Научное наследие профессора И.Г. Немана (1903 – 1952)

Предисловие редколлегии журнала

Журнал продолжает публикации по материалам докторской диссертации И.Г. Немана «Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости», защите которой помешала преждевременная смерть автора.

Как и в предыдущих сообщениях, ниже изложены научные результаты И.Г. Немана, полученные им в 1946-48 гг. и ранее не публиковавшиеся, практически без правок авторского текста.

Редколлегия предполагает знакомство читателя с предыдущими сообщениями автора), что исключает необходимость расшифровки в данной статье символов, уже встречавшихся ранее.*

Кроме того, во избежание многочисленных повторений выкладок и формул, содержащихся в третьей публикации автора, редколлегия сочла возможным ввести в публикуемую ниже статью ссылки на соответствующие формулы этой публикации.

*) 1. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть 1. Приближенный метод. Устойчивость пластины при одностороннем сжатии // Авиационно-космическая техника и технология – 2005. – № 5 (21). – С. 87-95.

2. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть II. Приближенный метод. Устойчивость пластины при сдвиге.и совместном действии сжатия и сдвига // Авиационно-космическая техника и технология.-2005. – № 6 (22). – С. 95-103.

3. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Точный метод. Часть I. Вывод общих уравнений для коэффициентов критической нагрузки. Устойчивость пластины при совместном действии двухстороннего сжатия и сдвига // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 1 (27). – С. 96-103.

УДК 629.7: 534.1

И.Г. Неман

Харьковский авиационный институт, Украина

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С НАКЛОННЫМИ ГЛАВНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ УПРУГОСТИ. ТОЧНЫЙ МЕТОД. ЧАСТЬ 2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ НАГРУЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ

Дана реализация точного метода исследования устойчивости бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости для частных случаев ее нагружения. Результаты получены автором до 1946 года и ранее не публиковались.

устойчивость, бесконечно длинная ортотропная пластина, точный метод, коэффициенты критических нагрузок, частные случаи

1. Сжатие пластины в поперечном направлении

В случае поперечного сжатия пластины без усилий сдвига $m = n = 0$, полученные в [1] уравнения (40), (43) и (44) значительно упрощаются:

$$\xi^2 = \mu^2 \left\{ \frac{A^2}{16}(z-1)^2 - \frac{c - \sqrt{(-c)^2 - DA^2\left(1-z^2\right)}}{A(1+z)} \right\}; \qquad (1)$$

$$\eta^2=\mu^2\left\{\frac{A^2}{16}(z+1)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{c+\sqrt{(-c)^2-DA^2\left(1-z^2\right)}}{A(1-z)}\right\};\qquad(2)$$

$$K_{q_1}=\frac{\mu^2}{E}\left\{B+\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2c+2z\sqrt{(-c)^2-DA^2\left(1-z^2\right)}}{A\left(1-z^2\right)}\right\}.\qquad(3)$$

При изолированном поперечном сжатии обычно предполагается потеря устойчивости Эйлеровского типа. При этом не должно быть волн, параллельных длинной стороне. Это возможно только при $\mu=0$.

Для того, чтобы при этом K_{q_1} имел конечное значение, необходимо либо $z=\infty$, либо знаменатель $A\left(1-z^2\right)=0$, давая одновременно положительное значение всей дроби, равное $+\infty$.

1. **Случай** $z=\infty$**.**

Уравнения (1), (2) и (3) можно записать так:

$$\xi^2=\mu^2\left[\frac{A^2}{16}(z-1)^2+\sqrt{D}\right];$$
$$\eta^2=\mu^2\left[\frac{A^2}{16}(z+1)^2-\sqrt{D}\right],\qquad(4)$$

откуда после преобразований (с учетом $z=\infty$):

$$\xi=\mu\left[\frac{A^2}{4}(z-1)+\frac{\sqrt{D}}{\frac{A}{2}(z-1)}\right]\text{ или}$$
$$\xi=\frac{Az\mu}{4}+\frac{\varepsilon_1}{2};\qquad(5)$$

$$\eta=\mu\left[\frac{A}{4}(z+1)-\frac{\sqrt{D}}{\frac{A}{2}(z+1)}\right]\text{ или}$$
$$\eta=\frac{Az\mu}{4}+\frac{\varepsilon_2}{2};\qquad(6)$$

$$K_{q_1}=\frac{\mu^2}{E}\left[B+\frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right)-2\sqrt{D}\right]\text{ или}$$
$$K_{q_1}=\frac{A^2z^2\mu^2}{4E}+\varepsilon^3,\qquad(7)$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ – бесконечно малые величины.

Для свободно опертой пластины условное уравнение, полученное в [1], если учесть, что множитель в квадратных скобках (33) (с точностью до малых второго порядка) равен единице, принимает вид:

$$\cos\left(\frac{Az\mu}{2}+\varepsilon_1\right)\cos\left(\frac{Az\mu}{2}+\varepsilon_2\right)-\cos Az\mu-$$
$$-\sin\left(\frac{Az\mu}{2}+\varepsilon_1\right)\sin\left(\frac{Az\mu}{2}+\varepsilon_2\right)=0\qquad(8)$$

или

$$\cos\left(Az\mu+\varepsilon\right)-\cos Az\mu=0,\qquad(9)$$

откуда

$$Az\mu=k\pi-\frac{\varepsilon}{2},\qquad(10)$$

где ε – также бесконечно малая величина.

Минимальное значение K_{q_1} получим при $K=1$.

Тогда

$$Az\mu=k\pi-\frac{\varepsilon}{2}\text{ и }K_{q_1}=\frac{\pi^2}{4E}.\qquad(11)$$

При этом $\xi=\eta=\frac{\pi}{4}$; $\delta_1=\frac{\pi}{4}$; $\delta_2=-\frac{\pi}{4}$ *) и корни характеристического уравнения (7) в [1] равны:

$$\lambda_1=\frac{\pi}{2};\ \lambda_2=\lambda_3=0;\ \lambda_4=-\frac{\pi}{2}.$$

Подставляя полученные данные в уравнение (23) работы [1] для граничных условий, получим:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2Pe^{i\frac{\pi}{2}}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2Se^{-i\frac{\pi}{2}}=0;$$
$$Pe^{i\pi}+S=0;\qquad(12)$$
$$e^{i\pi}=-1\text{, отсюда }P=S.$$

Воспользуемся теперь уравнением (21) работы [1]:

$$Pe^{i\frac{\pi}{2}}+Q+R+Pe^{-i\frac{\pi}{2}}=0;\ e^{i\frac{\pi}{2}}=i;\ e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i.$$

Следовательно

$$Q+R=0.\qquad(13)$$

Поверхность прогибов принимает вид:

$$W=P\left(e^{i\frac{\pi}{2}\frac{x'}{в}}+e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{x'}{в}}\right)+Q+R=$$
$$=2P\cos\frac{\pi}{2}\frac{x'}{в}.\qquad(14)$$

---

*) δ_1,δ_2 – вещественные составляющие корней характеристического уравнения (7) работы [1] (прим. редколлегии).

Это подтверждает предположение о чисто Эйлеровой деформации при принятом значении $\mu = 0$, но не доказывает, что этот случай является критическим.

Для жестко заделанной пластины условное уравнение (33) из работы [1] принимает такой же точно вид, как и для случая свободно опертой пластины, так как множитель в квадратных скобках в этом случае тоже равен единице, если пренебречь бесконечно малыми второго порядка.

Рассмотрим снова равенство (10):

$$Az\mu = k\pi .$$

Положим $k = 1$. Значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ для этого случая уже получены выше. Подставляя эти значения в уравнение (27) работы [1] для граничных условий, получим:

$$\frac{\pi}{2} Pe^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} Se^{-i\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ или}$$

$$Pe^{i\pi} - S = 0 , \tag{15}$$

откуда $P = -S$.

Воспользуемся уравнением (25) работы [1]:

$$Pe^{i\frac{\pi}{2}} + Q + R - Pe^{-i\frac{\pi}{2}} = 0 ;$$

$$2Pi + Q + R = 0 . \tag{16}$$

Сумма $Q + R$ должна быть вещественной.

Поэтому случай $k = 1$ здесь невозможен.

Положим $k = 2$. Тогда уравнение (10) примет вид:

$$Az\mu = 2\pi \text{, откуда}$$

$$K_{q_1} = \frac{\pi^2}{E} . \tag{17}$$

При этом

$$\xi = \eta = \frac{\pi}{2} ; \ \delta_1 = \frac{\pi}{2} ; \ \delta_2 = -\frac{\pi}{2} ; \tag{18}$$

$$\lambda_1 = \pi ; \ \lambda_2 = \lambda_3 = 0 ; \ \lambda_4 = -\pi .$$

Уравнение (27) работы [1] дает:

$$\pi Pe^{i\pi} - \pi Se^{-i\pi} = 0 \text{ или } Pe^{2\pi i} - S = 0 , \tag{19}$$

откуда

$$P = S . \tag{20}$$

Воспользовавшись снова уравнением (27) работы [1], получим:

$$Pe^{i\pi} + Q + R + Se^{-i\pi} = 0 ;$$

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1 , \tag{20}$$

откуда

$$Q + R = 2P . \tag{21}$$

Поверхность прогибов принимает вид

$$W = P\left(e^{i\pi\frac{x'}{в}} + e^{-i\pi\frac{x'}{в}} \right) + 2P = = 2P\left(\cos \pi \frac{x'}{в} + 1 \right) . \tag{22}$$

Таким образом в этом случае тоже получается Эйлерова деформация.

2. **Случай** $\left(1 - z^2\right) = 0$**.**

Покажем, что в этом случае мы придем к тем же результатам, что и в случае $z = \infty$**.**

Пусть $\left(1 + z\right) \to 0$. Уравнения (1) – (3) можно написать так:

$$\xi^2 = -\mu^2 \frac{2c}{A\left(1 + z\right)} ; \ \eta^2 = \mu^2 \frac{A^2}{16}\left(z + 1\right)^2 ; \quad K_{q_1} = -\frac{\mu^2}{E}\frac{2c}{A\left(1 + z\right)} . \tag{23}$$

Заметим, что $\xi^2 = EK_{q_1}$ *). Так как K_{q_1} ожидаем конечным, то ξ^2 тоже имеет конечное значение, а $\eta^2 \to 0$ и $\mu \to 0$.

Для свободно опертой пластины можно условное уравнение (33) работы [1] написать в следующей форме

$$\cos 2\xi \cos 0 - \cos 0 - \left[\xi - \frac{\xi^3}{\left(\frac{Az\mu}{2} \right)^2} \right] \times \sin 2\xi \frac{\sin 2\eta}{2\eta} = 0 . \tag{24}$$

Множитель в квадратных скобках стремится к

*) Это следует из [1] при поставленных здесь условиях (прим. редколлегии).

бесконечности. Поэтому можно это уравнение переписать в следующем виде:

$$\cos 2\xi - 1 + \infty \sin 2\xi = 0 \tag{25}$$

или

$$\sin 2\xi (\infty - \operatorname{tg}\xi) = 0, \tag{26}$$

отсюда либо $\sin 2\xi$, либо $\operatorname{tg}\xi = \infty$.

Оба решения дают $\xi = \frac{\pi}{2}$ (минимальное не тривиальное решение).

При $\xi^2 = EK_{q_1}$ и $\xi = \frac{\pi}{2}$ $K_{q_q} == \frac{\pi^2}{4E}$.

Тогда получим:

$$\xi = \frac{\pi}{2};\ \eta = 0;\ \delta_1 = \delta_2 = 0;$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2};\ \lambda_2 = -\frac{\pi}{2};\ \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \tag{27}$$

Из (27) следует, что форма волнообразования пластины та же самая, как и при $z = \infty$.

Для жестко заделанной пластины можно условное уравнение (34) работы [1] написать следующим образом:

$$\cos 2\xi \cos 0 - \cos 0 - \left[\frac{\left(\frac{Az\mu}{2}\right)^2 - \left(\xi^2 + 0\right)}{\xi} \right];$$

$$\sin 2\xi \frac{\sin 2\eta}{2\eta} = 0 \tag{28}$$

или

$$-2\sin^2\xi + 2\xi \sin\xi \cos\xi = 0. \tag{29}$$

Отсюда следует, что

$$\xi \cos\xi = \sin\xi \tag{30}$$

$$\text{или } \sin\xi = 0. \tag{31}$$

Первое уравнение (30) дает большие значения ξ, чем второе (31).

В последнем случае $\xi = k\pi$.

Положим $K = 1$. Тогда получим:

$$\xi = \pi;\ \eta = 0;\ \delta_1 = \delta_2 = 0;$$
$$\lambda_1 = \pi;\ \lambda_2 = -\pi;\ \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

$$K_{q_1} = \frac{\xi^2}{E}, \text{ следовательно } K_{q_1} = \frac{\pi^2}{E}.$$

Таким образом, получим тот же результат, что и в случае $z = \infty$.

Покажем, что Эйлерова форма не всегда дает минимальное значение K_{q1}.

Пусть $z = -(1+\varepsilon)$, где ε – малая величина, имеющая знак такой же, как и дробь $\frac{A}{C}$.

Равенства (1) – (3) можно написать так:

$$\xi^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{16}(2+\varepsilon)^2 + \frac{c - \sqrt{(-c)^2 + 2DA^2\varepsilon}}{A\varepsilon} \right]; \tag{32}$$

$$\eta^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{16}\varepsilon^2 - \frac{c + \sqrt{(-c)^2 + 2DA^2\varepsilon}}{A(2+\varepsilon)} \right]; \tag{33}$$

$$K_{q_1} = \frac{\mu^2}{E}\left[B + \frac{A^2}{4}2\varepsilon - \right.$$
$$\left. -2\frac{c - (1+\varepsilon)\sqrt{(-c)^2 + 2DA^2\varepsilon}}{-A\varepsilon(2+\varepsilon)} \right] = \tag{34}$$
$$= \frac{\mu^2}{E}\left[B + \frac{c - (1+\varepsilon)\sqrt{(-c)^2 + 2DA^2\varepsilon}}{A\varepsilon} \times \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right].$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим:

$$\xi^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{4} + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} \right];$$

$$\eta^2 = \mu^2 \left[\frac{A^2}{16}\varepsilon^2 + \frac{DA\varepsilon}{2c} - \frac{DA}{4c}\varepsilon^2 \right]\mu^2; \tag{35}$$

$$K_{q_1} = \frac{\mu^2}{E}\left[B + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} + \frac{c}{A} - \frac{c}{A} \right] =$$
$$= \frac{\mu^2}{E}\left[B + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} \right]. \tag{36}$$

Для свободно опертой пластинки при $z = -1$ выше было получено: $\xi = \frac{\pi}{2}$ и $\eta = 0$.

При $z_\varepsilon = -(1+\varepsilon)$ η – исчезающе мало по сравнению с ξ.

Ожидаем, что ξ будет мало отлично от $\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\xi = \frac{\pi}{2} - \delta$, где δ – бесконечно малая величина.

Учитывая, что $\cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = -\cos 2\delta$ и $\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = -\sin 2\delta$, можно условное уравнение (33) работы [1] написать в следующем виде:

$$-\cos 2\delta \cos 2\eta - \cos z_\varepsilon A\mu - \left[\frac{\xi^2+\eta^2}{2\xi\eta} - \frac{\left(\xi^2-\eta^2\right)^2}{2\xi\eta\frac{z_\varepsilon^2 A^2\mu^2}{4}}\right]\times \tag{37}$$

$$\times \sin 2\delta \sin 2\eta = 0 \times \sin 2\delta \sin 2\eta = 0 .$$

С учетом же того, что η – бесконечно малое, можно последнее уравнение переписать так:

$$-\left(1-2\delta^2\right)\left(1-2\eta^2\right) - \left[1 - \frac{z_\varepsilon^2 A^2\mu^2}{2!} + ...\right] - \left[\xi - \frac{\xi^3}{\frac{z_\varepsilon^2 A^2\mu^2}{4}}\right]2\delta = 0 . \tag{38}$$

Опустив члены высшего порядка малости, получим:

$$-2 + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\frac{z_\varepsilon^2 A^2\mu^2}{4}} 2\delta = 0 , \tag{39}$$

отсюда

$$\delta = \frac{2z_\varepsilon^2 A^2\mu^2}{\pi^3} \approx \frac{2A^2\mu^2}{\pi^3} = 0\left(\mu^2\right). \tag{40}$$

Из соотношения $\xi^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi\delta$ получим

$$\mu^2\left[\frac{A^2}{4} + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c}\right] = \frac{\pi^2}{4} - \frac{2A^2}{\pi^2}\mu^2 . \tag{41}$$

Отсюда

$$\mu^2 = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{A^2}{4} + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c} + \frac{2}{\pi^2}A^2} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{9}{20}A^2 + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c}} 0(\varepsilon). \tag{42}$$

Вставим это значение μ^2 в уравнение (36):

$$K_{q_1} = \frac{B + \frac{2c}{\varepsilon} + \frac{AD}{c}}{\frac{9}{20}A^2 + \frac{2c}{A\varepsilon} + \frac{DA}{c}} \frac{\pi^2}{4E} = \left[1 + \left(B - \frac{9}{20}A^2\right)\frac{A}{2c}\varepsilon\right]\frac{\pi^2}{4E} . \tag{43}$$

Теперь видно, что если $B > \frac{9}{20}A^2$, то варьируя z, получаем значение K_{q_1}, большее, чем в случае $z = -1$. Но если $B < \frac{9}{20}A^2$, то Эйлерова форма не является критической, а существует другая форма, дающая меньшее значение K_{q_1}. Для жестко заделанной пластины, из тех же соображений, что и выше, примем

$$\xi = \pi - \delta . \tag{44}$$

Здесь условное уравнение (34) работы [1] напишется в следующем виде:

$$\cos 2\delta \cos 2\eta - \cos z_\varepsilon A\mu + \frac{\frac{z_\varepsilon^2 A^2\mu^2}{4} - \left(\xi^2+\eta^2\right)}{2\varepsilon\eta} \sin 2\delta \sin 2\eta = 0 . \tag{44}$$

Далее,

$$\left(1-2\delta^2\right)\left(1-2\eta^2\right) - \left[1 - \frac{z_\varepsilon^2 A^2\mu^2}{2} + ...\right] - \left(\pi - \delta\right)2\delta = 0 ;$$

или $\frac{z_\varepsilon^2 A^2\mu^2}{2} = \pi 2\delta$, отсюда

$$\delta = \frac{A^2\mu^2}{4\pi} . \tag{45}$$

Здесь $\xi^2 = \pi^2 - 2\pi\delta$ и значит

$$\left[\frac{A^2}{4}+\frac{2c}{A\varepsilon}+\frac{DA}{c}\right]\mu^2=\pi^2-\frac{A^2}{2}\mu^2. \qquad (46)$$

Окончательно:

$$\mu^2=\frac{\pi^2}{\frac{3}{4}A^2+\frac{2c}{A\varepsilon}+\frac{DA}{c}}; \qquad (47)$$

$$K_{q_1}=\frac{B+\left(\frac{2c}{A\varepsilon}+\frac{AD}{c}\right)}{\left(\frac{3}{4}A^2+\frac{2c}{A\varepsilon}+\frac{DA}{c}\right)}\frac{\pi^2}{E}= \qquad (48)$$
$$=\left[1+\left(B-\frac{3}{4}A^2\right)\frac{A}{2c}\varepsilon\right]\frac{\pi^2}{E}.$$

Видно, что если $B>\frac{3}{4}A^2$, то с изменением z K_{q_1} растет, а при $B<\frac{3}{4}A^2$ K_{q_1} будет снижаться. Эйлерова форма в последнем случае также не дает минимального значения K_{q_1}.

Из полученных выше результатов можно сделать такие выводы:

1. Коэффициент критической нагрузки поперечного сжатия K_{q_1} не может быть выше значения Элерового коэффициента.

2. При некотором соотношении жесткостей пластины и угла наклона главных направлений упругости K_{q_1} ниже Эйлерового коэффициента:

– для свободно опертой пластины при соотношении $B>\frac{9}{20}A^2$;

– для жестко заделанной пластины при $B>\frac{3}{4}A^2$.

2. Границы Элеровой формы потери устойчивости при совместном действии K_{q_1}, K_{q_2}, Kt

Для этого общего случая формулы K_{q_1}, ξ^2 и η^2 (40), (43) – (44) приведены в [1].

Про анализируем поведение коэффициентов критической нагрузки в зависимости от жесткостей и наклона главного направления упругости пластины.

Принимаем некоторое значение z_ε, определяемое следующим уравнением:

$$4m-A-Az_\varepsilon=A\varepsilon, \qquad (49)$$

где ε – малая величина.

Напишем следующее соотношения:

$$4m-A-Az_\varepsilon=8m-2A-A\varepsilon;$$
$$(4m-A)^2-A^2z_\varepsilon^2=A\varepsilon(8m-2A-A\varepsilon); \qquad (50)$$
$$A^2z_\varepsilon^2=(4m-A)^2-A\varepsilon(8m-2A-A\varepsilon);$$
$$A^2\left(z_\varepsilon^2-1\right)=16m^2-8Am-A\varepsilon(8m-2A-A\varepsilon);$$
$$Az_\varepsilon=4m-A-A\varepsilon.$$

При данном значении z_ε под радикалом $\sqrt{\Omega}$ зависимости (39) работа [1] стоит сумма конечных чисел, сумма малых величин порядка ε и сумма высших его порядков (последнюю можем отбросить).

Представим $\sqrt{\Omega}$ в следующем виде:

$$\sqrt{\Omega}=\sqrt{K_0+2AK_1\varepsilon}=\sqrt{K_0}+\frac{AK_1}{\sqrt{K_0}}\varepsilon. \qquad (51)$$

Здесь K_0 – подкоренное значение при $z=z_0$.

Вставив последнее в выражение K_0, получаем

$$K_0=\left(4Bm-2c+16m^3-8Am^2\right)^2-$$
$$-n\left(16m^2-4Am\right)\left(4B+16m^2-8Am\right)+ \qquad (52)$$
$$+4(4m-A)^2n^2+32Cmn-8ACn=$$
$$[m\left(4B+16m^2-8Am\right)-2n(4m-A)-2c]^2.$$

Теперь можем $\sqrt{\Omega}$ представить в следующем виде:

$$\sqrt{\Omega}=m\left(4B+16m^2-8Am\right)-$$
$$-2n(4m-A)-2c+\frac{AK_1}{\sqrt{K_0}}\varepsilon. \qquad (53)$$

Последнее слагаемое мы не разворачиваем, ибо, как увидим в дальнейшем, оно нам не будет нужно.

Вставим полученные выше соотношения в уравнения (40), (43) – (44) работы [1], а затем отбрасываем малые высших порядков, окончательно получим:

$$K_{q_1}=\left\{B+8m^2-3Am-2n-\frac{K_1}{2\sqrt{K_0}}-\right.$$
$$-(4Bm-2c+16m^3-8Am^2- \qquad (54)$$
$$\left.-8mn+2An)/A\varepsilon\right\}\frac{\mu^2}{E};$$

$$\xi^2=\left[5m^2-2Am+\frac{A^2}{4}-n-\right.$$
$$-\frac{K_1}{\sqrt{K_0}}-(4Bm-2c+16m^3- \qquad (55)$$
$$\left.-8Am^2-8mn+2An)/A\varepsilon\right]\mu^2;$$

$$\eta^2=\left\{\frac{(4m)^2}{16}-(\left(4B-A^2\right)m-2c+\right.$$
$$+m\left[\left(4m-A\right)^2-A\varepsilon\left(8m-2A-A\varepsilon\right)\right]+$$
$$+\left(4m-A-A\varepsilon\right)2n)/(2\left(8m-2A-A\varepsilon\right))+$$
$$+\left(m\left(4B+16m^2-8Am\right)-2n\left(4m-A\right)-\right. \qquad (56)$$
$$\left.\left.-2c+\frac{AK_1}{\sqrt{K_0}}\varepsilon\right)/\left(2\left(8m-2A-A\varepsilon\right)\right)\right\}\mu^2=$$
$$=\left[m^2-n^2+(...)\varepsilon\right]\mu^2.$$

Докажем, что при $4m-A-Az_0=0$ получается Эйлерова нагрузка.

Выражение K_{q_1}, ξ^2, и η^2 получим из уравнений (54) – (56), приняв в них $\varepsilon=0$.

Так как K_{q_1} должно быть конечной величиной, то:

$$K_{q_1}=\left[-(4Bm-2c+16m^3-8Am^2-\right.$$
$$\left.-8mn+2An)/A\varepsilon\right]\frac{\mu^2}{E}; \qquad (57)$$

$$\xi^2=[-(4Bm-2c+16m^3-8Am^2-$$
$$-8mn+2An)/A\varepsilon]\mu^2; \qquad (58)$$

$$\eta^2=\left[m^2-n^2\right]\mu^2. \qquad (59)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках (57), равна бесконечности. Отсюда следует, что $\mu=0$.

Из (57) и (58) имеем

$$\xi^2=EK_{q_1}. \qquad (60)$$

Отсюда следует, что ξ величина тоже конечная, а $\eta=0$.

Уравнение связи (33) работы [1] для свободно опертой пластины запишется следующим образом:

$$\cos 2\xi\cos 0-\cos 0-\left[\xi-\frac{\xi^3}{\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}\right]\times\sin 2\xi\frac{\sin 2\eta}{2\eta}=0. \qquad (61)$$

Так же, как и в разделе 1, случай 2, для свободно опертой пластины, получаем $\xi=\frac{\pi}{2}$ и $K_{q_1}=\frac{\pi^2}{4E}$.

Форма потери устойчивости – Эйлерова.

Уравнение связи (34) работы [1] для жестко заделанной пластины запишется следующим образом:

$$\cos 2\xi\cos 0-\cos 0-\left[\frac{\left(\frac{Az\mu}{2}\right)^2-\left(\xi^2+0\right)}{\xi}\right]\times \qquad (62)$$
$$\times\sin 2\xi\frac{\sin 2\eta}{2\eta}=0.$$

Как и в разделе 1, случай 2, получаем:

$$\xi=\pi \text{ и } K_{q_1}=\frac{\pi^2}{E}.$$

Теперь будем искать условия, при которых критическая нагрузка снижается по отношению к Эйлеровой.

Для свободно опертой пластины выше получено, что при $z=z_0$ и $\xi=\frac{\pi}{2}$

$$\eta=0 \text{ и } \mu=0.$$

При $z=z_\varepsilon$ ожидаем, что η будет мало по сравнению с ξ, а ξ будет мало отличаться от $\frac{\pi}{2}$.

Пусть $\xi=\frac{\pi}{2}-\delta$, где δ – малая величина по отношению к $\frac{\pi}{2}$.

Соотношение между величинами, входящими в уравнение связи (33) работы [1], такое же, как и в случае изолированного действия K_{q_1} (40):

$$\delta=\frac{2\left(z_\varepsilon A\mu\right)^2}{\pi^3}.$$

Из этого же соотношения получаем:

$$\xi^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi\delta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{2(4m - A - A\varepsilon)^2 \mu^2}{\pi^2}, \quad (63)$$

откуда

$$\mu^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{F^2}{\mu^2} + \frac{2(4m-A)^2}{\pi^2}}. \quad (64)$$

Вставив в (54) данное выражение μ^2 с входящим в него в развернутом виде членом $\frac{\xi^2}{\mu^2}$ из уравнения (55), получаем:

$$\begin{aligned} K_{q_1} = {} & [(-(4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - 8mn + \\ & +2An)/A\varepsilon + B + 8m^2 - 3Am - 2n - \\ & -\frac{K_1}{2\sqrt{K_0}})/(-(4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - \\ & -8mn + 2An)/A\varepsilon + 5m^2 - 2Am + \frac{A^2}{4} - n - \\ & -\frac{K_1}{2\sqrt{K_0}} + \frac{32m^2 - 16Am + 2A^2}{\pi^2})]\frac{\pi^2}{4E} = \\ & = [1 - ((B - \frac{A^2}{4} + 3m^2 - Am - n - \frac{32m^2}{\pi^2} + \\ & + \frac{16Am}{\pi^2} - \frac{2A^2}{\pi^2})/(4Bm - 2c + 16m^2 - 8Am^2 - \\ & -8mn + 2An))A\varepsilon]\frac{\pi^2}{4E}. \end{aligned} \quad (65)$$

Из выражения (54) видим, что

$$\left(-\frac{2A\varepsilon}{4Bm - 2c + 16m^3 - 8Am^2 - 8mn + 2An}\right)$$

должно быть всегда положительным. Значит, положительный числитель дроби определяет повышение K_{q_1}, а отрицательный – его понижение.

Условие падения K_{q_1}, выражается уравнением

$$B - \frac{A^2}{4} + 3m^2 - Am - n - \frac{32m^2}{\pi^2} + \frac{16Am}{\pi^2} - \frac{2A^2}{\pi^2} = 0. \quad (66)$$

В случае жестко заделанной пластины значение ξ близко к π.

Уравнение связи (34) работы [1] запишем в следующем виде:

$$\cos 2(\pi - \xi)\cos 2\eta - \cos z_\varepsilon A_\mu + \frac{\left(\frac{z_\varepsilon A\mu}{2}\right)^2 - (\xi^2 + \eta^2)}{2\xi\eta}\sin 2(\pi - \xi) \times \sin 2\eta = 0. \quad (67)$$

Отсюда можем с большой степенью точности записать:

$$\begin{aligned} & \left[1 - 2(\pi - \xi)^2 + ...\right](1 - 2\eta^2) - \\ & -\left[1 - \frac{(z_\varepsilon A\mu)^2}{2} + ...\right] + \frac{\frac{(z_\varepsilon A\mu)^2}{4} - (\xi^2 + \eta^2)}{2\eta\xi} \times \\ & \times 2(\pi - \xi)2\eta = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Уравнение (68) можно переписать как

$$-2\pi^2 + 4\pi\xi - 2\xi^2 - 2\eta^2 + \frac{(z_\varepsilon A\mu)^2}{2} + \\ + \frac{(z_\varepsilon A\mu)^2}{2}\frac{\pi}{\xi} - \frac{(z_\varepsilon A\mu)^2}{2} - \frac{2\pi\eta^2}{\xi} - 2\pi\xi + 2\eta^2 + 2\xi^2 = 0$$

или

$$-2\pi^2 + 2\pi\xi + \frac{(z_\varepsilon A\mu)^2}{2}\frac{\pi}{\xi} - \frac{2\pi\eta^2}{\xi} = 0,$$

или

$$\pi\xi = \xi^2 + \frac{(z_\varepsilon A\mu)^2}{4} - \eta^2. \quad (69)$$

Последнее уравнение представим в следующем виде

$$\pi\left(\frac{\xi}{\mu}\right)\mu = \left[\left(\frac{\xi}{\mu}\right)^2 + \frac{z_\varepsilon^2 A^2}{4} - \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2\right]\mu^2. \quad (70)$$

Отсюда:

$$\mu^2 = \pi^2 \frac{\left(\frac{\xi}{\mu}\right)^2}{\left[\left(\frac{\xi}{\mu}\right)^2 + \frac{z_\varepsilon^2 A^2}{4} - \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2\right]^2}; \quad (71)$$

$$K_{q_1} = \frac{\frac{K_{q_1}}{\mu^2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right)^2}{\left[\left(\frac{\xi}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2 + \frac{z_\varepsilon^2 A^2}{4}\right]^2}\pi^2. \quad (72)$$

Вставив в полученное выражение для K_{q_1} величины $\frac{K_{q_1}}{\mu^2}$, $\left(\frac{\xi}{\mu}\right)^2$, $\left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2$ и $\frac{z_\varepsilon^2 A^2}{4}$ в развернутом виде из уравнений (54) – (56) и значение z_ε, получим

$$K_{q_1}=\left[\frac{\left(1-\dfrac{B+8m^2-3Am-2n-\dfrac{K_1}{2\sqrt{K_0}}}{4Bm-2c+16m^3-8Am^2+2An}A\varepsilon\right)\left(1-\dfrac{5m^2-2Am+\dfrac{A^2}{4}-n-\dfrac{K_1}{2\sqrt{K_0}}}{4Bm-2c+16m^3-8Am^2+2An}A\varepsilon\right)}{\left(1-\dfrac{8m^2-4Am+\dfrac{A^2}{2}-\dfrac{K_1}{2\sqrt{K_0}}}{4Bm-2c+16m^3-8Am^2+2An}A\varepsilon\right)^2}\right]\frac{\pi^2}{4}= \tag{73}$$

$$=\left[1-\frac{B-\dfrac{3}{4}A^2-3m^2+3Am-3n}{4Bm-2c+16m^3-8Am^2+2An}A\varepsilon\right]\frac{\pi^2}{4}.$$

Из уравнения (54) видим, что K_{q_1} положительно при положительном значении дроби

$$-\frac{4Bm-2c+16m^3-8Am^2-8mn+2An}{A\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что падение K_{q_1} по отношению к его Эйлеровому значению получаем при отрицательном числителе дроби, входящей в выражение K_{q_1}.

Условие падение K_{q_1} выражается уравнением

$$B-\frac{3}{4}A^2-3m^2+3Am-3n=0. \tag{74}$$

Уравнение (66) и (74) дают границы прямого участка диаграммы совместного действия.

Из полученных выше результатов можно сделать такие выводы:

1. При совместном действии трех нагрузок коэффициент критической нагрузки K_{q_1} – постоянен и равен Эйлеровому значению в большом диапазоне действия сдвигающей и продольной сжимающей нагрузок.

2. Границы постоянного значения K_{q_1} и точки начала его снижения получаются при значениях сдвигающей и продольной сжимающей нагрузок, определяемых соотношениями:

– для свободно опертой пластины

$$B-\frac{A^2}{4}+3m^2-Am-n-$$
$$-\frac{32m^2}{\pi^2}+\frac{16Am}{\pi^2}-\frac{2A^2}{\pi^2}=0;$$

– для жестко заделанной пластины

$$B-\frac{3}{4}A^2-3m^2+3Am-3n=0.$$

Литература

1. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Точный метод. Часть 1. Вывод общих уравнений для коэффициентов критической нагрузки. Устойчивость пластины при совместном действии двухстороннего сжатия и сдвига // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 1 (27). – С.96-103.