

УДК 624.072

С.С. КУРЕННОВ

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, Украина***ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ОДНОСРЕЗНОГО НАХЛЕСТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ**

Предложена двумерная модель односрезного клеевого соединения деталей из ортотропных материалов. Модель базируется на гипотезах о равномерном распределении напряжений по толщине склеиваемых деталей и работе клеевой прослойки только на сдвиг. Модель учитывает взаимное влияние продольных и поперечных деформаций, которое обусловлено коэффициентами Пуассона, деформации сдвига и температурные деформации, а также прогиб соединения. Задача сведена к системе семи дифференциальных уравнений относительно прогиба и усилий в слоях.

соединение с переменными параметрами, напряженно-деформированное состояние, термомеханическое нагружение, соединительный слой

Введение

Конструкция летательного аппарата (ЛА) имеет большое число функциональных, технологических и эксплуатационных стыков и соединений. Это в значительной мере ставит надежность функционирования ЛА в зависимость от качества расчета напряженно-деформированного состояния (НДС), проектирования и реализации стыков и соединений. Внедрение в конструкции ЛА композиционных материалов (КМ), обладающих свойством селективной передачи нагрузок (что присуще тканым и однонаправленным КМ), а также низкой прочностью на смятие и межслойный сдвиг, привело к созданию широкого спектра конструктивных решений нахлесточных соединений. Для решения задач расчета и проектирования соединений необходимо иметь модель соединения, обладающую достаточной универсальностью, позволяющей охватить широкий класс типов соединений, и простотой реализации.

В качестве основных тенденций развития теории нахлесточных соединений можно выделить три направления. К первому можно отнести направление, связанное с исследованием распределения напряжений по толщине соединения. К данному направлению относится схема, разработанная и развиваемая В.Ф. Кутьиновым и его учениками [1]. Она заклю-

чается в разложении напряженного состояния на основное (балочное) и корректирующее, которое определяется с использованием условия минимума энергии деформации. Иной подход для решения данной задачи предложен Я.С. Карповым [2], и заключается в решении соответствующей плоской задачи теории упругости методом физической дискретизации, что позволяет органично учесть дискретную (например, слоистую) структуру соединяемых деталей. Вторым направлением исследования является изучение влияния изгиба на НДС соединения. К данной тематике относится разработанная А.Р. Ржаницыным теория составных балок и пластин [3]. Третье направление представляют исследования влияния на НДС поперечных деформаций деталей, обусловленных ненулевыми коэффициентами Пуассона. Однако квазидвумерная методика [2] не учитывает неравномерность напряжений по ширине соединения, напряжения сдвига в деталях и взаимное влияние продольных и поперечных деформаций.

Данные обстоятельства делают актуальным создание двумерной по ширине модели нахлесточного соединения, которая учитывала бы ортотропию соединяемых деталей, их прогиб, и была бы лишена недостатков, присущих квазидвумерной методике.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двухслойную прямоугольную пластину $D = \{(x_1, x_2) \in [0, L_1] \times [0, L_2]\}$, первый и второй слой которой имеют толщину соответственно $\delta^{(1)}(x_1, x_2)$ и $\delta^{(2)}(x_1, x_2)$. Соединительный слой имеет толщину $\delta_c(x_1, x_2)$. Для каждой составляющей пластины будем считать справедливой гипотезу прямых нормалей. Поперечные связи между слоями будем считать абсолютно жесткими, что не приведет к заметной потере точности нигде, за исключением узких зон вдоль границ пластинки, где работа поперечных связей имеет характер краевого эффекта. К торцам слоев приложены усилия:

$$N_1^{(i)}(0, x_2); N_1^{(i)}(L_1, x_2); N_2^{(i)}(x_1, 0); N_2^{(i)}(x_1, L_2);$$

$$q^{(i)}(0, x_2); q^{(i)}(L_1, x_2); q^{(i)}(x_1, 0); q^{(i)}(x_1, L_2),$$

где $N_k^{(i)}$ – нормальные усилия в слое с номером i направлении x_k (здесь и ниже по тексту верхний индекс, взятый в скобки, означает номер слоя, а нижний - направление);

$q^{(i)}$ – касательные усилия.

Суммарные силовые граничные условия на пластинке D должны удовлетворять интегральным условиям равновесия [4].

2. Построение решения

В клеевом шве выделим разделяющую плоскость, по обе стороны которой различаются продольные перемещения соединяемых слоев. Продольные перемещения каждого слоя будем экстраполировать за пределы фактической толщины вплоть до разделяющей плоскости. Абсолютная жесткость поперечных связей приводит к тому, что все слои имеют один и тот же прогиб $w(x_1, x_2)$. Разности продольных перемещений имеют вид

$$\Delta u_i = c_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + u_i^{(2)} - u_i^{(1)}, \quad (1)$$

где $i = 1, 2$ и обозначает направление;

c_i – расстояние между нейтральными осями соединяемых слоев в соответствующих направлениях;

$u_i^{(j)}$ – перемещения.

Дифференцированием (1) получаем:

$$\frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial x_i} = c_i \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \varepsilon_i^{(2)} - \varepsilon_i^{(1)};$$

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial x_{3-i}} = (c_1 + c_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \gamma_{12}^{(2)} - \gamma_{12}^{(1)}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_1^{(j)}$ и $\varepsilon_2^{(j)}$ – удлинения нейтральной плоскости;

$\gamma_{12}^{(j)}$ – сдвиг нейтральной плоскости.

Примем, что между разностями смещений и касательными напряжениями в соединительном слое существует линейная зависимость $\tau_i = \xi \Delta u_i$, где ξ – коэффициент жесткости связей сдвига. В случае клевого соединения определяемый, например, как $\xi = G_c \delta_c^{-1}$, где в свою очередь G_c и δ_c – модуль сдвига и толщина клеевой прослойки. Формулы для расчета жесткости соединительного слоя в клеемеханическом соединении приведены в работе [2].

Уравнения физического закона для j -го слоя имеют вид:

$$\varepsilon_i^{(j)} = P_i^{(j)} N_i^{(j)} - \mu_i^{(j)} P_{3-i}^{(j)} N_{3-i}^{(j)} + \alpha_i^{(j)} T^{(j)}; \quad (3)$$

$$\gamma_{12}^{(j)} = P_{12}^{(j)} q^{(j)},$$

где $P_i^{(j)}$ – податливости слоев, $P_i^{(j)} = [\delta^{(j)} E_i^{(j)}]^{-1}$ и

$P_{12}^{(j)} = [\delta^{(j)} G_{12}^{(j)}]^{-1}$, где $E_i^{(j)}$ и $G_{12}^{(j)}$ модули упругости на растяжение и на сдвиг;

$\alpha_i^{(j)}$ – коэффициенты линейного температурного расширения в соответствующих направлениях;

$T^{(j)}$ – разница между температурой изготовления и эксплуатации;

$\mu_m^{(j)}$ – коэффициенты Пуассона ($\mu_1^{(i)} = \mu_{12}^{(i)}$, $\mu_2^{(i)} = \mu_{21}^{(i)}$).

Подставляя зависимости (3) и уравнения физического закона для клея в уравнения (2), получаем

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i} = c_k \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[P_i^{(j)} N_i^{(j)} - \mu_i^{(j)} P_{3-i}^{(j)} N_{3-i}^{(j)} - \alpha_i^{(j)} T^{(j)} \right]; \quad (4)$$

$$\frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^2 \frac{\tau_i}{x_{3-i}} = (c_1 + c_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + P_{12}^{(2)} q^{(2)} - P_{12}^{(1)} q^{(1)}.$$

Уравнения равновесия дифференциального элемента первого и второго слоев имеют вид

$$\begin{cases} \tau_i + \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x_{3-i}} = 0; \\ \tau_i - \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial x_i} - \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x_{3-i}} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки D имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (N_i^{(1)} + N_i^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x_{3-i}} (q^{(1)} + q^{(2)}) = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя уравнения системы (5) и используя соотношения (4), можно получить

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 q^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} + c_1 \xi \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + a_{11} N_1^{(1)} + a_{12} N_2^{(1)} + a_{13} N_1^{(2)} + a_{14} N_2^{(2)} = b_1; \\ \frac{\partial^2 N_2^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 q^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} + c_2 \xi \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + a_{21} N_1^{(1)} + a_{22} N_2^{(1)} + a_{23} N_1^{(2)} + a_{24} N_2^{(2)} = b_2, \end{cases} \quad (7)$$

где $a_{11} = -\xi P_1^{(1)}$; $a_{12} = \xi \mu_1^{(1)} P_2^{(1)}$; $a_{13} = \xi P_1^{(2)}$;
 $a_{14} = -\xi \mu_1^{(2)} P_2^{(2)}$; $a_{21} = \xi \mu_2^{(1)} P_1^{(1)}$; $a_{22} = -\xi P_2^{(1)}$;
 $a_{23} = -\xi \mu_2^{(2)} P_1^{(2)}$; $a_{24} = \xi P_2^{(2)}$;
 $b_i = \xi (\alpha_i^{(2)} T^{(2)} - \alpha_i^{(1)} T^{(1)})$.

Дифференцируя первые уравнения систем (5) по x_2 , а вторые по x_1 и используя соотношения Коши, получаем

$$\Delta q^{(j)} + (-1)^j \xi \left[P_{12}^{(2)} q^{(2)} - P_{12}^{(1)} q^{(1)} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[N_1^{(j)} + N_2^{(j)} \right] = 0, \quad (8)$$

где под символом Δ подразумевается оператор Лапласа.

Записав уравнения равновесия для изгибающих и крутящих моментов (подробнее см. [3]), выразив затем моменты через прогибы и применив соотношения (5), исключив тем самым производные от касательных напряжений в клее, получим

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = p - \sum_{k=1}^2 c_k \left(\frac{\partial^2 N_k^{(1)}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 q^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \quad (9)$$

где D_i – жесткости составной пластинки, лишенной связей сдвига (приведенные в работе [5]);

p – поперечная нагрузка.

Таким образом, уравнения (6) – (8), (9) образуют систему семи дифференциальных уравнений относительно семи неизвестных – нормальных и касательных усилий в слоях и прогиба пластинки.

Необходимо заметить, что для ряда конструкций влияние прогиба на НДС соединения мало. Это дает возможность принять $w = 0$. Вследствие этого из системы уходит уравнение (9), а в уравнениях (7) производные от прогиба становятся равными нулю.

3. Пример расчета

Интерес представляет сравнение НДС соединения, полученного при помощи предложенной методики с результатами расчетов по квазидвумерной методике [2].

В качестве тестового примера было определены напряжения в квадратной пластинке ($L_1 = L_2 = 0,1$ м), состоящей из алюминиевого и композитного слоев. Ввиду малых размеров пластинки влияние прогиба незначительно ($w = 0$). Механические характеристики металлического слоя:

$$E_1 = E_2 = 70 \text{ ГПа}; \quad G_{12} = 27 \text{ ГПа}; \quad \mu_{12} = 0,3.$$

Второй слой изготовлен из борэпоксидного КМ ($E_1 = 250$ ГПа; $E_2 = 4,5$ ГПа; $G_{12} = 9,8$ ГПа; $\mu_{12} = 0,28$), имеющего углы армирования $\varphi = \pm 45^\circ$.

Толщины $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

Механические характеристики пакета определяются по зависимостям [5]. Рассматривалось одноосное растяжение: $N_1^{(1)}(0, x_2) = N_1^{(2)}(L_1, x_2) = 10 \text{ КН} \cdot \text{м}^{-1}$, остальные усилия на границах равны нулю. Разрешающая система из шести дифференциальных уравнений решалась методом конечных разностей повышенной точности. Напряжения в клее определялись при помощи зависимости (5).

Вычисления показывают, что квазидвумерная методика не в полной мере выявляет краевые эффекты в углах соединения.

На рис. 1 показаны графики отношений полных напряжений в клеевой прослойке ($\tau(\bar{x}_2)$) на торцах соединения ($x_1 = 0$ и $x_1 = L_1$) к напряжениям, вычисляемые по одномерной методике (τ_0), где $\bar{x}_2 = x_2 \cdot L_2^{-1}$.

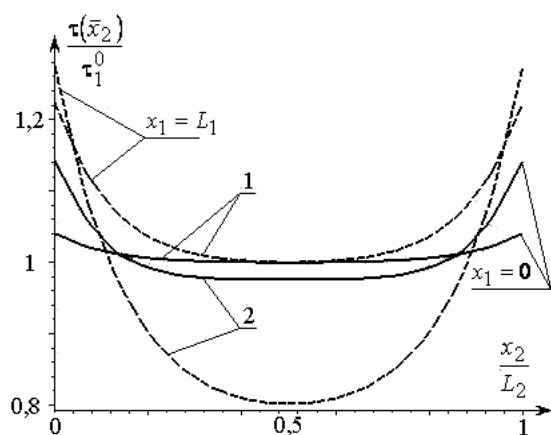


Рис. 1. Относительные напряжения
1 – расчет по квазидвумерной методике;
2 – расчет по двумерной методике

В окрестности углов пластинки существенный вклад в напряжения в клее вносят производные от сдвиговых усилий в слоях, которые не учитываются квазидвумерной методикой. Сами же касательные усилия в данном случае незначительны и достигают лишь величины $150 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$.

Заключение

Представленная двумерная методика определения НДС соединения приводит к необходимости численного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Дальнейшее развитие модели может быть направлено на учет неравномерности напряжений по толщине слоев; учет податливости на растяжение поперечных связей в соединительном слое; обобщение на большее число слоев и др.

Кроме того, большой интерес представляет применение данной модели для неразрушающего контроля соединений и двухслойных пластин.

Литература

1. Кутыинов В.Ф. Расчет клеенных комбинированных конструкций из композиционных материалов // Проектирование, расчет и испытание конструкций из композиционных материалов. – ЦАГИ. – 1982. – Вып. 9. – С. 33 – 47.
2. Карпов Я.С., Кривенда С.П., Рябков В.И. Проектирование и конструирование соединений деталей из композиционных материалов. – Х.: ХАИ, 1997. – 200 с.
3. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
4. Вигак В.М, Токовий Ю.В. Необхідні умови для зовнішніх зусиль існування розв'язку плоскої задачі пружності в прямокутній області // Доповіді НАНУ. – 2001. - № 2. – С. 48 – 55.
5. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин др.; Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. - 512 с.

Поступила в редакцию 16.05.2005

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.