

УДК 621.44.533.697

**В.М. ЛАПОТКО, Ю.П. КУХТИН***ГП «Ивченко-Прогресс», Украина***ЭЙЛЕРОВО-ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА**

Предложен способ построения расчетных сеток, в основе которого лежит алгоритм построения нестационарных линий контактного разрыва параметров. Описана новая высокоточная разностная схема расчета течений идеального газа. Представлены результаты сходимости экспериментальных данных и численных решений обтекания идеальным газом плоского двояковыпуклого профиля крыла, а также решетки плоских профилей турбины, полученных с использованием предложенной разностной схемы

**представление Эйлера, представление Лагранжа, подвижные лагранжевые сетки, нестационарное течение, контактный разрыв параметров, условие устойчивости, сходимость численных решений**

**Введение**

Для численного описания движения сплошной среды используются как переменные Эйлера, так и переменные Лагранжа [1]. В зависимости от используемых переменных решение конкретной задачи может принимать изящную форму не требующую проведения значительных математических выкладок и вычислительных работ. В некоторых случаях ориентировка на определенные переменные вовсе не позволяет обеспечить необходимую точность решения при приемлемых вычислительных затратах.

Методы, основанные на использовании переменных Эйлера, получили широкое применение вследствие простоты их реализации. Области их применения – это установившиеся течения сплошной среды при отсутствии движения границ исследуемой области и границ раздела параметров.

При использовании переменных Лагранжа весьма экономно решаются задачи движения линий раздела параметров, задачи распространения тонких пленок, а также задачи связанные с учетом движения не связанных между собой поверхностей.

Как правило, для многих задач не подходит идеально ни чисто лагранжево, ни чисто эйлерово представление, а наилучшим является подход, использующий некоторую комбинацию аппроксимаций в

координатах Эйлера и Лагранжа. Идея такого подхода положена авторами работы в основу метода отслеживания струй течений ограниченных поверхностями контактного разрыва параметров, реализованного в настоящее время при решении двумерных задач течений невязкого газа.

**1. Подвижная, расчетная сетка**

Рассмотрим двумерное течение среды в декартовой системе координат (рис. 1).

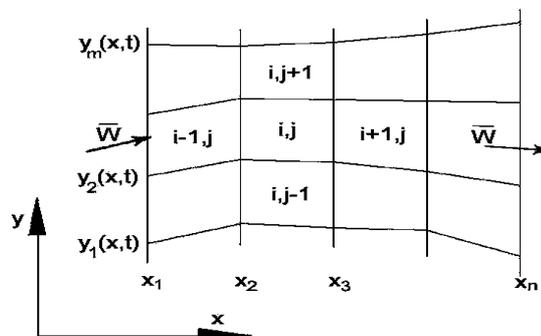


Рис. 1. Подвижная расчетная сетка

Пусть плоскость  $(x, y)$  разделена двумя семействами линий на ячейки с индексами  $(i, j)$ . Первое семейство линий представляет собой систему фиксированных вертикальных линий  $x_i$ , а второе семейство непересекающихся между собой подвижных линий задается множеством:  $y = y_j(x, t)$ , причем  $y_{j+1}(x, t) > y_j(x, t)$  для любого  $x$  и  $t$ , где  $t$  – координата

времени. Объем ячейки  $(i, j)$  ограничен поверхностью входа  $A_{in}(t)$ , поверхностью выхода  $A_{ou}(t)$  и непроницаемой боковой поверхностью  $A_s(t)$ . Через поверхности  $A_{in}(t)$ ,  $A_{ou}(t)$  происходит обмен средой с элементами, расположенными выше и ниже по потоку.

Для каждого элемента  $(i, j)$  нормальная составляющая скорости движения боковой поверхности равна нормальной составляющей скорости среды в данной точке пространства. Таким образом, основной поток не протекает через семейство  $u$ -линий, а может втекать в ячейку и вытекать из нее пересекая только  $x$ -линии семейства.

Предложенная модель течения среды соответствует физической модели течения идеального газа, распространяющегося по струйкам, ограниченными поверхностями  $A_s(t)$ . Такие поверхности реально существуют в потоке, когда на входе в расчетную область дискретно в точках  $y_j(x_1, t)$  (рис.1) постоянно впрыскивается невесомый краситель. Таким образом, каждая линия  $y_j(x, t)$ , состоящая из отрезков прямых с угловыми точками  $x = x_i$ , является линией контактного разрыва параметров. Разумеется, что эти подвижные сеточные линии совпадут с линиями тока, когда течение станет стационарным.

В качестве существенного недостатка описываемого подхода отметим, что подобные алгоритмы более сложны, чем эйлеровы, поскольку подвижная сетка может сильно искажаться в процессе развития течения. При проведении расчета на таких подвижных сетках, через определенное количество шагов по времени, приходится корректировать отдельные элементы расчетных сеток. Однако вносимые коррективы не являются существенными, т. е. не вносят существенных ошибок в рассчитываемое поле течения.

## 2. Уравнения для расчетного элемента

Рассмотрим идеальную, сжимаемую среду. Внутри каждого расчетного элемента искомые

функции ( $\rho$  – плотность,  $W_x, W_y$  – компоненты скорости,  $e$  – внутренняя энергия,  $P$  – давление) заменяются их осредненными значениями. Тогда законы сохранения массы, импульса и энергии для произвольного расчетного элемента объема  $V(t)$  с боковой поверхностью  $A_s(t)$ , поверхностями  $A_{in}(t)$  - входа и  $A_{ou}(t)$  – выхода, можно представить в форме:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho dV &= - \int_{A_{in/ou}(t)} \rho W_n dA; \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho W_x dV &= - \int_{A_{in/ou}(t)} \rho W_n W_x dA - \int_{A_\Sigma(t)} P \cdot (\bar{n})_x dA; \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho W_y dV &= - \int_{A_{in/ou}(t)} \rho W_n W_y dA - \int_{A_\Sigma(t)} P \cdot (\bar{n})_y dA; \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho E dV &= - \int_{A_{in/ou}(t)} \rho W_n E dA - \int_{A_\Sigma(t)} P W_n \bar{n} dA. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где  $P = \rho RT$ ;

$A_{in/ou}(t) = A_{in}(t) + A_{ou}(t)$  – поверхности входа и выхода;  $A_\Sigma(t) = A_{in}(t) + A_{ou}(t) + A_s(t)$  – полная поверхность расчетного элемента;  $E = e + \frac{W_x^2 + W_y^2}{2}$  – полная энергия единицы массы.

## 3. Разностная схема

Далее предлагается исходную систему уравнений (1) для расчетного элемента аппроксимировать явной разностной схемой вида:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_*^{t+\Delta t} - \rho^t}{\Delta t} &= - \frac{1}{V^t} [(\rho W_n)_{in} A_{in}^t + (\rho W_n)_{ou} A_{ou}^t], \\ \frac{(\rho_* W_u)^{t+\Delta t} - (\rho W_u)^t}{\Delta t} &= - \frac{1}{V^t} [(\rho W_n W_u)_{in} A_{in}^t + \\ &+ (\rho W_n W_u)_{ou} A_{ou}^t + (P \cdot n_u)_{in} A_{in}^t + \\ &+ (P \cdot n_u)_{ou} A_{ou}^t + (P \cdot n_u)_s A_s^t], \quad (2) \\ \frac{(\rho_* E)^{t+\Delta t} - (\rho E)^t}{\Delta t} &= - \frac{1}{V^t} [(\rho W_n E)_{in} A_{in}^t + \\ &+ (\rho W_n E)_{ou} A_{ou}^t + (P W_n)_{in} A_{in}^t + \\ &+ (P W_n)_{ou} A_{ou}^t + (P W_n)_s A_s^t], \end{aligned}$$

где  $u = x, y$ .

Система уравнений (2) может быть решена явно для неизвестных параметров на временном слое  $t+\Delta t$ , если известны параметры на неподвижных “in” и “ou”, а также на подвижных “s” границах расчетного элемента на временном слое  $t$ . Параметры на неподвижных “in” и “ou” границах элемента могут быть определены различным образом и в частности, используя решение задачи о распаде разрыва [2]. Параметры на подвижных “s” границах элемента предлагается определять, используя решение задачи о распаде разрыва. Однако в отличие от разностной схемы С.К. Годунова [3], в предлагаемом подходе используются значения, полученные на контактном разрыве. На изображенной на рис. 2 конфигурации “А” распаде разрыва указаны места определения параметров, обозначенных индексами “in”, “ou” и “s”.

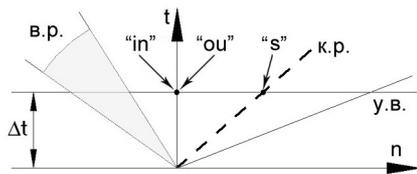


Рис. 2. Конфигурация “А” задачи о распаде разрыва: в.р. – волна разрежения; к.р. – контактный разрыв; у.в. – ударная волна

Очевидно, положение линии контактного разрыва параметров в пространстве, в фиксированный момент времени, однозначно определяется её исходной точкой, а также меняющимся во времени полем параметров. Пусть положение исходной угловой точки линии контактного разрыва (точка А на рис. 3) осталось неизменным.

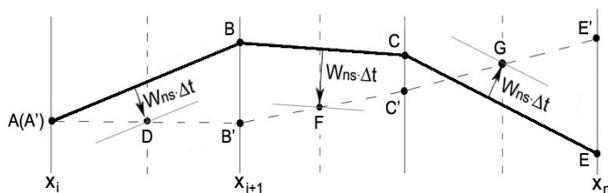


Рис. 3. Алгоритм определения положения нестационарной линии контактного разрыва

Тогда новое положение угловой точки линии контактного разрыва В' может быть получено как результат пересечения вертикальной линии сетки с прямой проведенной через точку А и точку D. Точка D имеет абсциссу  $x=(x_i+x_{i+1})/2,0$  и удалена по направлению нормали к центру стороны АВ на расстояние  $W_{ns} \cdot \Delta t$ . Исходя из нового положения точки В (точка В'), можно далее через аналогичные построения получить новую угловую точку С', и т.д.

Таким образом, искомые параметры потока на новом слое  $t+\Delta t$  можно определить по следующей схеме расчета:

1. Решая задачу о распаде разрыва на подвижных боковых границах расчетного элемента, определяются значения  $W_{ns}$  и  $P_s$  как параметры на контактном разрыве.

2. Решая задачу о распаде разрыва на входной и выходной гранях расчетных элементов, определяются потоки всех параметров.

3. Исходя из системы уравнений (2) явно определяются параметры  $\rho_*^{t+\Delta t} V^t$ ,  $(\rho_* W_x)^{t+\Delta t} V^t$ ,  $(\rho_* W_y)^{t+\Delta t} V^t$ ,  $(\rho_* E)^{t+\Delta t} V^t$  для нового момента времени.

4. В соответствии со схемой, представленной на рис. 3, определяется новое положение нестационарной линии контактного разрыва параметров.

5. Полученный параметр  $\rho_*^{t+\Delta t}$  является промежуточным. Его значение должно быть скорректировано с учетом изменения объема расчетного элемента:

$$\rho^{t+\Delta t} = \rho_*^{t+\Delta t} \cdot V^t / V^{t+\Delta t}. \quad (3)$$

Как следует из изложенного, предложенная разностная схема является явной, консервативной, одношаговой схемой расчета первого порядка точности. Для повышения ее точности может быть использована процедура компенсации схемной вязкости [4] или процедура модификации схемы С.К. Годунова, предложенная В.П. Колганом [5].

#### 4. Условие устойчивости разностной схемы

Существенным преимуществом разработанного метода является отсутствие в схеме расчета какой-либо формы искусственной вязкости для стабилизации решения. Многочисленные расчеты, проведенные в широком интервале параметров, подтвердили на практике устойчивость предложенной явной разностной схемы при ограничении шага интегрирования по времени [6]:  $h_t < h_{ix}h_{iy}/(h_{ix} + h_{iy})$ , где:  $h_{ix}$ ,  $h_{iy}$  – критерии Куранта-Фридрихса-Леви для устойчивости одномерных разностных схем [7].

#### 5. Граничные и начальные условия

Постановка граничных условий на свободных границах не отличалась от их постановки, реализованной в методе С.К.Годунова [3].

При постановке граничных условий на твердом теле решалась задача о поршне [2]. Согласно этой задаче газ в пристеночной ячейке находится в покое с постоянной плотностью и давлением. Для стенки (поршня) справедливо следующее обобщенное соотношение по скорости:

$$W_n^p = W_n^c - W_n^G, \quad (4)$$

где  $W_n^p$  – обобщенная скорость движения поршня;

$W_n^c$  – скорость стенки;  $W_n^G$  – скорость газа в пристеночной ячейке.

После решения задачи о поршне и определения давления на границе  $P_s$  скорость движения границы  $W_{ns}$  равна скорости движения стенки  $W_n^c$ .

Начальное распределения узлов подвижной, лагранжевой сетки, как и начальное распределение параметров потока внутри расчетной области, не оказывает влияния на конечный результат решения, если речь идет о получении стационарного решения, используя процедуру установления по времени. В случае, когда речь идет о исследовании нестационарного процесса течения газа, задание начальных параметров течения, как и задание начального рас-

пределения узлов лагранжевой сетки должно отражать некоторую ситуацию в начальный момент времени.

Распределение узлов сетки на входной границе расчетной области определяется лишь особенностью решаемой задачи и, как правило, задается равномерным. Задание какого-либо характера распределения узлов на рассматриваемой границе не всегда обеспечивает повышение точности решения, особенно при рассмотрении нестационарных задач. Точность расчета определяется лишь количеством узлов на входе в расчетную область, которое устанавливает исходные точки линий контактного разрыва параметров, а также количеством и распределением узлов в направлении течения среды.

#### 6. Анализ сходимости решения

Предложенная разностная схема неоднократно апробировалась на различных типах течений. Получены результаты хорошо совпадающие с экспериментальными данными. В настоящей работе представлены результаты, демонстрирующие сходимость получаемых численных решений и соответствие решений экспериментальным данным.

Все величины, участвующие в расчетах приводились к безразмерному виду. В качестве эталона длины принималась осевая протяженность расчетной области, эталоном скорости служила изотермическая скорость звука, определенная по параметрам на выходе из расчетной области. Давление и температура безразмеривались через соответствующие значения параметров на выходе из расчетной области.

##### 6.1. Обтекание двояковыпуклого профиля.

Экспериментальные исследования трансзвукового обтекания профиля 18%-толщины, образованного дугами окружности (рис. 4) заимствованы из работы [8].

Разбивка для исходного варианта расчета включала  $N_c=12$  ячеек сетки вдоль длины профиля. В по-

перечном направлении входная граница расчетной области разбивалась с равномерным шагом  $h_y=c/N_c$ .

В последующих расчетах число  $N_c$  было 24 и 48, т.е. шаг расчетной сетки последовательно уменьшался в 2 раза.

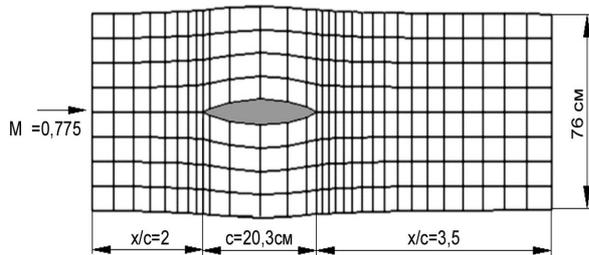


Рис. 4. Расчетная сетка

На рис. 5 для  $N_c = 12$  представлено поле параметра энтропии, полученное на установлении течения.

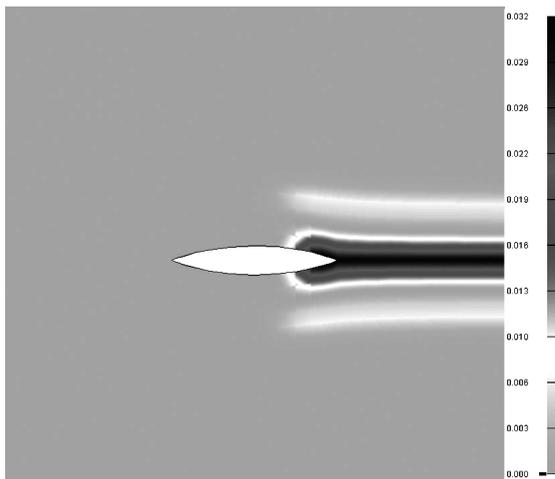


Рис. 5. Поле энтропии газа

На рис. 6 представлено сравнение полученных решений для различных разбивок с результатами расчета и экспериментальными данными представленными в работе [6] по параметру

$$c_p = (p - p_\infty) / (1/2 \rho_\infty w_\infty^2).$$

Хорошая сходимость результатов расчета наблюдается уже для  $N_c = 24$ . Некоторое несоответствие экспериментальным данным в кормовой части объясняется взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем профиля, что не учитывалось в методе расчета.

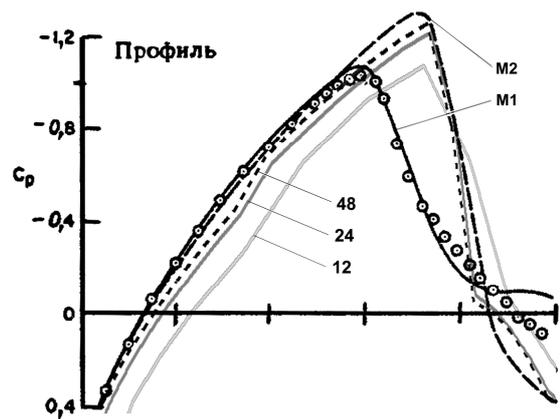


Рис. 6. Сравнение численных решений: о – эксперимент [8], M1 – расчет вязкого газа [8], M2 – расчет идеального газа [8], 12, 24, 48 – расчеты идеального газа для  $N_c=12, 24, 48$

**6.2. Обтекание профиля СЗХ.** В качестве второго примера рассмотрим обтекание высоконагруженных лопаток соплового аппарата турбины [9]. Условия течения соответствуют температуре торможения  $T^0=311\text{K}$ , числу Маха на выходе из лопаточного аппарата  $M_{ou}=1,05$ , показателю адиабаты  $k=1,33$ .

Сходимость решений анализировалась на различных разбивках  $N_c=12, 24, 48$  осевой протяженности профиля.

Как следует из представленных на рис. 7 результатов хорошее соответствие экспериментальным данным наблюдается уже для  $N_c=12$ .

На рис. 8 представлено расчетное поле течения идеального газа в межлопаточном канале для  $N_c = 12$ .

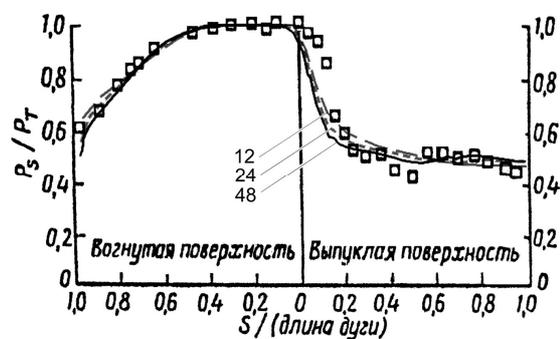


Рис. 7. Анализ сходимости решений: □ – экспериментальные данные [9]; 12, 24, 48 – численные расчеты для  $N_c=12, 24, 48$

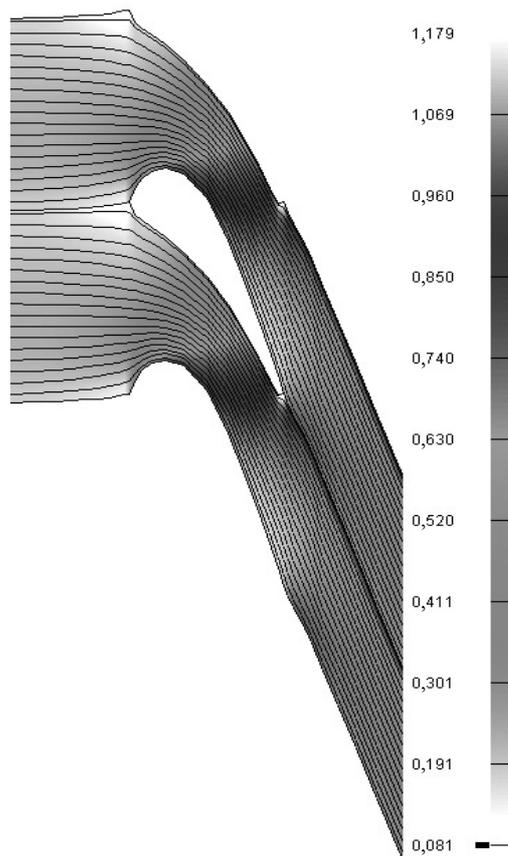


Рис. 8. Поле числа М и сеточные линии течения

В качестве справочного материала приведем данные требуемых ресурсов ЭВМ для расчета. Двумерный расчет до установления на сетке  $60 \times 30$  требовал  $\approx 20$  мин. расчетного времени на процессоре Pentium IV (1800 Гц) и  $\approx 600$  Кб оперативной памяти.

### Выводы

В описанном подходе отсутствует численная диффузия, возникающая при перетекании среды через границы раздела. Кроме того сеточные линии расчетных элементов сами по себе создают визуализацию течения. Такой подход целесообразно использовать при рассмотрении нестационарных задач аэрогидродинамики со свободными поверхностями, поверхностями раздела сред и другими подвижными, в том числе жесткими не связанными друг с другом границами. Это является исключительным преимуществом предложенного метода.

### Литература

1. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 660 с.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
3. Численное решение многомерных задач динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
4. Лапотко В.М., Мунштуков Д.А. Влияние схемной вязкости на параметры в сопле Лавалья и способ ее компенсации // Многофазные потоки в энергоустановках: Сб. науч.тр. – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1988. – С. 143-150.
5. Колган В.П. Конечно-разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики. – Уч. зап. ЦАГИ. – 1975. – Т. 6, № 1. – С. 9-14.
6. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
8. Макдевитт, Леви мл., Диверт. Трансзвуковое течение около толстого профиля, образованного дугами окружности // Ракетная техника и космонавтика. – 1976. – Т.14, № 5. – С. 75-83.
9. Нили Д.А., Михелк М.С. Измерения теплоотдачи на поверхностях высоконагруженных лопаток соплового аппарата турбины // Тр. америк. общ. инж.-механ. Энергетические машины и системы. – 1984. – Т. 106, № 1. – С. 86-96.

*Поступила в редакцию 1.06.2007*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Г.И. Слынько, Запорожский национальный технический университет, Запорожье.