\beta^2+2T\beta^3\alpha\right)\right]\right\}\right\}.\end{aligned}\tag{19}$$

$\dfrac{\partial^2 K_q}{\partial\beta^2}$ – такое же выражение, в котором β и α переставлены местами;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha\partial\beta}&=\frac{2}{(\beta+\alpha)^4}\times\\&\times\left\{\left[\left[\frac{\left(s\beta+2T\beta^3\right)\left(-2+s\beta\alpha-s\alpha^2+2T\beta\alpha^3\right)}{\sqrt{\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)}}+\right.\right.\right.\\&+\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\left(s\alpha+2T\alpha^3\right)+\\&\left.+3\left(s\alpha-2s\beta+6T\beta^2\alpha\right)\right](\beta+\alpha)-\\&-3\left[\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\times\right.\\&\times\left(-2+s\beta\alpha-s\alpha^2+2T\beta\alpha^3\right)-\\&\left.\left.\left.-3\left(-2+s\beta\alpha-s\beta^2+2T\beta^3\alpha\right)\right]\right]\right\}.\end{aligned}\tag{20}$$

При $\beta=0$ и $\alpha=\infty$ получаем:

$$\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha^2}=\frac{2}{\alpha^4}\left[\frac{3S-4T\beta\alpha}{\sqrt{T}}+18-6s\beta\alpha\right].$$

Для случая $\beta\to 0$, $\alpha\to\infty$ уравнение (17) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{\sqrt{T}\cdot\alpha^2}\left(-s\alpha^2+2T\beta\alpha\cdot\alpha^2\right)+$$
$$+3\left(-2+S\beta\alpha\right)=0.$$

Определив отсюда β через α, получаем:

$$\beta=\frac{1}{\alpha}\frac{s+6\sqrt{T}}{\left(2T+3s\sqrt{T}\right)}\,.$$

Вставим полученное выражение в уравнения (19) и (20):

$$\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha^2}=\frac{2\left(6+\dfrac{s}{\sqrt{T}}\right)}{\alpha^4}>0\,;$$

$$\frac{\partial^2 K_q}{\partial\beta^2}=2\left(s\sqrt{T}+6T\right);$$

$$\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{2}{\alpha^2}\left(2\sqrt{T}+3s\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2 K_q}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2=$$
$$=\frac{32}{\alpha^4}\left(2\sqrt{T}+s\right)\left(2\sqrt{T}-s\right).$$

Знак дискриминанта определяется вторым множителем или значением $s-2\sqrt{T}$.

При $s-2\sqrt{T}>0$ имеем отрицательное значение дискриминанта, тогда K_q – максимум.

При $s-2\sqrt{T}<0$ имеем положительное значение дискриминанта, тогда K_q – минимум.

Случай $\beta=\infty$, $\alpha=0$ дает те же результаты.

Определим K_q для этих значений β. Вставив $\beta=0$ и $\alpha=\infty$, или $\beta=\infty$ и $\alpha=0$ в уравнение (13), получим

$$K_{qн}=s+2\sqrt{T}=\frac{2D_{xy}}{D_x}+2\sqrt{\frac{D_y}{D_x}}, \tag{21}$$

где $K_{qн}$ обозначает критическую нагрузку сжатия при нормальных положениях главного направления упругости: вертикальном или горизонтальном. Это значение известно в литературе.

Определим остальные вещественные корни.

Перемножим уравнения (17) и (18). Предварительно перенесем рациональные слагаемые в правую сторону.

Получаем уравнение

$$\left(2-s\beta\alpha+s\beta^2-2T\beta^3\alpha\right)\times$$
$$\times\left(2-s\beta\alpha+s\alpha^2-2T\beta\alpha^3\right)=0.$$

Судя по уравнению (17) или (18), оба множителя одновременно должны быть равны нулю.

Они дают нам два уравнения для определения наших неизвестных α и β.

Взяв разность этих двух уравнений, получаем

$$\left(s-2T\beta\alpha\right)\left(\beta^2-\alpha^2\right)=0,$$

что дает три возможных связи между β и α:

$$\beta-\alpha=0;\quad \beta+\alpha=0;\quad s-2T\beta\alpha=0.$$

Выразим α через β и вставим в любое из этих двух уравнений. Приняв $\alpha=\beta$, получим

$$2-s\beta^2+s\beta^2-2T\beta^4=0.$$

Это выражение имеет два вещественных корня:

$$\beta=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{T}}. \tag{22}$$

Приняв $\alpha=-\beta$, получим

$$2+s\beta^2+s\beta^2+2T\beta^4=0.$$

Все корни мнимые.

Множитель $\left(s-2T\beta\alpha\right)$ корней не дает.

Таким образом, остается

$$\beta=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{T}}=\sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}.$$

Соответствующее значение α тоже равно $\pm\sqrt[4]{\frac{1}{T}}$.

Вставив эти значения в уравнение (13), получим

$$K_q=4\sqrt{T}=4\sqrt{\frac{D_y}{D_x}}. \tag{23}$$

При $\beta=\alpha=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{T}}$:

$$\frac{\partial K_q}{\partial\alpha}=\frac{\partial K_q}{\partial\beta}=0;$$

$$\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha^2}=\frac{\partial^2 K_q}{\partial\beta^2}=\frac{s\sqrt{T}}{2}+3T>0;$$

$$\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha\partial\beta}=-\frac{s\sqrt{T}}{2}+5T;$$

$$\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2 K_q}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2=8T\sqrt{T}\left(s-2\sqrt{T}\right).$$

Если $s-2\sqrt{T}>0$, то мы имеем минимум. Но в ортотропных конструкциях $s-2\sqrt{T}<0$, отсюда следует, что при $\beta=\pm\sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}}$ получаем: K_q – максимум.

При $s=2\sqrt{T}$:

$$K_{qн} = K_{qo} = K_q ,$$

где K_q не зависит от φ (см. рис. 1).

Действительно, из уравнения (14) получаем единственную связь

$$\sqrt{T}\beta\alpha - 1 = 0 .$$

Выразив β через α и вставив в уравнение (19), убеждаемся, что $\dfrac{\partial^2 K_q}{\partial\alpha^2} > 0$.

Тогда, вставив это же значение в уравнение (13), получаем

$$K_q = const = 4\sqrt{T} = 4\sqrt{\frac{D_y}{D_x}} .$$

При $S = 2T$ – случай металлического листа, подкрепленного частыми стрингерами,

$$K_{qн} = 2\frac{D_y}{D_x} + 2\sqrt{\frac{D_y}{D_x}} .$$

Для этого случая

$$\frac{K_{q0}}{K_{qн}} = \frac{4\sqrt{\frac{D_y}{D_x}}}{2\left(\frac{D_y}{D_x} + \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}\right)} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}} ,$$

т.е. пластина с большим соотношением главных жесткостей при наклоне главного направления с углом φ имеет критическую нагрузку почти в два раза большую, чем при нормально ориентированных главных направлениях.

Выводы

Экстремальные значения K_q получаются при нормальных положениях главной оси упругости ($\beta = 0$ или $\beta = \infty$) и при наклоне главного направления упругости, определяемого углом

$$\varphi = arctg \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} .$$

Для $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$: $K_{qн} = \dfrac{2D_{xy}}{D_x} + 2\sqrt{\dfrac{D_y}{D_x}}$.

Для $\varphi = arctg \sqrt[4]{\dfrac{D_x}{D_y}}$: $K_{q0} = 4\sqrt{\dfrac{D_y}{D_x}}$.

При $D_{xy} < \sqrt{D_x D_y}$ $K_{qн}$ дает минимальное значение, а K_{q0} – максимальное значение K_q .

При $D_{xy} > \sqrt{D_x D_y}$ – наоборот.

При $D_{xy} = \sqrt{D_x D_y}$ $K_q = const = 4\sqrt{\dfrac{D_y}{D_x}}$.

При $D_{xy} = D_y < D_x$ $\dfrac{K_{q0}}{K_{qн}} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}}$

и повышение критической нагрузки сжатия при оптимальном наклоне главного направления к критической нагрузке при нормальном наклоне – стремится к 2 при увеличении отношения D_x / D_y .

Литература

1. Лехницкий С.Г. Устойчивость анизотропных пластинок. Пособие для авиаконструкторов. – М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1943.

2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. – 355 с.

3. Балабух Л.И. Устойчивость фанерных пластинок // Техника воздушного флота. – 1937. – № 9.

4. Руководство конструкторов. Т. 1. – М., 1943. – § 36333.

5. Roberts H. The Elasticity of Plywood // Aircraft Engineering. – March, 1944.