УДК 621.45

А.В. ЛОЯН, С.Ю. НЕСТЕРЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ В УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВЕННОЙ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ И НЕОДНОРОДНОСТИ

Представлена система уравнений моментов функции распределения в диссипативном приближении метода локального термодинамического равновесия, не требующая в отличие от известных предположения о несущественности изменения диссипативных характеристик на длине и за время свободного пробега.

локальное термодинамическое равновесие, диссипативные процессы, вязкость, теплопроводность

Введение

Развитие математических моделей процессов в электроракетных двигателях (ЭРД) в последние годы демонстрирует существенную роль диссипативных процессов в балансе импульсов и энергии компонент плазмы в ЭРД, прежде всего – электронов. Общей характеристикой диссипативных процессов (теплопроводности и вязкости) является наличие переноса энергии или проекции импульса в направлении, в котором отсутствует или является несущественным перенос частиц. Наиболее ярко такие процессы проявляются в стационарном плазменном двигателе (СПД), схема которого представлена на рис. 1.

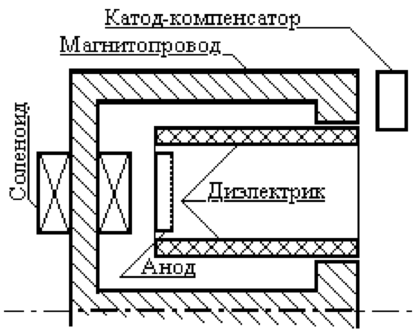

Рис. 1. Стационарный плазменный двигатель

Важной особенностью режима работы СПД является наличие значительной азимутальной проекции среднемассовой скорости электронов $V_{e\varphi}$. В рассеяниях на диэлектрической стенке (рис. 1) значительная часть $V_{e\varphi}$ хаотизируется, что приводит к двум важным процессам:

– радиальному потоку механической составляющей энергии электронов из плазмы на стенку и тепловой составляющей - обратно;

– радиальному потоку азимутальной проекции импульса электронов.

Характерно, что оба названных процесса происходят при незначительном радиальном потоке массы электронов через барьер плавающего потенциала между плазмой и диэлектриком. Таким образом, оба процесса должны описываться как диссипативные. Неучет таких процессов в любой математической модели СПД привел бы к значительным ошибкам в оценке энергетического баланса [1] электронов и механизма пристеночной проводимости [2, 3].

При этом плазма в СПД, как и в большинстве типов ЭРД, характеризуется длинами свободных пробегов, не малыми по сравнению с размерами областей движения компонент.

Таким образом, в плазме ЭРД диссипативные составляющие плотностей потоков импульса и энергии не могут рассматриваться как слабо изменяющиеся на длине и (в нестационарных режимах) за время свободного пробега.

Постановка задачи. Состояние проблемы. При построении математических моделей процессов в газах (в том числе, и плазме) конкурирующими являются два метода описания: кинетический и газодинамический. Первый подразумевает решение кинетического уравнения [4]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla f+\frac{\vec{F}}{m}\cdot\nabla_v f=\frac{\delta f}{\delta t}, \qquad (1)$$

где f – функция распределения частиц по скоростям; $\vec{v}$ – скорость; $\vec{F}$ – сила; ∇_v – градиент в пространстве скоростей; $\frac{\delta}{\delta t}$ – изменение в единицу времени в результате столкновений.

Второй метод предполагает решение газодинамических уравнений для отыскания непосредственно объемных характеристик: концентрации частиц, плотности импульса, плотности энергии.

При этом кинетический метод наиболее точен в постановке задачи, но требует чрезвычайно сложных математических и вычислительных средств для решения. Газодинамический метод более прост в решениях, но менее точен в исходной постановке.

Последнее определяется следующим обстоятельством. Газодинамические уравнения записываются как уравнения моментов функции распределения (УМФР) – уравнение для плотности какой-либо характеристики получается умножением каждого из слагаемых (1) на соответствующую характеристику одной частицы (1 – для количества частиц, $m\vec{v}$ – для импульса, $mv^2/2$ – для энергии) и последующим интегрированием по всем значениям скорости. Традиционным для электрогазодинамики является использование уравнений неразрывности, движения и энергии:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{\Gamma}=\frac{\delta n}{\delta t}; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{p}_v}{\partial t}+\sum_{km} i_k\frac{\partial \Pi_{km}}{\partial x_m}-m\left(n\vec{w}+\vec{\Gamma}\times\vec{\omega}\right)=\frac{\delta \vec{p}_v}{\delta t}; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{q}-m\vec{\Gamma}\cdot\vec{w}=\frac{\delta \varepsilon_v}{\delta t}, \qquad (4)$$

где n – концентрация; $\vec{\Gamma}=n\vec{V}$ – плотность потока частиц; $\vec{V}$ – среднемассовая скорость; $\vec{p}_v=m\vec{\Gamma}=mn\vec{V}$ – плотность импульса; Π_{km} – компонента кинетического тензора (тензора плотности потока импульса); $\varepsilon_v=\frac{1}{2}\sum_m \Pi_{mm}$ – плотность энергии; $\vec{q}$ – плотность потока энергии; $\vec{w}=q\vec{E}/m$ – электростатическое ускорение; $\vec{\omega}=q\vec{B}/m$ – циклотронная частота.

При этом:

$$\vec{V}=\left\langle\vec{v}\right\rangle; \quad \Pi_{km}=\Pi_{mk}=mn\left\langle v_k v_m\right\rangle, \qquad (5)$$

$$\varepsilon_v=\frac{mn\left\langle v^2\right\rangle}{2}; \quad \vec{q}=\frac{mn\left\langle v^2\vec{v}\right\rangle}{2}, \qquad (6)$$

где $\langle\ \rangle$ – символ осреднения по скоростям.

Приближенность газодинамического описания обусловлена двумя основными проблемами:

– невозможностью без использования явного выражения для f записи правых (столкновительных) частей (2) – (4);

– принципиальной незамкнутостью системы УМФР: при записи уравнения момента очередной степени наиболее высокое в (1) по порядку скорости второе слагаемое правой части вводит три момента более высокой степени, не содержащиеся в предыдущих уравнениях.

Проблема незамкнутости системы УМФР более очевидно проявляется при введении так называемой сопутствующей системы координат (ССК) – инерциальной системы отсчета, в которой мгновенное и локальное значение среднемассовой скорости равно нулю. В дальнейшем параметры, вычисленные в ССК, обозначены индексом °. Уравнения (2), (3) в таких параметрах выглядят так:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot\left(n\vec{V}\right)=\frac{\delta n}{\delta t}; \qquad (7)$$

$$m\frac{\partial}{\partial t}\left(n\vec{V}\right)+mn\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}+m\vec{V}\nabla\cdot\left(n\vec{V}\right)+ \\ +\sum_{km} i_k\frac{\partial P_{km}}{\partial x_m}-mn\left(\vec{w}+\vec{V}\times\vec{\omega}\right)=\frac{\delta \vec{p}_v}{\delta t}, \qquad (8)$$

где P_{km} – компонента тензора давления (кинетический тензор в ССК):

$$P_{km}=\Pi^{\circ}_{km}=mn\left\langle v^{\circ}_k v^{\circ}_m\right\rangle; \qquad (9)$$

$$\vec{v}^{\circ}=\vec{v}-\vec{V}. \qquad (10)$$

Выражения для плотности и плотности потока энергии (6) можно записать так:

$$\varepsilon_v=\frac{mnV^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_m P_{mm}, \qquad (11)$$

$$\vec{q}=\left(\frac{mnV^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_m P_{mm}\right)\vec{V}+\sum_{km} i_k P_{km} V_m+\vec{g}, \quad (12)$$

где $\vec{g}$ – плотность потока энергии в ССК:

$$\vec{g}=\vec{q}^{\circ}=\frac{mn\left\langle v^{\circ 2}\vec{v}^{\circ}\right\rangle}{2}. \quad (13)$$

Уравнение неразрывности (7) пишется как формула для отыскания концентрации n, но содержит три неизвестных проекции среднемассовой скорости $\vec{V}$. Уравнение движения (8) пишется как формула для отыскания трех последних, но содержит шесть новых неизвестных компонент тензора давления P_{km}. Бесперспективность попыток получения замкнутой системы УМФР проявляется в том, что в уравненении энергии (4) уже не ставится задача отыскания всех компонент тензора давления, но только полусуммы его диагональных слагаемых (11). В редких случаях [5] уравнения для каждой компоненты тензора давления все-таки записывают как исходные, не предлагая однако рецептов вычисления вновь появляющихся в этих уравнениях компонент тензора третьего ранга:

$$g_{kmn}=\frac{mn\left\langle v_k^{\circ} v_m^{\circ} v_n^{\circ}\right\rangle}{2}. \quad (14)$$

При этом уравнение энергии (4), (12) также содержит и новый неизвестный вектор $\vec{g}$ плотности потока энергии в ССК.

Обе названные проблемы снимаются в электрогазодинамике искусственно введением предположения о виде функции распределения. Именно, в представлении о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР) функция распределения в каждый момент времени в каждой точке считается равновесной (максвелловской). Равновесное распределение характеризуется равенством нулю величины $\vec{g}$ и скалярностью (равенством нулю недиагональных и друг другу – диагональных компонент тензора) давления.

Приближение ЛТР безоговорочно применяется при этом к вычислению столкновительных правых частей уравнений системы УМФР. Факт же, что равновесная функция распределения является решением (1) только при неизменных в пространстве и во времени параметрах, учитывается внесением диссипативных поправок:

– тензора вязкости π_{km}:

$$P_{km}=\delta_{km}P+\pi_{km}; \quad (15)$$

$$P=nkT=\frac{1}{3}\sum_m P_{mm}; \quad (16)$$

$$\pi_{km}=mn\left\langle v_k^{\circ} v_m^{\circ}-\delta_{km}\frac{v^{\circ 2}}{3}\right\rangle; \quad (17)$$

– теплопроводности, которая и есть, собственно, плотность потока энергии $\vec{g}$ в ССК.

В новых переменных уравнение (8) может быть записано так:

$$\begin{gathered} m\frac{\partial}{\partial t}\left(n\vec{V}\right)+mn\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}++m\vec{V}\nabla\cdot\left(n\vec{V}\right)+\nabla P+ \\ +\sum_{km} i_k\frac{\partial \pi_{km}}{\partial x_m}-n\vec{w}-n\vec{V}\times\vec{\omega}=\frac{\delta\,\vec{p}_v}{\delta t}. \end{gathered} \quad (18)$$

С учетом симметричности и очевидного из (15) – (17) равенства нулю суммы диагональных компонент тензор вязкости содержит пять независимых переменных. Вместе с тремя проекциями $\vec{g}$ они составляют восемь скалярных неизвестных. В приближении ЛТР система УМФР замыкается дополнением ее уравнениями вязкости и теплопроводности [4]:

$$\pi_{km}=-\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_m}+\frac{\partial V_m}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\delta_{km}\nabla\cdot\vec{V}\right); \quad (19)$$

$$\vec{g}=-\kappa\nabla T. \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20), а также способы вычисления коэффициентов вязкости η и теплопроводности κ применимы [4] при значительно более сильных, чем для системы УМФР, предположениях:

1. Компоненты тензора вязкости существенно меньше величины давления.

2. Величина $\vec{g}$ существенно меньше комплекса $(kT)^{3/2}m^{-1/2}$.

3. Функция распределения имеет вид:

$$\begin{gathered} \frac{f(\vec{v})-f_0\left(v^{\circ}\right)}{f_0\left(v^{\circ}\right)}\frac{nk^2T^2}{m}=F_g\left(v^{\circ}\right)\vec{g}\cdot\vec{v}^{\circ}+ \\ +\frac{F_\pi\left(v^{\circ}\right)}{2}\sum_{km}\pi_{km}\left(v_k^{\circ} v_m^{\circ}-\frac{\delta_{km}}{3}v^{\circ 2}\right), \end{gathered} \quad (21)$$

где f_0 – максвелловская функция распределения в ССК.

4. Функции F_π и F_g имеют вид:

$$F_\pi\left(v^\circ\right)=1\,; \qquad F_g\left(v^\circ\right)=\frac{m v^{\circ 2}}{5kT}-1\,. \qquad (22)$$

5. Относительное изменение величин диссипативных поправок в пространстве мало на длине свободного пробега.

6. Относительное изменение величин диссипативных поправок во времени мало за время свободного пробега.

7. В процессах вязкости и теплопроводности главную роль играют рассеяния друг на друге частиц одного сорта.

В силу названных выше причин последние три предположения в плазме ЭРД не выполняются, и существующие способы учета диссипативных процессов неприемлемы для описания ЭРД.

Спорность выражений (19) и (20) в отношении процессов в плазме ЭРД в значительной мере усугубляется также наличием в последних магнитного поля с немалым (чаще – большим) параметром Холла для электронов. Рекомендация в выражениях для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности в сильном магнитном поле использовать циклотронный радиус вместо длины свободного пробега является лишь качественной и не охватывает случаи, когда названные размеры сопостоавимы.

Задача данных исследований. Задачей данной работы является получение выражений для диссипативных поправок при использовании предположений не сильнее тех, в которых записаны уравнения неразрывности (7), движения (18) и энергии (4), (12).

Решение поставленной задачи

Процесс на траектории. Уравнение изменения во времени и в пространстве величин π_{km} записывалось непосредственно из (1) в предположениях 1, 3. Использование предположения 1 позволило пренебречь величинами π_{km} по сравнению с давлением P в слагаемых, в которые π_{km} и P входят симметрично. Предположение 3 позволило ограничиться рассмотрением вектора $\vec{g}$ вместо тензора третьего ранга g_{kmn} ввиду зависимости:

$$g_{kmn}=\frac{\delta_{mn}\,g_k+\delta_{kn}\,g_m+\delta_{km}\,g_n}{5}\,. \qquad (23)$$

В результате получено выражение:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\pi_{km}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\pi_{km}\vec{V}\right)+\\&+\frac{2}{5}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_m}+\frac{\partial g_m}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\delta_{km}\,\nabla\cdot\vec{g}\right)+\\&+P\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_m}+\frac{\partial V_m}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\delta_{km}\nabla\cdot\vec{V}\right)=\\&=\frac{\delta\pi_{km}}{\delta t}+i_k\cdot\left(\vec{\pi}_m\times\vec{\omega}\right)+i_m\cdot\left(\vec{\pi}_k\times\vec{\omega}\right),\end{aligned} \qquad (24)$$

где $\vec{\pi}_k$ – вектор-строка тензора π_{km}:

$$\vec{\pi}_k=\sum_m i_m\pi_{km}\,. \qquad (25)$$

Уравнение изменения во времени и в пространстве величины $\vec{g}$ записывалось непосредственно из (1) с использованием предположения 2, а также аналогичного ему предположения о малости по сравнению с максвелловскими немаксвелловских составляющие тензора 4 ранга, возникающего в уравнении теплопроводности:

$$Q_{ikmn}=m\,n\left\langle v_i^\circ v_k^\circ v_m^\circ v_n^\circ\right\rangle. \qquad (26)$$

В результате получено:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{g}-\frac{7}{5}\vec{g}\,\nabla\cdot\vec{V}+\frac{7}{5}\left(\vec{g}\cdot\nabla\right)\vec{V}+\\&+\frac{2}{5}\sum_{km}i_k\,g_m\frac{\partial V_m}{\partial x_k}+\frac{5}{2}\frac{Pk}{m}\nabla T=\frac{\delta\vec{g}}{\delta t}+\vec{g}\times\vec{\omega}.\end{aligned} \qquad (27)$$

Процессы в столкновениях. Предположения (3) и (4) были использованы при вычислении столкновительных слагаемых в правых частях (24) и (27). В случае рассеяния однородных частиц полученные выражения имеют вид:

$$\frac{\delta\pi_{km}}{\delta t}=-\frac{3}{5}\nu\,\pi_{km}\,; \qquad (28)$$

$$\frac{\delta\vec{g}}{\delta t}=-\frac{2}{5}\nu\,\vec{g}\,, \qquad (29)$$

где ν – эффективная частота столкновений:

$$\nu=n\left\langle v\sigma_{tr}\right\rangle\,, \qquad (30)$$

где σ_{tr} – транспортное сечение.

При рассеянии разнородных частиц выражения, соответствующие (28), (29), включают также слагаемые, содержащие разности среднемассовых скоростей компонент, разности температур, разности диссипативных поправок и в общем случае являются достаточно громоздкими. Однако, при описании именно электронов (наиболее возмущенной компоненты плазмы в ЭРД) эти выражения существенно упрощаются ввиду значительной разницы масс электрона и остальных частиц в плазме.

Заключение

Сформулирована система уравнений моментов функции распределения с учетом диссипативных процессов. При этом, в отличие от общепринятого описания:

– уравнения изменения во времени вязкостной поправки π_{km} к компоненте кинетического тензора и кондуктивной поправки $\vec{g}$ к плотности потока энергии получены без предположения о несущественности изменения названных поправок в пространстве на длине и во времени – за время свободного пробега;

– в записи левых частей названных уравнений не использовано предположение о конкретной зависимости функций F_π и F_g в (22);

– предположения (22) использованы только в выражениях для изменения величин π_{km} и $\vec{g}$ в столкновениях, что соответствует общему уровню точности записи столкновительных слагаемых в системе УМФР, в том числе и в уравнениях неразрывности, движения и энергии;

– в полученных уравнениях роль магнитного поля в диссипативном переносе импульса и энергии отражена на общем для кинетики уровне точности и не требует малообоснованных аналогий между циклотронными и столкновительными процессами.

Полученные уравнения вязкости (24) и теплопроводности (27) содержат как частный случай «классические» (19), (20) и вырождаются в них при выполнении условий, в которых последние получены:

– неизменность всех параметров во времени;

– неизменность всех параметров, кроме среднемассовой скорости в (24) и температуры в (27), в пространстве;

– однородность среды;

– отсутствие магнитного поля.

Таким образом, полученная система уравнений: является во многих случаях более точной и ни в одном случае – менее точной, чем "классическая", и не треубет для анализа качественно более сложных аналитических и вычислительных средств.

Литература

1. Бугрова А.И., Красненков М.А., Ткачёв В.И. Экспериментальное исследование энергитического баланса в УЗДП // Теплофизика высоких температур. – 1981. – Т. 19, № 2. – С.428-430.

2. Ким В. Анализ механизмов переноса электронов поперёк магнитного поля и особенностей распределения электрического поля в канале УЗДП по результатам локальных измерений параметров плазмы // Источники и ускорители плазмы: Межвуз. темат. сб. научн. тр. – Х.: ХАИ, 1981. – Вып. 5. – С. 9-18.

3. Бугрова А.И., Морозов А.И., Харчевников В.К. Эффекты пристеночной проводимости в канале УЗДП // Письма в ЖТФ. – 1983. – Т. 9, № 1. – С .3-6.

4. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 528 с.

5. Росси Б., Ольберт С. Введение в физику космического пространства. – М.: Атомиздат, 1974. – 392 с.

Поступила в редакцию 21.05.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.И. Оранский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского «ХАИ», Харьков.