

Научное наследие профессора И.Г. Немана (1903 – 1952)

Предисловие редколлегии журнала

*Журнал продолжает публикации *) по материалам докторской диссертации И.Г. Немана «Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости», защите которой помешала преждевременная смерть автора.*

*Как и в предыдущих сообщениях *) ниже изложены научные результаты И.Г. Немана, полученные им в 1946 – 48 гг. и ранее не публиковавшиеся, практически без правок авторского текста.*

*Редколлегия предполагает знакомство читателя с предыдущими сообщениями автора *) , что исключает необходимость расшифровки в данной статье символов, уже встречавшихся в предыдущих публикациях.*

*) 1. Неман И. Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть 1. Приближенный метод. Устойчивость пластины при одностороннем сжатии // *Авиационно-космическая техника и технология* – 2005. – №5 (21). – С. 87-95.

2. Неман И. Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть II. Приближенный метод. Устойчивость пластины при сдвиге и совместном действии сжатия и сдвига // *Авиационно-космическая техника и технология*. -2005. №6 (22). – С. 95-103.

УДК 629.7: 534.1

И. Г. Неман

Харьковский авиационный институт, Украина

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С НАКЛОННЫМИ ГЛАВНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ УПРУГОСТИ. ТОЧНЫЙ МЕТОД. ЧАСТЬ I. ВЫВОД ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ДВУХСТОРОННЕГО СЖАТИЯ И СДВИГА

Изложен точный метод исследования устойчивости бесконечно длинных ортотропных пластин с наклонными главными направлениями упругости. Получены общие уравнения для коэффициентов критической нагрузки. Дана реализация метода для частного случая пластины при совместном действии усилий сжатия и сдвига. Результаты получены автором до 1946 года и ранее не публиковались.

устойчивость, бесконечно длинная ортотропная пластина, коэффициенты критических нагрузок, точный метод

Введение

Решение задачи устойчивости ортотропных прямоугольных пластин сводится к нахождению такого решения дифференциального уравнения равновесия пластины, которое удовлетворяло бы и уравнениям, выражающим граничные условия.

В зависимости от выбранной системы координат, можно получить разные формы этих уравнений и отсюда разную степень трудности решения всей системы в целом.

Во всей литературе принято выражать уравнения в системе координат, связанной со сторонами пластины. Тогда просто выражаются граничные усло-

вия, но зато дифференциальное уравнение равновесия получается сложным, и приводит к громоздким вычислениям.

Выбор системы координат следует подчинить условию наибольшей простоты решения всей задачи. Поэтому выбор ее должен происходить по следующей схеме. Выражение дифференциального уравнения равновесия взять в той системе, в которой оно выражается наиболее просто, т.е. связать координатную систему с главными направлениями упругости. Граничные условия наиболее просто выражаются в системе координат, связанной с контуром пластины. Кроме этих систем уравнений появится еще система, связывающая между собой координатные системы.

Проводим решение всей этой системы уравнений в той системе координат, которая приводит к наиболее простым математическим выражениям.

§1. Вывод общих уравнений для коэффициентов критической нагрузки

Дифференциальное уравнение ортотропной пластины, нагруженной двухсторонними погонными усилиями сжатия и касательной нагрузки, имеет вид

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + q_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2q_t \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad (1)$$

если оси координат x и y совпадают с наклонами главных направлений упругости (рис. 1).

При этом ось x считаем направленной вдоль оси максимальной жесткости. В дальнейшем, когда упоминаем об одном главном направлении упругости, то подразумеваем направление максимальной жесткости.

Граничные условия нашей задачи следующие:

$$W = 0; \quad Mx_1 = 0$$

при $X_c = \pm \epsilon$ для свободно опертой пластины и

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

при $x_1 = \pm \epsilon$ для пластины, заделанной по контуру.

Система координат x_1, y_1 связана с контуром пластины.

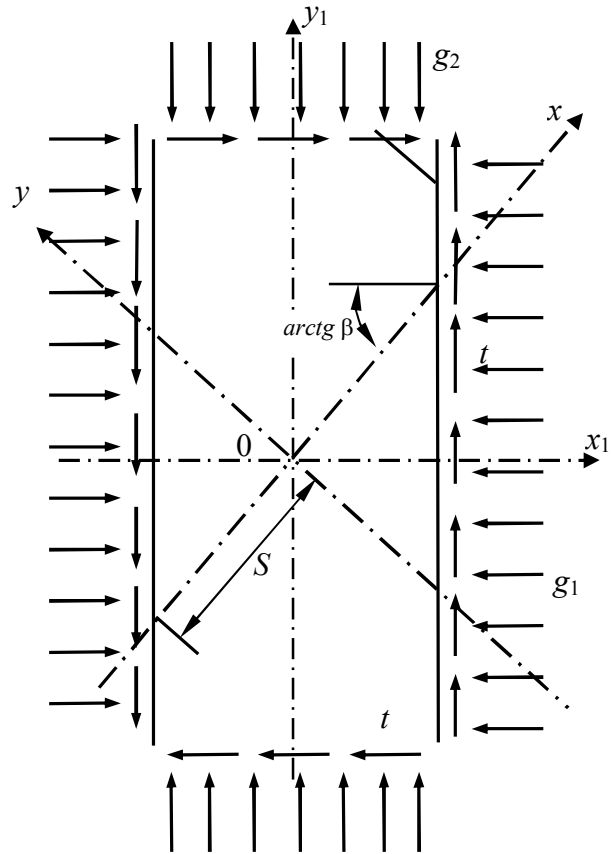


Рис. 1. Системы координат и нагрузок на бесконечно длинную ортотропную пластину

Потеря устойчивости происходит с волнообразованием вдоль оси y_1 . Форму волнообразования вдоль оси x_1 необходимо определить. Поэтому уравнение волны в координатах x, y следует ожидать в форме

$$W = e^{i\mu \frac{y}{\epsilon}} F(x_1), \quad (2)$$

где μ – параметр, определяющий длину волны, вследствие чего принимаемый вещественным.

Вид функции $F(x_1)$ необходимо найти из дифференциального уравнения равновесия пластины.

Решаем дифференциальное уравнение в координатах x_1, y_1 по методу Мориса Леви в форме:

$$W = e^{i\mu' \frac{y_1}{s}} \phi(x_1).$$

Подставив данное выражение в (1), получаем:

$$D_x \phi^{IV}(x) - 2D_{xy} \left(\frac{\mu'}{s}\right)^2 \phi''(x) + D_y \left(\frac{\mu'}{s}\right)^4 \phi(x) = q_x \phi''(x) + 2q_t i \left(\frac{\mu'}{s}\right) \phi'(x) - q_y \left(\frac{\mu'}{s}\right)^2 \phi(x).$$

Это уравнение имеет решение вида $\phi(x) = e^{i\lambda \frac{x}{s}}$.

Отсюда
$$W = \sum A e^{i \left[\frac{\mu' y + \lambda' x}{s} \right]}. \quad (3)$$

Обе системы координат x_1, y_1 и x, y связаны между собой соотношениями:

$$x = \frac{x_1 - \beta y_1}{\sqrt{1 + \beta^2}}; \quad y = \frac{\beta x_1 + y_1}{\sqrt{1 + \beta^2}}.$$

Производя замену переменных в уравнении (3), перепишем его в следующем виде:

$$W = \sum A e^{i \left[\frac{\mu'}{s\sqrt{1+\beta^2}}(\beta x_1 + y_1) + \frac{\lambda'}{s\sqrt{1+\beta^2}}(x_1 - \beta y_1) \right]} = \sum A e^{i \left[\frac{-\lambda'\beta + \mu'}{\sqrt{1+\beta^2}} \frac{y_1}{s} + \frac{\lambda' + \mu'\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \frac{x_1}{s} \right]}.$$

Сравнивая (2) с последним выражением видим, что (2) может быть записано в следующем виде:

$$W = e^{i\mu \frac{y}{s}} \sum A e^{i\lambda \frac{x_1}{s}}, \quad (4)$$

где $\frac{\mu}{s} = \frac{-\lambda'\beta + \mu'}{s\sqrt{1+\beta^2}}$ и $\frac{\lambda}{s} = \frac{\lambda' + \mu'\beta}{s\sqrt{1+\beta^2}}$.

Так как μ должно быть вещественным, выразим μ' и λ' через μ и λ :

$$\mu' = \lambda\beta + \mu; \quad \lambda' = \lambda - \mu\beta,$$

а уравнение (3) перепишем в следующей форме:

$$W = \sum A e^j = \sum A e^{i \left[\frac{\lambda - \mu\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \frac{x}{s} + \frac{\lambda\beta + \mu}{\sqrt{1+\beta^2}} \frac{y}{s} \right]}. \quad (5)$$

Усилия q_x, q_y и q_t в системе координат x и y связаны с q_1, q_2 и t соотношениями:

$$\begin{aligned} q_x &= -q_1 \frac{1}{1+\beta^2} + t \frac{2\beta}{1+\beta^2} - \frac{q_2\beta^2}{1+\beta^2}; \\ q_y &= -q_1 \frac{\beta^2}{1+\beta^2} - q_2 \frac{1}{1+\beta^2} - t \frac{2\beta}{1+\beta^2}; \\ q_t &= -q_1 \frac{\beta^2}{1+\beta^2} - q_2 \frac{\beta}{1+\beta^2} - t \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (1), получаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon^4} \frac{1}{(1+\beta^2)^2} [D_x(\lambda - \mu\beta)^4 + 2D_{xy} \times \\ & \times (\lambda - \mu\beta)^2(\lambda\beta + \mu)^2 + D_y(\lambda\beta + \mu)^4] = \\ & = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{(1+\beta^2)^2} \{ (-q_1 - q_2\beta^2 + 2\beta t) \times \\ & \times [-(\lambda - \mu\beta)^2] + (-q_1\beta^2 - q_2 - 2\beta t) \times \\ & \times [-(\lambda\beta + \mu)^2] + 2 [-q_1\beta + q_2\beta - (1-\beta^2)t] \times \\ & \times [-(\lambda - \mu\beta)(\mu + \lambda\beta)] \}. \end{aligned}$$

Умножим все уравнение на $\epsilon^4(1+\beta^2)^2$ и сгруппируем члены с одинаковыми степенями λ, μ :

$$\begin{aligned} & \lambda^4 (D_x + 2D_{xy}\beta^2 + D_y\beta^4) + \lambda^3 \mu \times \\ & \times [-4D_x\beta + 4D_{xy}\beta(1-\beta^2) + 4D_y\beta^3] + \\ & + \lambda^2 \mu^2 [6D_x\beta^2 + 2D_{xy}(1-4\beta^2 + \beta^4) + 6D_y\beta^2] + \\ & + \lambda \mu^3 [-4D_x\beta^3 - 4D_{xy}\beta(1-\beta^2) + 4D_y\beta] + \\ & + \mu^4 (D_x\beta^4 + 2D_{xy}\beta^2 + D_y) = q_1\epsilon^2(1+\beta^2)^2 \lambda^2 + \\ & + q_2\epsilon^2(1+\beta^2)^2 \mu^2 + 2t\epsilon^2(1+\beta^2)^2 \lambda\mu, \end{aligned}$$

а затем перепишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \frac{-4\beta + 4 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta(1-\beta^2) + 4 \frac{D_y}{D_x} \beta^3}{1 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta^2 + \frac{D_y}{D_x} \beta^4} \lambda^3 \mu + \\ & + \frac{6\beta^2 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} (1-4\beta^2 + \beta^4) + 6 \frac{D_y}{D_x} \beta^2}{1 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta^2 + \frac{D_y}{D_x} \beta^4} \lambda^2 \mu^2 + \\ & + \frac{-4\beta^3 - 4 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta(1-\beta^2) + 4 \frac{D_y}{D_x} \beta}{1 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta^2 + \frac{D_y}{D_x} \beta^4} \lambda \mu^3 + \\ & + \frac{\beta^4 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta^2 + \frac{D_y}{D_x}}{1 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta^2 + \frac{D_y}{D_x} \beta^4} \mu^4 = \frac{q_1\epsilon^2}{D_x} \frac{(1+\beta^2)^2}{1 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta^2 + \frac{D_y}{D_x} \beta^4} \lambda^2 + \\ & + \frac{q_2\epsilon^2}{D_x} \frac{(1+\beta^2)^2}{1 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta^2 + \frac{D_y}{D_x} \beta^4} \mu^2 + \frac{2t\epsilon^2}{D_x} \frac{2(1+\beta^2)^2}{1 + 2 \frac{D_{xy}}{D_x} \beta^2 + \frac{D_y}{D_x} \beta^4} \lambda\mu \end{aligned}$$

$$\lambda^4 + A\mu\lambda^3 + (B\mu^2 - EKq_1)\lambda^2 + (C\mu^3 - 2EK_t\mu)\lambda + D\mu^4 - EKq_2\mu^2 = 0. \quad (7)$$

или
 Коэффициенты А, В, С, Д и Е зависят от β и являются константами при фиксированном наклоне главного направления.

Воспользуемся здесь методом Саутвелли и Скан, которым они решили задачу устойчивости изотропной пластины под действием сдвига [1, С. 840-843]. Они имели уравнение с нулевым коэффициентом при неизвестном в третьей степени. Здесь же этот коэффициент не обращается в нуль, однако можно этот метод расширить и на рассматриваемый нами случай.

Четыре корня характеристического уравнения: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 (при вещественном μ) могут быть представлены в следующем виде:

$\lambda_1 = \delta_1 + \xi$; $\lambda_2 = \delta_1 - \xi$; $\lambda_3 = \delta_2 + \eta$; $\lambda_4 = \delta_2 - \eta$,
 где δ_1 и δ_2 вещественные величины, а ξ и η могут быть как мнимыми, так и вещественными. Уравнение (4) можно записать так:

$$W = (Pe^{\frac{i\lambda_1 x_1}{\sigma}} + Qe^{\frac{i\lambda_2 x_1}{\sigma}} + Re^{\frac{i\lambda_3 x_1}{\sigma}} + Se^{\frac{i\lambda_4 x_1}{\sigma}})e^{-\frac{i\mu y_1}{\sigma}}.$$

Корни λ_i ($i=1, 2, 3, 4$), а значит и величины δ_1, δ_2, ξ и η , связаны с коэффициентами уравнения (7) следующими зависимостями:

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \delta_1 + \delta_2 = -\frac{A\mu}{2}; \quad (8)$$

$$\sum_{i,k=1}^4 \lambda_i \lambda_k = \delta_1^2 + 4\delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 - \xi^2 - \eta^2 = B\mu^2 - EKq_1; \quad (9)$$

$$\sum_{i,k,l=1}^4 \lambda_i \lambda_k \lambda_l = 2\delta_2 (\delta_1^2 - \xi^2) + 2\delta_1 (\delta_2^2 - \eta^2) = -(C\mu^3 - 2EK_t\mu); \quad (10)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = (\delta_1^2 - \xi^2)(\delta_2^2 - \eta^2) = D\mu^4 - EKq_2\mu^2. \quad (11)$$

В дальнейшем примем один из коэффициентов Kq за основной, а остальные свяжем с ним линейно:

$$K_t = mKq_1; \quad (12) \quad Kq_2 = nKq_1. \quad (13)$$

Это означает, что мы ищем критическое состояние при таком характере нагружения, когда отдельные нагрузки подходят к критической, оставаясь все время ей пропорциональными.

На практике бывает также, что одна нагрузка приложена как постоянная, а другая переменная. Более общий случай получается при изменении нагрузок с нелинейным соотношением между ними. Все эти задачи как математически, так и принципиально неравноценны*).

Числа полуволн m и n будем считать в каждом случае заданными. Тогда Kq является функцией пяти переменных: $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 или $\mu, \delta_1, \delta_2, \xi$ и η при наличии четырех уравнений (8), (9), (10) и (11) и еще пятого уравнения, которое мы получим ниже при рассмотрении граничных условий.

Теперь наша задача сводится к исключению максимального количества переменных и к получению Kq в наиболее удобном виде для исследования.

Уравнения (9) и (10) переписываем в виде линейных уравнений относительно неизвестных $\delta_1^2 - \xi^2$ и $\delta_2^2 - \eta^2$:

$$(\delta_1^2 - \xi^2) + (\delta_2^2 - \eta^2) = B\mu^2 - EKq_1 - 4\delta_1 \delta_2;$$

$$2\delta_2 (\delta_1^2 - \xi^2) + 2\delta_1 (\delta_2^2 - \eta^2) = -(C\mu^3 - 2EK_t\mu).$$

Решая их относительно указанных неизвестных, получаем:

$$\delta_1^2 - \xi^2 = \left((B\mu^2 - 4\delta_1 \delta_2 - EKq_1)2\delta_1 + C\mu^3 - 2EK_t\mu \right) / (2(\delta_1 - \delta_2)); \quad (14)$$

$$\delta_2^2 - \eta^2 = \left(-(C\mu^3 - 2EK_t\mu) - (B\mu^2 - 4\delta_1 \delta_2 - EKq_1)2\delta_2 \right) / (2(\delta_1 - \delta_2)). \quad (15)$$

Вводим новое переменное z :

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{zA\mu}{2}. \quad (16)$$

Из (8) и (16) определяем δ_1 и δ_2 :

$$\delta_1 = \frac{A}{4}(z-1)\mu; \quad \delta_2 = -\frac{A}{4}(z+1)\mu.$$

Вставим эти выражения δ_1 и δ_2 в правые части (14), (15). Перемножив их, приравняв к правой части (11) и сократив полученное уравнение на μ^4 , получим:

* В диссертации автор показал отличия отмеченных им случаев и предложил методике соответствующих им критических состояний (прим. редколлегии).

$$\left\{ \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} - \frac{EKq_1}{\mu^2} \right] \frac{A}{2}(z-1) + C - 2E + \frac{K_t}{\mu^2} \right\} \times$$

$$\times \left\{ - \left(C - 2E \frac{K_t}{\mu^2} \right) + \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} - \frac{EKq_1}{\mu^2} \right] A(z+1) \right\} -$$

$$- A^2 D z^2 + A^2 z^2 \frac{EKq_2}{\mu^2} = 0$$

или

$$\left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} - \frac{EKq_1}{\mu^2} \right]^2 \frac{A^2}{4} (z^2-1) -$$

$$- \left(c - 2E \frac{K_t}{\mu^2} \right)^2 + A \left(c - 2E \frac{K_t}{\mu^2} \right) \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} - \frac{EKq_1}{\mu^2} \right] -$$

$$- A^2 D z^2 + A^2 z^2 \frac{EKq_2}{\mu^2} = 0.$$

Расположим по степеням коэффициентов нагружения K :

$$\frac{A^2}{4} (z^2-1) \left(\frac{EKq_1}{\mu^2} \right)^2 - 4 \left(\frac{EK_t}{\mu^2} \right)^2 + \frac{EK_t}{\mu^2} \cdot \frac{EKq_1}{\mu^2} 2A -$$

$$- \frac{EKq_1}{\mu^2} \times \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] \frac{A^2}{2} (z^2-1) + 4C \frac{EK_t}{\mu^2} -$$

$$- 2A \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] \frac{EK_t}{\mu^2} + A^2 z^2 \frac{EKq_2}{\mu^2} - AC \frac{EKq_1}{\mu^2} +$$

$$+ \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right]^2 \left(\frac{A^2(z^2-1)}{4} \right) -$$

$$- C^2 + AC \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] - A^2 D z^2 = 0. \quad (17)$$

Имея в виду уравнения (12) и (13) мы видим, что нам удалось свести задачу нахождения коэффициентов критической нагрузки к поиску минимума функции двух переменных z и β , при наличии одного уравнения связи, которое получим ниже.

§2. Граничные условия и уравнения связи

Изгибающие и крутящие моменты в площадках нормальных к главным осям, выражаются следующими формулами [2, с.13]:

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_{21} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \quad (18)$$

$$M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu_{21} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right); \quad H_{xy} = -2D_k \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Изгибающий момент M_{x_1} , в площадке, нормальной к оси x_1 получаем в следующем виде:

$$M_{x_1} = M_x \cos^2 \varphi + M_y \sin^2 \varphi +$$

$$+ 2H_{xy} \sin \varphi \cdot \cos \varphi;$$

$$M_{x_1} = -\frac{1}{1+\beta^2} \left[(D_x + D_y \mu_{12} \beta^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + (D_y \beta^2 + D_x \mu_{21}) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 4D_k \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \beta \right].$$

Выразим производные второго порядка по x и y через производные по x_1 и y_1 :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \left(\frac{dx_1}{dx} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial y_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} \cdot \frac{dy_1}{dy} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \left(\frac{dx_1}{dy} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial y_1} \times \frac{dx_1}{dy} \cdot \frac{dy_1}{dy} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \left(\frac{dy_1}{dy} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \cdot \frac{dx_1}{dx} \cdot \frac{dx_1}{dy} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial y_1} \times$$

$$\times \left(\frac{dx_1}{dx} \cdot \frac{dy_1}{dy} + \frac{dx_1}{dy} \cdot \frac{dy_1}{dx} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy_1}{dy}.$$

Координаты x_1 и y_1 связаны с координатами x и y следующими уравнениями:

$$x_1 = \frac{x + \beta y}{\sqrt{1 + \beta^2}}; \quad y_1 = \frac{-\beta x + y}{\sqrt{1 + \beta^2}}.$$

Произведем замену переменных в уравнении M_{x_1} :

$$M_{x_1} = \frac{-1}{(1+\beta^2)^2} \left\{ (D_x + D_y \mu_{12} \beta^2) \times \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial y_1} \beta + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \beta^2 \right) + \right.$$

$$\left. + (D_y \beta^2 + D_x \mu_{21}) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \beta^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial y_1} \beta + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \right) + 4D_k \beta \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \beta + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial y_1} \times (1 - \beta^2) - \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \right] \right\}$$

или

$$M_{x_1} = -\frac{1}{(1+\beta^2)^2} \left\{ (D_x + 2D_{xy} \beta^2 + D_y \beta^4) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \right.$$

$$\left. + \left[(D_x - 2D_{xy} + D_y) \beta^2 + D_x \mu_{21} (1 + \beta^2) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+2\left[-D_x + D_{xy}(1-\beta^2) + D_y\beta^2\right]\beta\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial y_1}\Bigg\} = \\
 &= \frac{-(D_x + 2D_{xy}\beta^2 + D_y\beta^4)}{(1+\beta^2)^2}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \right. \\
 &+ \frac{(D_x - 2D_{xy} + D_y)\beta^2 + D_x\mu_{21}(1+\beta^2)^2}{D_x + 2D_{xy}\beta^2 + D_y\beta^4}\frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \\
 &\left. + \frac{-2D_x\beta + 2D_{xy}\beta(1-\beta^2) + 2D_y\beta^3}{D_x + 2D_{xy}\beta^2 + D_y\beta^4}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial y_1}\right]. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Окончательно выражение для Mx_1 запишем в следующем виде:

$$Mx_1 = -\frac{D_x + 2D_{xy}\beta^2 + D_y\beta^4}{(1+\beta^2)^2} \times \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{A}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial y_1} \right], \quad (20)$$

где A – величина коэффициента, входящего в (7).

Теперь граничные условия получают следующие выражения:

Для свободно опертой пластины:

$$Pe^{i\lambda_1} + Qe^{i\lambda_2} + Re^{i\lambda_3} + Se^{i\lambda_4} = 0; \quad (21)$$

$$Pe^{-i\lambda_1} + Qe^{-i\lambda_2} + Re^{-i\lambda_3} + Se^{-i\lambda_4} = 0; \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\lambda_1^2 + \gamma_1\mu^2 + \frac{A}{2}\lambda_1\mu\right)Pe^{i\lambda_1} + \left(\lambda_2^2 + \gamma_1\mu^2 + \frac{A}{2}\lambda_2\mu\right) \times \\
 &\times Qe^{-i\lambda_2} + \left(\lambda_3^2 + \gamma_1\mu^2 + \frac{A}{2}\lambda_3\mu\right)Re^{-i\lambda_3} + \\
 &+ \left(\lambda_4^2 + \gamma_1\mu^2 + \frac{A}{2}\lambda_4\mu\right)Se^{i\lambda_4} = 0; \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left(\lambda_1^2 + \gamma_1\mu^2 + \frac{A}{2}\lambda_1\mu\right)Pe^{-i\lambda_1} + \left(\lambda_2^2 + \gamma_1\mu^2 + \frac{A}{2}\lambda_2\mu\right) \times \\
 &\times Qe^{-i\lambda_2} + \left(\lambda_3^2 + \gamma_1\mu^2 + \frac{A}{2}\lambda_3\mu\right)Re^{-i\lambda_3} + \\
 &+ \left(\lambda_4^2 + \gamma_1\mu^2 + \frac{A}{2}\lambda_4\mu\right)Se^{-i\lambda_4} = 0. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Для жестко заделанной пластины:

$$Pe^{i\lambda_1} + Qe^{i\lambda_2} + Re^{i\lambda_3} + Se^{i\lambda_4} = 0; \quad (25)$$

$$Pe^{-i\lambda_1} + Qe^{-i\lambda_2} + Re^{-i\lambda_3} + Se^{-i\lambda_4} = 0; \quad (26)$$

$$\lambda_1 Pe^{i\lambda_1} + \lambda_2 Qe^{i\lambda_2} + \lambda_3 Re^{i\lambda_3} + \lambda_4 Se^{i\lambda_4} = 0; \quad (27)$$

$$\lambda_1 Pe^{-i\lambda_1} + \lambda_2 Qe^{-i\lambda_2} + \lambda_3 Re^{-i\lambda_3} + \lambda_4 Se^{-i\lambda_4} = 0. \quad (28)$$

В обоих случаях мы получаем систему линейных однородных уравнений с неизвестными P, Q, R и S .

Определитель этой системы должен обратиться в нуль. Разложение этого определителя дает для свободно опертой пластины уравнение:

$$\begin{aligned}
 &\left[\left(\lambda_1^2 + \frac{A}{2}\lambda_1\mu\right) - \left(\lambda_2^2 + \frac{A}{2}\lambda_2\mu\right)\right] \times \left[\left(\lambda_3^2 + \frac{A}{2}\lambda_3\mu\right) - \right. \\
 &\left. - \left(\lambda_4^2 + \frac{A}{2}\lambda_4\mu\right) \times \sin(\lambda_1 - \lambda_3) \sin(\lambda_2 - \lambda_4)\right] = \\
 &= \left[\left(\lambda_1^2 + \frac{A}{2}\lambda_1\mu\right) - \left(\lambda_3^2 + \frac{A}{2}\lambda_3\mu\right)\right] \times \left[\left(\lambda_2^2 + \frac{A}{2}\lambda_2\mu\right) - \right. \\
 &\left. - \left(\lambda_4^2 + \frac{A}{2}\lambda_4\mu\right) \times \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_4)\right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

а для жестко заделанной:

$$\begin{aligned}
 &(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) \sin(\lambda_1 - \lambda_3) \times \sin(\lambda_3 - \lambda_4) = \\
 &= (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4) \times \sin(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\lambda_3 - \lambda_4). \quad (30)
 \end{aligned}$$

Выразив в последних двух уравнениях λ и $\frac{A}{2}\mu$ через δ_1, δ_2, ξ и η , получим для уравнения (29) следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 &2\xi\eta(\delta_1 - \delta_2)^2 [\cos 2\xi \cos 2\eta - \cos 2(\delta_1 - \delta_2)] = \\
 &= [(\xi^2 + \eta^2)(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\xi^2 - \eta^2)^2] \sin 2\xi \cdot \sin 2\eta, \quad (31)
 \end{aligned}$$

а для уравнения (30):

$$\begin{aligned}
 &2\xi\eta [\cos 2\xi \cos 2\eta - \cos 2(\delta_1 - \delta_2)] = \\
 &= [(\delta_1 - \delta_2)^2 - (\xi^2 + \eta^2)] \sin 2\xi \sin 2\eta. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Перепишем уравнения (31) и (32) в виде:

$$\begin{aligned}
 &\cos 2\xi \cos 2\eta - \cos zA\mu - \\
 &- \left[\frac{\xi^2 + \eta^2}{2\xi\eta} - \frac{(\xi^2 - \eta^2)^2}{2\xi\eta\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2} \right] \times \sin 2\xi \cdot \sin 2\eta = 0; \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cos 2\xi \cos 2\eta - \cos zA\mu - \\
 &- \left[\frac{\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}{2\xi\eta} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2\xi\eta} \right] \times \sin 2\xi \cdot \sin 2\eta = 0. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Уравнение (33) и (34) (первое в случае свободно опертой пластины, второе в случае заделанной) являются теми уравнениями связи, которые нужно соблюсти при нахождении $K_{крит}$ из уравнения (17).

Фигурирующие здесь переменные ξ и η являются функциями тех же двух переменных z и μ .

Чтобы получить ξ и η как явные функции этих двух переменных, преобразуем уравнения (14) и (15), выразив в них δ_1 и δ_2 через z и выделив общий множитель μ :

$$\xi^2 = \left[\frac{A^2(z-1)^2}{16} - \left(C - \frac{EKt}{\mu^2} + \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} - \frac{EKq_1}{\mu^2} \right] \times \frac{A(z-1)}{2} \right) / (zA) \right] \mu^2; \quad (35)$$

$$\eta^2 = \left[\frac{A^2(z+1)^2}{16} - \left(C - \frac{EKt}{\mu^2} - \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} - \frac{EKq_1}{\mu^2} \right] \times \frac{A(z-1)}{2} \right) / (zA) \right] \mu^2. \quad (36)$$

Уравнение (35) показывает, что EK/μ^2 является функцией одного параметра z . Следовательно, выражения в квадратных скобках уравнений (35) и (36) тоже являются функциями одного z . Заметим здесь, что знак переменных z и μ не влияет на значение Kq . Действительно в уравнение (35) они входят в виде квадратов. ξ^2 и η^2 при замене z на $-z$ обмениваются только значениями, а в связи с тем, что они входят симметрично в уравнения связи (33) и (34), то это тоже не влияет на корни этих уравнений.

§3. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины при совместном действии усилий сжатия и сдвига

Примем за основную нагрузку нормальную Kq_1 . Остальные нагрузки выразим через соотношения (12) и (13). Уравнение (17) принимает следующий вид:

$$\left[\frac{A^2}{4}(z^2-1) - 4m^2 + 2Am \right] \left(\frac{EKq_1}{\mu^2} \right)^2 - \left\{ \frac{A^2}{2}(z^2-1) \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] - 4Cm + 2Am \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] AC - A^2Z^2n \right\} \times$$

$$\times \frac{EKq_1}{\mu^2} + \left\{ \frac{A^2(z^2-1)}{4} \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right]^2 + AC \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] - C^2 - A^2DZ^2 \right\} = 0. \quad (37)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{EKq_1}{\mu^2} = \left\{ \left[\frac{A^2}{4}(z^2-1) + Am \right] \times \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] - 2Cm + \frac{AC}{2} - \frac{A^2z^2n}{2} \right\} \pm \sqrt{\Omega} / \left(\frac{A^2}{4}(z^2-1) - 4m^2 + 2Am \right). \quad (38)$$

После приведения подобных членов подкоренных слагаемых, мы для корня $\sqrt{\Omega}$ получаем следующее выражение:

$$\sqrt{\Omega} = \frac{Az}{4} \left\{ \left[(4B - A^2)m - 2C + A^2mz^2 \right]^2 - 4D \left[(4m - A)^2 - A^2z^2 \right] - n \left[A^2(z^2-1) + 4Am \right] \left[4B + A^2(z^2-1) \right] + 4A^2z^2n^2 + 3zCmn - 8ACn \right\}^{1/2}. \quad (39)$$

Теперь уравнение (38) записываем в виде

$$\frac{EKq_1}{\mu^2} = \left\{ \left[\frac{A^2}{4}(z^2-1) - 4m^2 + 2Am + 4m^2 - Am \right] \times \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] - [4m - A] \frac{C}{2} - \frac{A^2z^2n}{2} \pm \frac{Az}{4} \sqrt{\Omega} \right\} / \left(\frac{A^2}{4}(z^2-1) - 4m^2 + 2Am \right),$$

откуда получаем выражение для Kq_1 :

$$Kq_1 = \left\{ \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} - ((4m - A)[(4B - A^2)m - 2C + A^2mz^2] - 2A^2z^2n \pm Az\sqrt{\Omega}) \right] / \left((4m - A)^2 - A^2z^2 \right) \right\} \frac{\mu^2}{E}. \quad (40)$$

Уравнения (17) и (18) перепишем в таком виде:

$$\xi^2 = \left\{ \frac{A^2(z-1)^2}{16} - \frac{\left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] A(z-1) + 2C}{2Az} + \frac{4m - A + Az}{2Az} \cdot \left(\frac{EKq_1}{\mu^2} \right) \right\} \mu^2; \quad (41)$$

$$\eta^2 = \left\{ \frac{A^2(z+1)^2}{16} - \frac{\left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] A(z+1) - 2C}{2Az} - \frac{4m - A - Az}{2Az} \cdot \left(\frac{EKq_1}{\mu^2} \right) \right\} \mu^2. \quad (42)$$

Вставим в эти выражения полученную формулу для EKq_1/μ^2 из уравнения (38), предварительно умножив числитель и знаменатель на 4:

$$\xi^2 = \left\{ \frac{A^2(z-1)^2}{16} - \left\{ \left[\left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] A(z-1) + 2C \right] (4m - A - Az) + \left[A^2(z^2-1) + 4Am \right] \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] \right\} / (2Az(4m - A - Az)) - \frac{(4m - A)2C - 2A^2z^2n \pm Az\sqrt{\Omega}}{2Az(4m - A - Az)} \right\} \mu^2;$$

$$\eta^2 = \left\{ \frac{A^2(z+1)^2}{16} - \left\{ \left[\left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] A(z+1) - 2C \right] \times (4m - A + Az) - \left[A^2(z^2-1) + 4Am \right] \times \left[B + \frac{A^2(z^2-1)}{4} \right] \right\} / (2Az(4m - A + Az)) - \frac{(4m - A)2C - 2A^2z^2n \mp Az\sqrt{\Omega}}{2Az(4m - A + Az)} \right\} \mu^2.$$

После приведения членов в числителях этих выражений получаем в окончательном виде выражения для ξ^2 и η^2 :

$$\xi^2 = \left\{ \frac{A^2(z-1)^2}{16} - \left((4B - A^2)m - 2C + A^2mz^2 - \right.$$

$$\left. - 2Az n \pm \sqrt{\Omega} \right) / (2(4m - A - Az)) \Big\} \mu^2; \quad (43)$$

$$\eta^2 = \left\{ \frac{A^2(z+1)^2}{16} - \left((4B - A^2)m - 2C + A^2mz^2 + \right. \right. \quad (44)$$

$$\left. \left. + 2Az n \mp \sqrt{\Omega} \right) / (2(4m - A + Az)) \right\} \mu^2.$$

Как видим, верхние знаки перед корнем в уравнениях (40), (43) и (44), взятые при одном значении z , обмениваются на нижние знаки при перемене знака z . На основании соображений, высказанных в §2 об отсутствии влияния знака z на Kq , можем брать в дальнейшем только одну группу знаков (либо верхнюю, либо нижнюю).

В инженерной практике встречается необходимость в знании характера совместного действия рассматриваемых трех нагрузок, в любой их комбинации по две, а также при изолированном действии каждой из них.

Поэтому, пользуясь выведенными уравнениями, в дальнейшем получим формулы для всех перечисленных случаев и проанализируем те их комбинации, которые не исследованы до сих пор или раскрывают характер неизвестного взаимовлияния отдельных нагрузок*).

Литература

1. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Ч. II. Сложный изгиб и устойчивость стержней. Изгиб и устойчивость пластин. – Л.: Гос. союз. изд-во судостр. промышленности, 1941. – 960 с.
2. Лехницкий С.Г. Устойчивость анизотропных пластинок. Пособие для авиаконструкторов. – М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1943.

*) Эти результаты автора будут опубликованы в следующем номере журнала (прим. редколлегии)