УДК 621 + 539

А.И. Сабакарь

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина

ПРИМЕНЕНИЕ ΓL-ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ МЕТАЛЛОВ СТАТИЧЕСКИМ И/ИЛИ ДИНАМИЧЕСКИМ НАГРУЖЕНИЯМИ

Теория R-функций позволяет находить решения краевых задач о формоизменении металлов при статической и/или динамической нагрузками с границами любой геометрии, кроме границ с «особыми» точками. Использование ΓL-функций обеспечивает получение структур решений их без указанной проблемы.

функция, структура решений, технологический процесс, обработка давлением, область, граница, конъюнкция, дизъюнкция, отрицание

Обработка металлов давлением является основой современного заготовительно-штамповочного производства любого крупного машиностроительного предприятия. Вопросы экономии черных, цветных металлов, легированных и жаропрочных сталей и сплавов решаются, прежде всего, в кузнечно-штамповочных цехах заводов. Службы главного металлурга и технолога призваны обеспечить получение заготовок деталей машин с максимальным коэффициентом использования материалов, минимальными трудовыми и энергетическими затратами при использовании совершенных инструментов и кузнечно-штамповочных машин. Все это требует поиска новых технологических решений, всестороннего анализа и выбора оптимальных режимов обработки заготовок.

Однако в сфере теоретического анализа технологических процессов заготовительно-штамповочного производства и отыскания оптимальных режимов их осуществления, за редким исключением, работы практически отсутствуют.

Несмотря на это, используя труды ученых в области теории пластичности и обработки металлов давлением таких, как А.А. Ильюшина, Л.М. Качанова, В.П. Колмогорова, Г.Я. Гунна, Ю.Н. Алексеева и др., а также в области прикладной математики в части создания R-функций В.Л. Рвачева, В.С. Проценко, В.Л. Курпа, Н.С. Синекопа и др., появляется возможность разрешить все указанные проблемы.

Использование теории R-функций предполагает получение полной информации о решении краевой задачи с организации его поиска [1]. Это, например, может быть поиск о симметрии решения, если постановка задачи инвариантна относительно некоторых типов преобразований симметрии, о законах малых градиентов и значений кривизны, о характере решения в окрестности угловых и других «особых» точек и т.д.

Метод R-функций, являясь аналитическим, содержит в себе конструктивные возможности для того, чтобы уже на уровне структурных формул полнее учесть информацию об искомом решении. В точках, которые являются для границы $\partial\Omega$ рассматриваемой области Ω особыми (угловые точки, ребра, точки стыка граничных условий), необходимо специально выбирать функцию $\omega(x)$, где $\omega(x) = 0$ – уравнение границы $\partial\Omega$, а также и уравнения $\omega_i(x) = 0$ для границ $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$. В действительности этот вопрос более сложен и необходимо учитывать поведение в окрестностях «особых» точек не только функций ω и ω_i , но и характер структурных зависимостей, в которые эти функции входят.

Следовательно, построенные структуры решений могут оказаться мало пригодными для краевых задач с «особыми» точками. Возможны случаи, когда структурные формулы теряют свойство полноты и приводят к большим погрешностям в случае, когда граница области имеет узкие врезы, щели и т.п.

Иногда особый характер поведения решения в угловых точках границы можно устранить в результате такого видоизменения краевой задачи, которое не искажало бы основных физических соотношений, было простым с математической точки зрения [2].

Однако искусственное изменение границы краевой задачи для некоторых технологических процессов, а именно, вырубки-пробивки, просечки и др. приводит, в конце концов, к снижению коэффициента использования материалов.

Поэтому предлагаем решать краевые задачи для этих случаев с помощью ГL-функций [3], свободных от изменения структуры решений в «особых» точках.

Далее, напомним определение ГL-функций. Пусть в пространстве R^n заданы функции $f_1 = f_1(x), f_2 = f_2(x)$, при $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Эти функции, определенные всюду в пространстве R^n и на множествах $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ таковы, что:

$$f_1 > 0 \text{ на } \Omega_1, \quad f_1|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad f_1 < 0 \text{ на } R^n \setminus \overline{\Omega}_1; \tag{1}$$
$$f_2 > 0 \text{ на } \Omega_2, \quad f_2|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad f_2 < 0 \text{ на } R^n \setminus \overline{\Omega}_2.$$

По определению систему множеств

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1 \cup \Omega_2, \ \Omega_1 \cap \Omega_2, \ \Omega_1 \setminus \Omega_2, \ \Omega_2 \setminus \Omega_1, \ R^n \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2, \ R^n \setminus \Omega_1 \cap \Omega_2, \tag{2}$$

а также подмножеств Ω^1 и Ω^{11} этих множеств, на которых $|f_1| \le |f_2|$, $|f_2| \le |f_1|$, соответственно, называем основной системой множеств для функций f_1 и f_2 и обозначаем $M = \{ \Omega : f_1, f_2 \}$.

А также по определению множества

$$\partial\Omega_1, \ \partial\Omega_2, \ \partial\Omega_1{}^1, \partial\Omega_1{}^{11}, \partial\Omega_2{}^1, \partial\Omega_2{}^{11} \tag{3}$$

называем ядрами функций f_1 и f_2 и систему этих множеств обозначают $K_{er}(f_1, f_2)$.

Тогда функция

$$F(x) = \Phi\,[f_1(x), f_2(x)], \ \ x \in R^n \tag{4}$$

называется ГL-функцией, когда она

а) определена и неотрицательна хотя бы на одном из множеств системы $M = \{ \Omega : f_1, f_2 \}$;

б) имеет непустое ядро и обращается в нуль только на одном из множеств системы $K_{er}(f_1, f_2)$ или на одном из множеств Ω^1 и Ω^{11}.

Здесь системы множества по дизъюнкции $\Omega_1 \cup \Omega_2$ (рис. 1) записываются как

$$\partial\Omega_1{}^1 \cup \partial\Omega_1{}^{11} = \partial\Omega_1 ; \qquad \partial\Omega_2{}^1 \cup \partial\Omega_2{}^{11} = \partial\Omega_2, \tag{5}$$

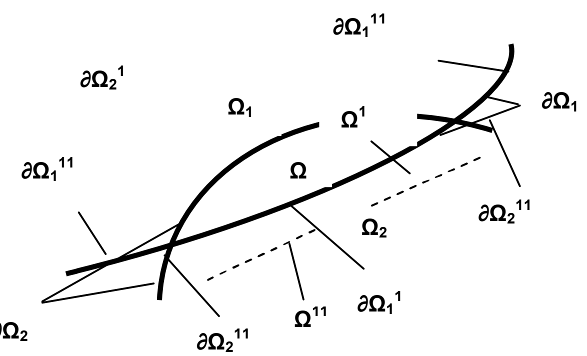

Рис. 1. Системы множеств и подмножеств

До настоящего времени рассмотрено семь ГL- систем.

Наибольший интерес представляют системы $\Gamma_0 L_0$ - и $\Gamma_e L_e$-функций:

а)

$$f_1\, \Gamma_0 f_2 = ((f_1^2 + f_2^2)^{1/2} - f_2) / 2;$$
$$f_2\, \Gamma_0 f_1 = ((f_1^2 + f_2^2)^{1/2} - f_1) / 2;$$
$$f_1\, L_0 f_2 = ((f_1^2 + f_2^2)^{1/2} + f_2) / 2;$$
$$f_2\, L_0 f_1 = ((f_1^2 + f_2^2)^{1/2} + f_1) / 2; \qquad (6)$$

б)

$$f_1\, \Gamma_e f_2 = (((e^{f1} f_2)^2 + f_1^2)^{1/2} - f_2) / 2;$$
$$f_2\, \Gamma_e f_1 = (((e^{f2} f_1)^2 + f_2^2)^{1/2} - f_1) / 2;$$
$$f_1\, L_e f_2 = (((e^{f1} f_2)^2 + f_1^2)^{1/2} + f_2) / 2;$$
$$f_2\, L_e f_1 = (((e^{f2} f_1)^2 + f_2^2)^{1/2} + f_1) / 2. \qquad (7)$$

Из определения ГL-функций следует, что их свойства существенным образом связаны со свойствами функций f_1 и f_2, входящих в систему множеств, а также с теми множествами, на которых они рассматриваются.

Системы ГL-функций определены, суммируемы, сохраняют знак и обращаются в нуль.

Представим некоторые свойства $\Gamma_0 L_0$- и $\Gamma_e L_e$-функций, сведенных в табл. 1 – 4.

Таблица 1

	$f_1\,\Gamma_0\,f_2$	$f_2\,\Gamma_0\,f_1$	$f_1\,L_0\,f_2$	$f_2\,L_0\,f_1$
$\partial\Omega_1^{1}$	0	$f_2 / 2$	f_2	$f_2 / 2$
$\partial\Omega_1^{11}$	$- f_2$	$- f_2 / 2$	0	$- f_2 / 2$
$\partial\Omega_2^{1}$	$f_1 / 2$	0	$f_1 / 2$	f_1
$\partial\Omega_2^{11}$	$- f_1 / 2$	$- f_1$	$- f_1 / 2$	0

Таблица 2

	$\partial(f_1\,\Gamma_0\,f_2)/\partial l$	$\partial(f_2\,\Gamma_0\,f_1)/\partial l$	$\partial(f_1\,L_0\,f_2)/\partial l$	$\partial(f_2\,L_0\,f_1)/\partial l$
$\partial\Omega_1^{1}$	0	$\partial(f_1 + f_2)/2\partial l$	$\partial f_2/\partial l$	$\partial(f_2 + f_1)/2\partial l$
$\partial\Omega_1^{11}$	$- \partial f_2/\partial l$	$- \partial(f_1 + f_2)/2\partial l$	0	$\partial(f_2 + f_1)/2\partial l$
$\partial\Omega_2^{1}$	$\partial(f_1 - f_2)/2\partial l$	0	$\partial(f_1 + f_2)/2\partial l$	$\partial f_1/\partial l$
$\partial\Omega_2^{11}$	$- \partial(f_1 + f_2)/2\partial l$	$- \partial f_1/\partial l$	$\partial(f_2 - f_1)/2\partial l$	0

Таблица 3

	$f_1\ \Gamma_e\ f_2$	$f_2\ \Gamma_e\ f_1$	$f_1\ L_e\ f_2$	$f_2\ L_e\ f_1$
$\partial\Omega_1{}^{I}$	0	f_2	$2\ f_2$	f_2
$\partial\Omega_1{}^{II}$	$-\ 2\ f_2$	$-\ f_2$	f_2	$-\ f_2$
$\partial\Omega_2{}^{I}$	f_1	$-\ f_1$	f_1	f_1
$\partial\Omega_2{}^{II}$	$-\ f_1$	$-\ f_1$	$-\ f_1$	f_1

Таблица 4

	$\partial(f_1\ \Gamma_e\ f_2)/\partial l$	$\partial(f_2\ \Gamma_e\ f_1)/\partial l$	$\partial(f_1\ L_e\ f_2)/\partial l$	$\partial(f_2\ L_e\ f_1)/\partial l$
$\partial\Omega_1{}^{I}$	0	$\partial(f_2 - f_1)/\partial l$	$2\ \partial f_2\ /\partial l$	$\partial(f_1 + f_2)/\partial l$
$\partial\Omega_1{}^{II}$	$-\ 2\ \partial f_2\ /\partial l$	$-\ \partial(f_1 + f_2)/\partial l$	0	$\partial(f_1 - f_2)/\partial l$
$\partial\Omega_2{}^{I}$	$\partial(f_1 - f_2)/\partial l$	0	$\partial(f_1 + f_2)/\partial l$	$2\ \partial f_1\ /\partial l$
$\partial\Omega_2{}^{II}$	$-\ \partial(f_1 + f_2)/\partial l$	$-\ 2\ \partial f_1\ /\partial l$	$\partial(f_2 - f_1)/\partial l$	0

Далее, отметим существенную связь между $\Gamma_0 L_0$–функциями и R-функциями, выражающуюся в наличии равенства между ними:

$$f_1 - f_1 \cap_0 f_2 = 2\ (f_1\ \Gamma_0 f_2);$$
$$f_2 - f_1 \cap_0 f_2 = 2\ (f_2\ \Gamma_0 f_1);$$
$$f_1\ U_0 f_2 - f_1 = 2\ (f_1\ L_0 f_2);$$
$$f_1\ U_0 f_2 - f_2 = 2\ (f_2\ L_0 f_1). \qquad (8)$$

При решении краевых задач возникает необходимость, как и при использовании R-функций, продолжить действие оператора дифференцирования с тех множеств, на которых он задан, на более широкое множество с непрерывностью на нем, что и отражено в труде [3].

Системы ΓL-функций и операции с ними вводятся в структурные формулы для каждой краевой задачи. В эти структурные формулы также включены все основные характеристики по определению напряженно-деформированного состояния материала заготовок. При этом используется функция μ, обеспечивающая использование для анализа процессов обработки металлов давлением общих закономерностей механики сплошных сред, то есть уравнений равновесия, непрерывности и теплообмена. Из них получается равенство направляющего тензора напряжений и направляющего тензора деформаций

$$\overline{D}_{\sigma} = \overline{D}_{e}. \qquad (9)$$

Как показано в работе [4], исходя из принципа инвариантности внутренних сил в теле, находящемся под воздействием сил, основным физическим законом в области больших пластических деформаций является условие совпадения направляющего тензора напряжений и направляющего тензора скоростей деформаций

$$\overline{D}_{\sigma} = \overline{D}_{\varepsilon} \qquad (10)$$

При этом вводится специфическая характеристика, названная коэффициентом жесткости

$$\xi_i = \sigma_i \,/\, 3\,\varepsilon_i = \sigma_s \delta \,/\, 3\,v_0, \qquad (11)$$

где σ_s – предел текучести материала заготовки; v_0 и δ – скорость и характерный размер заготовки.

Таким образом, при решении краевых задач с учетом динамического нагружения в структурные формулы вводятся различные коэффициенты жесткости.

Литература

1. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1979. – 196 с.

2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

3. Гончарюк И.В. Конструктивные и вычислительные методы математики, механики и кибернетики. Т. 1. Непрерывные функции с логическими и наследственными свойствами и некоторые их применения. – Х.: ХГУ, 1984. – 244 с.

4. Алексеев Ю.Н. Введение в теорию обработки металлов давлением, прокаткой и резанием. – Х.: ХГУ, 1969. – 108 с.

Поступила в редакцию 1.06.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Епифанов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.