

УДК 621.452.3.037.026.8 : 539.4

О.Б. БАЛАКШИН¹, Б.Г. КУХАРЕНКО¹, А.А. ХОРИКОВ²

¹*Институт машиноведения им. А.А. Благодрава РАН, Россия*

²*Центральный институт авиационного машиностроения им. П.И. Баранова, Россия*

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ФЛАТТЕРЕ ЛОПАТОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПРОНИ

Показано, что для нестационарных колебаний с относительно стабильным спектром собственных частот роль информативных параметров, определяющих временную эволюцию этих колебаний, могут играть демпфирования на этих частотах. Собственные частоты нестационарных колебаний и их локальные во времени демпфирования могут быть оценены по методу Прони. Изменение знака и величины демпфирования на собственной частоте означает изменение роли этой частотной составляющей нестационарного колебания и позволяет предсказывать его неустойчивость.

флаттер, нестационарные колебания, временные ряды, спектральный анализ, метод Прони, собственные частоты, демпфирование

Введение

Для исследования динамических процессов при флаттере лопаток обычно используется преобразование Фурье. При этом должны выполняться условия Дирихле, основным среди которых является условие стационарности процессов. Очевидно, что на этапе возникновения флаттера это условие не выполняется.

В настоящей работе анализируются записи изменения напряжений (тензометрические данные) при нестационарных колебаниях лопаток компрессора и записи пульсаций давления в воздушном потоке в процессе возникновения флаттера при увеличении числа оборотов компрессора. Фурье-анализ этих записей показывает, что они характеризуются относительно стабильным спектром частот. Однако, роль частотных составляющих колебания меняется со временем и это приводит к существенно нестационарному характеру колебаний лопаток.

1. Формулирование проблемы

Задача состоит в определении особенностей временной эволюции динамических процессов при возникновении флаттера и установлении информатив-

ных параметров, определяющих эту эволюцию. Для рассматриваемых нестационарных колебаний эта задача не может быть решена в результате анализа колебаний непосредственно во временной области, поскольку характерное изменение огибающей амплитуды колебания существует только в достаточно крупном масштабе времени. В более мелких масштабах времени эта огибающая амплитуды колебаний испытывает биения и вообще ее изменение оказывается существенно не монотонным. Поэтому для определения особенностей временной эволюции флаттера должно использоваться спектральное оценивание записей колебаний. Отмеченная выше не-изменность спектра собственных частот является важным критерием постоянства физических свойств и целостности распределенной системы. Для таких распределенных систем важную информацию об изменениях, происходящих в системе, могут предоставлять временные зависимости демпфирования на собственных частотах системы.

1.1. Общие требования к спектральному анализу. С учетом нестационарности колебаний требуется спектральный анализ, который

– может без побочных эффектов выполнять спектральное оценивание сегментов временных ря-

дов во временных окнах ограниченной продолжительности;

- использует модель нестационарного временного ряда (например, возрастающего или убывающего во временном окне);
- определяет собственный спектр частот сегмента временного ряда.
- определяет демпфирования на собственных частотах

С этой точки зрения представляет интерес возможность использования метода Прони (Prony) для определения зависящих от времени спектров демпфирования нестационарных колебаний.

В методе Прони роль априорного знания играет представление о колебательном изменении временного ряда. Однако при идентификации сходства сегментов временного ряда отсутствует ряд ограничений, свойственных Фурье-преобразованию временных рядов.

Например, в результате Фурье-преобразования временных рядов, представляющих затухающие синусоиды вида

$$Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

получают оценки трех параметров: $A/\delta^{1/2}$ – Фурье-амплитуда; φ – фаза; ω – частота, точность определения которой зависит от величины δ .

В методе Прони используется разложение сегментов временных рядов, в результате которого для временных зависимостей вида

$$Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

определяются все четыре независимых параметра этих временных зависимостей: A , φ , δ , ω . Обычно флаттер компрессорных лопаток описывается в рамках линейной модели.

Для сегмента временного ряда, представляющего собой сумму затухающих синусоид с произвольным соотношением между их частотами, метод Прони дает точный результат при оценке дискретных спектров частот, демпфирования, фаз и амплитуд.

2. Метод Прони

2.1. Обоснование метода Прони. Линейная инвариантная относительно времени динамическая система. Рассмотрим линейную систему, не зависящую от времени

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где A и B – постоянные матрицы.

Предположим, система имеет исходное состояние $x(t) = x_0$ при t_0 посредством некоторого импульсного воздействия. Если импульсное воздействие прекращается, то (1) может быть переписано как ($u(t) = 0$):

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t). \quad (2)$$

Пусть матрица A размером $L \times L$ имеет собственные числа $\lambda[l]$, правые собственные вектора p_l и левые собственные вектора q_l [1]. В (2) порядок системы представляется L . Решение (2) выражается в виде суммы L компонент:

$$x(t) = \sum_{l=1}^L (q[l]^T x_0) p[l] \exp(\lambda[l]t). \quad (3)$$

Поскольку (1) – это линейная система, мы представляем $y(t)$ в форме

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t), \quad (4)$$

где C и D – постоянные матрицы.

Если воздействие удалено, то (4) упрощается до ($u(t) = 0$):

$$y(t) = C \cdot x(t), \quad (5)$$

которое в соответствии с (3) представляет сумму затухающих синусоид:

$$y(t) = \sum_{l=1}^M A[l] \exp(\delta[l]t) \cos(2\pi f[l]t + \varphi[l]). \quad (6)$$

В (6) используются следующие обозначения:

$A[l]$ – амплитуда компоненты l ;

$\delta[l]$ – фактор демпфирования компоненты l ;

$f[l]$ – частота компоненты l ;

$\varphi[l]$ – фаза компоненты l ;

$L = 2M$ – полное число затухающих компонент.

Используя формулу Эйлера, $\cos(2\pi f[l] t + \varphi[l])$ можно представить в виде суммы экспонент:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f[l] t + \varphi[l]) &= (\exp(j(2\pi f[l] t + \varphi[l])) + \\ &+ \exp(-j(2\pi f[l] t + \varphi[l]))) / 2 = \end{aligned} \quad (7)$$

$$\exp(2\pi f[l] t) \cdot \exp(j\varphi[l]) / 2 + \exp(-2\pi f[l] t) \cdot \exp(-j\varphi[l]) / 2.$$

Подставим (7) в (6) и пусть $t[k] = k \cdot \Delta t$, Δt – интервал дискретизации времени.

Тогда временной ряд для $y(t)$, состоящий из N образцов $y[k] = y(t[k])$, $t[k] = k \cdot \Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ может быть переписан как

$$y[k] = \sum_{l=1}^L r[l] z[l]^k, \quad (8)$$

где

$$r[l] = (A[l]/2) \exp(j\varphi[l]) \quad (9)$$

и

$$z[l] = \exp((\delta[l] + j2\pi f[l]) \Delta t) \quad (10)$$

называются, соответственно, вычетами и полюсами сегмента временного ряда, поскольку формула (8) подбна обратному Z-преобразованию временного ряда.

Отметим, что главными достоинствами метода Прони являются:

- возможность выделения главных энергетических составляющих колебания
- и восстановление оцифрованного колебания по формуле (8), а на основе этого - оценка точности выполненного спектрального анализа.

Полюса $z[l] = \exp(\delta[l] + j\omega[l])$, $l = [1: p]$ сегмента $\{y[k], k = [1: N]\}$ временного ряда определяют дискретные спектры демпфирования и частот $\{\delta[l], \omega[l], l = [1: p]\}$, а вычеты $r[l] = A[l] \cdot \exp(j\varphi[l])$, $l = [1: p]$ в этих полюсах – соответствующие дискретные спектры амплитуд и фаз $\{A[l], \varphi[l], l = [1: p]\}$, определенные для временного окна $t \in [0, t_N]$. Оценка временной зависимости дискретных спектров демпфирования и частот $\{\delta[l], \omega[l], l = [1: p]\}$ и соответствующих дискретных спектров амплитуд и фаз $\{A[l], \varphi[l], l = [1: p]\}$ осуществляется в результате последовательного сдвига временного окна фиксированной длины $N\Delta t$.

2.2. Оценка энергии частотных составляющих. Для оценки энергии частотных компонентов предполагается, что у всех частотных компонентов сегмента $\{y[k], k=1:N\}$ их временные зависимости затухают симметрично относительно начала отсчета времени.

Тогда спектр мощности

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \left| \sum_{l=1}^p \left\{ -\frac{\alpha[l]\delta[l] \exp(j\varphi[l])}{\delta[l]^2 + (\omega[l] - \omega)^2} + \text{к.с.} \right\} \right|^2, \quad (11)$$

где $\omega[l] = 2\pi f[l]$, $l = 1:p$ – круговые частоты полюсов.

Оценка для полного спектра мощности

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N x[k]^2 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left| \sum_{l=1}^M \left[\frac{A[l]\delta[l] \exp(j\varphi[l])}{\delta[l]^2 + (\omega[l] - \omega)^2} \right] \right|^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M \left(\frac{A[l]}{\sqrt{\delta[l]}} \right)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

так как фазы различных частотных составляющих считаются некоррелированными.

Метод Прони позволяет определить для сегмента временного ряда $\{y[k], k = 1:N\}$ его полюса (10), а на их основе спектры частот и демпфирования этого сегмента временного ряда

$$f[l] = \frac{1}{2\pi\Delta t} \text{Im}(\log(z[l]))$$

в диапазоне

$$\left[\frac{1}{N\Delta t}, \frac{1}{\Delta t} \right]$$

и

$$\delta[l] = \frac{1}{\Delta t} \text{Re}(\log(z[l])).$$

Таким образом, все в точности противоположно тому, как спектральные свойства оцениваются по методу Фурье.

Дискретное преобразование Фурье временного ряда $\{y[n], n = 1:N\}$ задает $N/2$ пар комплексно сопряженных формальных частот

$$\{f[k], k = 1:N\} = \{1/N\Delta t : 1/N\Delta t : 1/2\Delta t\},$$

для которых определяется результат Фурье преобразования $\{X[k], k = 1:N\}$ и:

$$A[k]^{def} = \text{abs}(X[k]);$$

$$\varphi[k]^{def} = \text{arg}(X[k]).$$

Спектр собственных частот временного ряда определяется в результате нахождения точек k_1, k_2, \dots локальных максимумов дискретной функции $\{A[k], k = 1:N\}$, т.е. частоты $f[k_1], f[k_2], \dots$ считаются собственными частотами временного ряда $\{y[n], n = 1:N\}$. Если требуется, то, после определения дискретных спектров частот и демпфирования временного ряда по методу Прони, можно также определить спектры амплитуд и фаз этого временного ряда.

3. Определение параметров флаттера по тензометрическим сигналам и пульсациям потока

Из спектрального анализа тензометрических сигналов (рис. 1) следует, что в них преобладают

две частоты. При времени $t = 11 \dots 17$ с превалирует спектральная составляющая с частотой $f = 197$ Гц, что соответствует крутильной форме колебаний лопатки, а при $t = 19 \dots 25$ с превалирует спектральная составляющая с частотой $f = 81$ Гц, что соответствует изгибной форме колебаний лопатки. При этом энергия изгибных колебаний более чем на порядок превышает энергию крутильных колебаний.

Декременты колебаний указывают, что крутильные колебания возникают на $\Delta t \approx 4$ с раньше, чем изгибные, и исчезают на $\Delta t \approx 35$ с раньше, причем градиенты изменения декрементов у крутильных колебаний гораздо меньше, чем у изгибных колебаний.

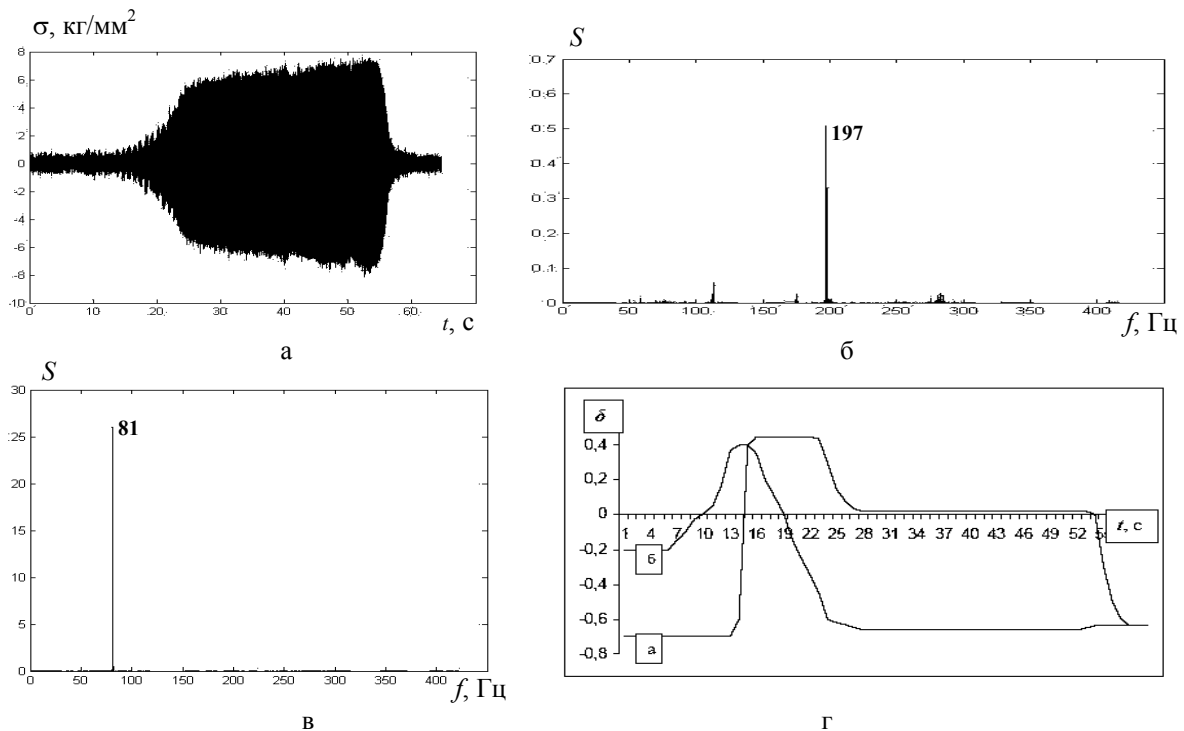


Рис. 1. Параметры флаттера по тензометрическим сигналам:

- а – зависимость напряжений от времени [3];
- б – зависимость энергии от частоты для временного интервала $\Delta t = 11 \dots 17$ с;
- в – зависимость энергии от частоты для временного интервала $\Delta t = 19 \dots 25$ с;
- г – зависимость затухания от времени для крутильной (а) и изгибной (б) форм

Спектральный анализ пульсаций потока согласно обобщенному эффекту Доплера должен был выявить диаметрально противоположные формы колебаний при флаттере с частотами $f_n = f_n + z f_p$ (z – номера диаметрально

противоположных форм. Из рис. 2 следует, что при крутильном флаттере такие диаметрально противоположные формы обнаружить трудно, а при изгибном флаттере в потоке возникают спектральные составляющие $f_n = 141, 201,$

261 Гц, чему при $f_p = 60$ Гц можно привести в соответствие диаметральные формы с $z = 1, 2, 3$ узловыми диаметрами.

Наибольшая энергия сосредоточена на форме с тремя узловыми диаметрами. Этой же форме соот-

ветствуют наибольшие значения декрементов колебаний. Однако, начинается флаттер ($\delta > 0$) по форме с одним узловым диаметром, что точно соответствует времени возникновения изгибного флаттера при $t \approx 14$ с по тензодатчику.

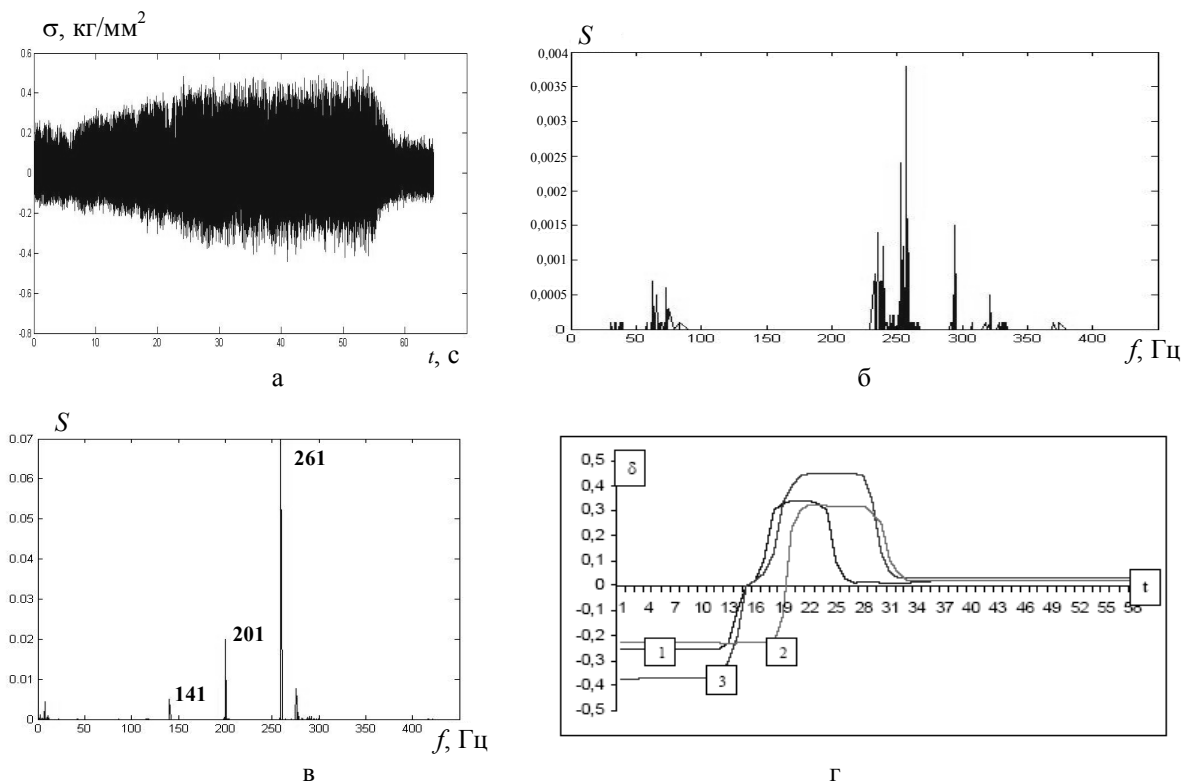


Рис. 2. Параметры флаттера по сигналам с датчиков пульсаций:

- а – зависимость давления в потоке от времени;
- б – зависимость энергии от частоты для $\Delta t = 11 \dots 17$ с;
- в – зависимость энергии от частоты для $\Delta t = 19 \dots 25$ с;
- г – временная зависимость демпфирования 1, 2, 3 диаметральных форм

Заключение

1. Для флаттера лопаток турбомашин с относительно стабильным спектром собственных частот роль информативных параметров, определяющих временную эволюцию этих колебаний, играют демпфирования на этих частотах.

2. Собственные частоты нестационарных колебаний и их локальные во времени демпфирования могут быть оценены по методу Прони.

3. Изменение знака и величины демпфирования на собственной частоте означает изменение роли этой частотной составляющей нестационарного колебания и позволяет предсказывать его неустойчивость.

Поступила в редакцию 6.06.2007

Рецензент: д-р техн. наук А.В. Фишгойт, ЦИАМ, Москва.