УДК 533.6:629.7

И.Н. КЛЮШНИКОВ

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Украина

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Обосновывается возможность применения метода регуляризации Тихонова для нахождения устойчивого численного решения граничных интегральных уравнений в краевых задачах теории потенциала.

граничные интегральные уравнения, регуляризации численных методов решения краевых задач, метод регуляризации Тихонова, теория потенциала

Введение

При проектировании авиационной техники приходится решать задачи обтекания телесных компоновок потоком идеальной несжимаемой жидкости. Такие задачи описываются линейными и квазилинейными дифференциальными уравнениями (ДУ), при решении которых широкое применение получили методы граничных интегральных уравнений [1 – 4], которые позволяют вместо дифференциальных уравнений краевых задач рассматривать интегральные представления решений ДУ. Полученные граничные интегральные уравнения (ГИУ), как правило, являются сингулярными, и при численном решении возникает необходимость в применении регуляризирующих алгоритмов.

Вопросы регуляризации численных методов решения краевых задач математической физики рассматривались в работах [2, 5 – 9].

В настоящей работе обосновывается возможность применения метода регуляризации Тихонова для нахождения устойчивого численного решения ГИУ в краевых задачах теории потенциала.

Регуляризация численных методов решения краевых задач

Рассмотрим краевую задачу Неймана относительно функции потенциала φ:

$$L(\varphi) = 0, \tag{1}$$

где $L(\varphi)$ – линейный (квазилинейный) дифференциальный оператор.

Используя фундаментальное решение (или функцию Грина) дифференциального уравнения (1), приходим к ГИУ [3, 4]:

$$\begin{gathered}\varphi(X) + \iint\limits_S K(X-Y)\cdot\varphi(Y)dS = \\ = f(X),\ \ X \in S,\end{gathered} \tag{2}$$

где $K(X-Y)$ – ядро интегрального уравнения;

S – граничная поверхность.

Численное решение ГИУ (2) предполагает дискретизацию граничной поверхности S на малые граничные элементы σ_k : $\bigcup\limits_{k=1}^{N}\sigma_k \approx S$ и параметрическое представление функции потенциала φ по граничным элементам. В результате дискретизации приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{k=1}^{N}\varphi_k \cdot A_{jk} = f_j\,;\ \ j = \overline{1,N}\ , \tag{3}$$

где A_{jk} – элементы матрицы СЛАУ;

f_j – элементы вектора-столбца правой части СЛАУ;

N – размерность СЛАУ.

При решении задач, представляющих практический интерес, размерность СЛАУ достигает десяти тысяч и более [10]. При этом вычислительные погрешности могут привести к плохой обусловленности СЛАУ. Кроме вычислительных погрешностей, при численной реализации метода ГИУ имеют место:

– погрешности аппроксимации граничной поверхности S набором малых граничных элементов σ_k;

- погрешности аппроксимации функции потенциала набором базисных, как правило, кусочно-постоянных, функций;

- погрешности аппроксимации правой части ГИУ (2), включающие погрешности дискретизации граничных условий на S;

- погрешности, обусловленные разрывом ядра ГИУ вблизи особых линий поверхности S [11].

Алгоритм регуляризации для нахождения устойчивого решения ГИУ II-го рода впервые был предложен Тихоновым А.Н. в работе [12]. Согласно метода регуляризации Тихонова, регуляризованное решение $\tilde{\varphi}$ ГИУ (2) определяется из минимизации функционала

$$M[\tilde{\varphi}] = \|A \cdot \tilde{\varphi} - f\|^2 + \alpha_T \|\tilde{\varphi}\|^2, \tag{4}$$

а для СЛАУ (3) – из решения системы уравнений

$$A^T \cdot A \cdot \tilde{\varphi} + \alpha_T \cdot \tilde{\varphi} = A^T f, \tag{5}$$

где α_T – параметр регуляризации Тихонова.

Параметр регуляризации α_T в работах [5, 12] предлагается определять на основании принципа обобщенной невязки, согласно которого величина α_T находится из решения уравнения:

$$\begin{aligned} \xi(\alpha_T) = \left\|A\tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{f}\right\|^2 - \\ -\left(\delta_A \|\tilde{\varphi}_\alpha\|^2 + \delta_f\right)^2 = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где δ_A, δ_f – погрешности дискретизации, соответственно, интегрального оператора и правой части ГИУ.

С использованием метода регуляризации Тихонова были проведены численные моделирования поля потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости. Потенциал скоростей безвихревого течения идеальной жидкости описывается ГИУ Фредгольма II-го рода.

На рис. 1 показана геометрия одного из тел вращения, рассмотренных в численных экспериментах.

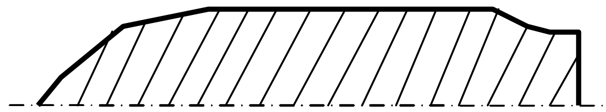

Рис. 1. Внешний контур тела вращения

Поверхность S показанного на рис. 1 тела вращения имеет несколько особых линий – линий разрыва первой производной в местах сочленения головной и хвостовой частей с центральной цилиндрической частью. Разрыв ядра ГИУ вблизи особых линий поверхности S приводит к малой обусловленности матрицы СЛАУ и, как следствие, к неустойчивости численного решения. Как показали численные эксперименты, использование метода сопряженных градиентов [13] для повышения устойчивости алгоритма к вычислительным погрешностям при решении СЛАУ малой обусловленности не позволяет получить устойчивое решение для граничных поверхностей с особыми линиями. На рис. 2 показаны распределения потенциала скоростей по поверхности тела вращения при нулевом угле натекания внешнего потока.

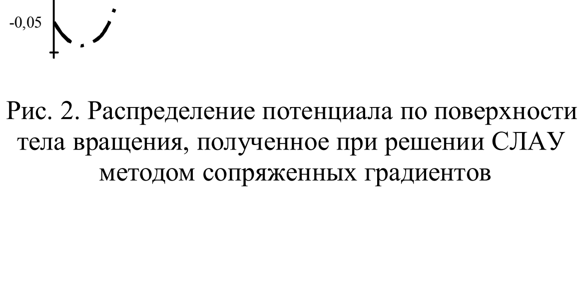

Рис. 2. Распределение потенциала по поверхности тела вращения, полученное при решении СЛАУ методом сопряженных градиентов

Анализ графиков, представленных на рис. 2, позволяет сделать вывод, что по направлению течения внешнего потока за линиями разрыва $S^{(1)}$ решение носит колебательный характер.

Применение метода регуляризации Тихонова позволило получить устойчивое нормальное решение краевой задачи обтекания тел, поверхности которых имеют линии разрыва $S^{(1)}$. Распределение давления по поверхности тела вращения, показанного на рис. 1, полученное при применении регуляризации Тихонова, приведено на рис. 3.

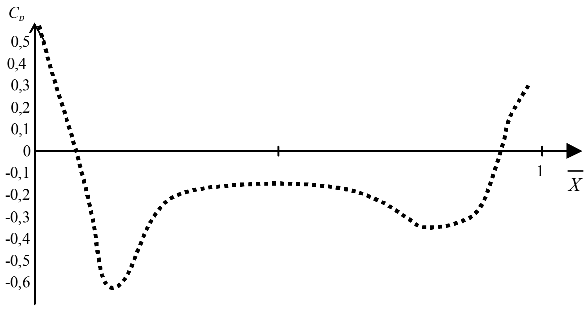

Рис. 3. Распределение давления по поверхности тела вращения, полученное при решении СЛАУ методом регуляризации Тихонова

Выбор параметра α_T по принципу обобщенной невязки сопряжен с определенными трудностями численного характера. Зависимость обобщенной невязки ξ от параметра регуляризации α_T для большинства краевых задач прикладного характера носит нелинейный характер.

На рис. 4 приведен график функции $\xi(\alpha_T)$ применительно к телу вращения относительно простой геометрической формы (рис. 1). Для нахождения корня уравнения (6) необходимо неоднократное решение СЛАУ (5) при различных значениях α_T.

Кроме необходимости многократного решения прямых задач для численной реализации алгоритма выбора α_T по принципу обобщенной невязки существуют также определенные трудности оценки погрешностей аппроксимации ГИУ.

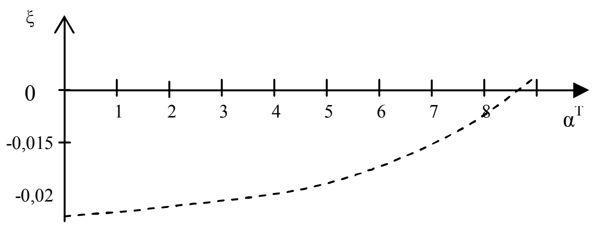

Рис. 4. Сходимость решения уравнения для обобщенной невязки

Поэтому вместо принципа обобщенной невязки автором предлагается находить квазиоптимальное значение параметра регуляризации из условия минимизации функционала

$$\left\| \alpha_T \cdot \frac{d\tilde{\varphi}_{\alpha_T}}{d\alpha_T} \right\| \Rightarrow \min . \qquad (7)$$

Принцип (7) выбора параметра регуляризации Тихонова обоснован в работах [5, 12], и при его использовании не требуется оценки погрешностей аппроксимации ГИУ. В подтверждение возможности применения принципа (7) свидетельствуют результаты исследований, приведенных в работах [14, 15], согласно которых для линейных условно-корректных задач значения параметра α_T пропорциональны квадратам суммарных погрешностей численных методов.

Полученные в ходе численных экспериментов квазиоптимальные значения параметра α_T практически не отличались от значений α_T, найденных по принципу обобщенной невязки. Отметим, что приведенные на рис. 3 результаты расчетов не противоречат опытным данным [16].

Заключение

В результате исследований установлено, что метод регуляризации Тихонова позволяет находить устойчивое численное решение граничного интегрального уравнения II-го рода для краевых задач теории потенциала. Вместо принципа обобщенной невязки рациональнее использовать квазиоптимальное значение параметра регуляризации Тихонова.

Литература

1. Методы граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложение в механике // Новое в зарубежной науке. Механика. – М.: Мир, 1978. – Вып. 15. – 210 с.

2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.

3. Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. – М.: Наука, 1991. – 301 с.

4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Н. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 288 с.

6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 543 с.

7. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений: теория, приложения. – К.: Наукова думка, 2002. – 343 с.

8. Дворак А.В. Невырожденность матрицы метода дискретных вихрей в задачах пространственного обтекания // Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1986. – Выпуск 1313. – С. 441-453.

9. Попов В.М. О регуляризации решения системы линейных алгебраических уравнений метода дискретных вихрей // Труды X межд. симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Херсон, 2001. – С. 362-366.

10. Петерсон В.Л., Бэйли Ф.Р. Вплотную к практическим задачам // Аэрокосмическая техника. – 1988. – № 12. – С. 203-207.

11. Головкин М.А. Некоторые свойства интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала двойного слоя в окрестности особых линий замкнутой поверхности // Труды ЦАГИ. – 1982. – Вып. 2152. – С. 38-41.

12. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады Академии наук СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501-504.

13. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 461 с.

14. Винокуров В.А. Два замечания о выборе параметра регуляризации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972. – Т.12, №2. – С. 481-483.

15. Страхов В.Н. О выборе констант в правиле Тихонова задания параметра регуляризации при решении линейных условно-корректных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1981. – Т. 21, № 5. – С. 1612-1614.

16. Петров К.П. Аэродинамические характеристики тел каплевидной формы // Труды ЦАГИ. – 1994. – Вып. 2569. – С. 41-50.

Поступила в редакцию 24.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.Т. Кононов, Харьковский университет Воздушных Сил, Харьков.