

УДК 629.018.4 : 519.876.5(045)

**А.Г. КУЧЕР, А.С. ЯКУШЕНКО, В.Е. МИЛЬЦОВ**

*Национальный авиационный университет, Киев, Украина*

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОГО СТРУКТУРНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ**

Рассмотрены вопросы моделирования процесса повреждения для разных структурных форм поверхностного слоя материала. Проведен расчетный анализ предельного повреждения для разных значений структурного параметра числа связей между структурными элементами. Модель описывает процессы поврежденности на различных структурных уровнях, в том числе и процессы коррозионного и эрозионного повреждения материалов.

**коррозия, эрозия, фрактал, теория перколяции, элементарные структурные элементы, повреждаемость, число связей, эффективный радиус связи, математическая модель**

### **Введение**

Все без исключения металлы в твердом состоянии кристаллически. Кристаллическое состояние характеризуется строгой закономерностью во взаимном расположении атомов, которые образуют пространственную кристаллическую решетку.

Основная и определяющая особенность металлов – наличие так называемой металлической связи между атомами кристаллической решетки. Каждый тип кристаллической решетки может быть охарактеризован элементарной кристаллической ячейкой, которая многократно повторяется в решетке кристалла. Размеры кристаллической ячейки соизмеримы с размерами атомов и исчисляются ангстремами. Причина плотной упаковки атомов заключается в реализации стремления системы к минимальной свободной энергии связи.

Атомы или молекулы, находящиеся в глубине материала и на его поверхности, имеют различное число атомных или молекулярных связей. На поверхности атомы являются неуравновешенными, поэтому поверхность всегда обладает избытком поверхностной энергии. Это приводит к притягиванию поверхностным слоем точечных (вакансий) или линейных (дислокаций) дефектов кристаллической решетки, что ведет к его разупрочнению. Практически все поверхностные слои материалов имеют де-

фекты, полученные при их изготовлении, а также от различных видов обработки, нагревания, окисления, коррозии, эрозии, пластической деформации и т.д. и имеют глубину порядка несколько сотен атомных расстояний (до 10 нм). Все поверхности содержат нерегулярности: выпуклости и впадины, которые называют топографией поверхности. При усталости металлов локальное пластическое деформирование, обусловленное выходом дислокаций на поверхность, сопровождается вытеснением материала (экструзия) и втягиванием материала (интрузия). Это является причиной зарождения микротрещин. Таким образом, состояние поверхностного слоя является важнейшим индикатором процессов деформирования и разрушения.

### **1. Коррозионное и эрозионное разрушение материалов**

Поскольку представленная модель может описывать процессы коррозии и эрозии металлов, рассмотрим вкратце саму суть этих процессов.

Коррозия и эрозия – недопустимые виды поверхностного разрушения материалов. Сам термин «коррозия» произошел от латинского слова «корродере» – разъедать, а термин «эрозия» от латинского «эродере» – разрушать. При коррозии разрушение материала происходит в результате статического

взаимодействия его с жидкой или с газообразной средой. Эрозионное разрушение является следствием динамического воздействия на материал твердых или жидких частиц, газовых потоков или электрических разрядов.

Коррозией называется процесс разрушения металлов при их химическом, электрохимическом или биохимическом взаимодействии с окружающей средой. Главной причиной, вызывающей коррозию, является термодинамическая неустойчивость металлического состояния. Процесс коррозии – окислительно-восстановительный самопроизвольный процесс, он приводит к снижению свободной энергии вещества, т.е. к получению термодинамически более устойчивых по сравнению с исходным металлом соединений.

По механизму протекания процесса коррозия классифицируется следующим образом:

1. Химическая коррозия – процесс, протекающий за счет гетерогенной химической реакции, без разделения на отдельные стадии. Продукты коррозии образуются непосредственно на участке, подвергаемом коррозии.

Термин химическая коррозия объединяет широкую гамму процессов химического взаимодействия материалов с агрессивными средами различного состава. Однако наибольшее практическое значение имеет процесс химического взаимодействия металлов с кислородом.

Из-за большого сродства металлов к кислороду в первую очередь происходит химическая адсорбция. Молекула кислорода на поверхности металла диссоциирует на атомы, которые закрепляются на определенных точках поверхности.

2. Электрохимическая коррозия – процесс, подчиняющийся законам электрохимической кинетики. В отличие от химической коррозии в этом случае всегда протекает две группы реакций – катодная и анодная, которые не обязательно локализованы на определенных участках поверхности материала.

Закономерности протекания электрохимической коррозии во многом определяются строением коррозионной среды. Электролитами могут быть вода, водные и неводные растворы солей, кислот, оснований и расплавы солей.

При погружении металла в электролит, например в водный раствор, его поверхностные атомы подвергаются воздействию силового поля молекул воды. Если энергия гидратации больше, чем энергия связи в кристаллической решетке, то ионы — атомы металла, гидратируясь, переходят в электролит; при этом эквивалентные им электроны остаются в металле [7]. Металлическая поверхность приобретает отрицательный заряд, что, в свою очередь, вызывает электростатическое притяжение между положительно заряженными ионами металла, перешедшими в раствор, и поверхностью металла.

Трудность изучения процессов эрозии заключается в многообразии физических механизмов, вызывающих поверхностное разрушение, сложном их сочетании, а также в обилии внешних и внутренних факторов, оказывающих большое влияние на характер и формы проявления повреждаемости материалов.

Классификация видов эрозии построена по трем признакам: по механизмам эрозионного разрушения, характеру поверхностного разрушения и условиям протекания процесса. По механизмам разрушения эрозия делится на: а) механохимическую; б) микроударную; в) термическую; г) электрическую. По характеру распределения поверхностного разрушения эрозию можно классифицировать на общую и локальную. По условиям протекания эрозионное разрушение можно разделить на гидроэрозию, газовую эрозию, абразивную, гидроабразивную, электрическую, абляцию и т.д. [7].

Механохимический механизм является ведущим, когда энергия потока жидкостей, газов или твердых частиц невелика и не в состоянии вызвать в поверхностных микрообъемах (глубиной порядка несколь-

ких микрометров и более) пластическую деформацию, структурные или фазовые изменения. В этом случае разрушение происходит в поверхностных слоях субмикроскопической толщины.

Микроударный механизм эрозии наблюдается в тех случаях, когда поверхность материала в потоке газов, жидкостей или твердых частиц подвергается локальным импульсивным ударам, энергия которых достаточна, чтобы вызвать пластическую деформацию, структурные или фазовые превращения в микрообъемах.

Основной особенностью микроударного нагружения является локализация отдельного деформационного акта в объеме, соизмеримом с размерами зерна металла и отдельными структурными составляющими. Поведение металла при микроударном нагружении связано с особым видом пластической деформации, которая характеризуется сосредоточенностью по распределению и неравномерностью по объему. При этом возрастает роль границ зерен и отдельных структурных составляющих сплавов в процессах зарождения и развития микротрещин на стадии разрушения.

Термический механизм эрозии является ведущим при воздействии на материал раскаленного газового потока. Эрозионное разрушение металлов происходит в результате того, что поверхность металла, нагреваясь до весьма высоких температур (в большинстве случаев выше температур плавления), крайне слабо сопротивляется динамическому воздействию горячего газового потока. Связи между частицами металла ослабевают, и частицы выносятся газовой струей.

Гидроэрозия – это поверхностное разрушение деталей машин при контакте с динамическим потоком жидкостей. Силовое воздействие может быть вызвано как обычными ударами микрообъемов жидкости, например, в случае соударения дождевых капель с поверхностью летательного аппарата (атмосферная эрозия), так и в условиях кавитации

жидкостей (кавитационная эрозия).

На рис. 1 приведена микрофотография наружной поверхности гильзы цилиндра тракторного двигателя при охлаждении ее водой [7]. Эрозионное разрушение возникло в результате кавитации при вибрации двигателя. Газовая эрозия – это поверхностное разрушение деталей машин в контакте с динамическим потоком газов и, прежде всего, газовых струй с высокой температурой, скоростью, химической активностью. Этому виду разрушения подвержены сопла и лопатки реактивных двигателей, газовых турбин, каналы стволов артиллерийских орудий, клапаны, поршневые кольца и зеркала цилиндров двигателей внутреннего сгорания, камеры сгорания



Рис. 1. Наружная поверхность гильзы цилиндра тракторного двигателя при охлаждении ее водой

жидкостных ракетных двигателей и др. Представленные механизмы поверхностного разрушения применимы для различных уровней структуры материала: на самом низком атомном, молекулярном уровне ее структурными элементами являются атомы кристаллической решетки металла, на среднем уровне зерна - коррозионное или эрозионное повреждение материала, на более высоком уровне – микротрещины, поры и другие элементы структурного повреждения.

## 2. Формулирование проблемы

**2.1. Достижение предельного состояния материала.** Процесс накопления повреждений и разрушение материала в ряде случаев имеет характер продолжительного накопления малых рассеянных дефектов (пор, микротрещин) со следующим их объединением и образованием новых структурных элементов – фракталов (фрактал от латинских слов fractus – дробный и frangere – ломать, что отражает

суть фрактала, как "изломанного", нерегулярного множества).

Предельное состояние материала (предельный размер дефекта) достигается именно за счет объединения малых дефектов, а скорость увеличения их размеров и образование макродефектов (фракталов) от величины повреждения материала носит нелинейный характер и резко возрастает на этапе, который предшествует разрушению [1, 2, 6].

**2.2. Постановка задачи прогнозирования.** Величина повреждения материала, при которой происходит разрушение, является случайной величиной. С учетом этого обстоятельства при решении задач прогнозирования предельного состояния величина предельно допустимого повреждения должна определяться с заданным уровнем доверительной вероятности  $P_d$  (обозначим эту величину повреждения как  $\psi_{пред}$ ). При такой постановке задачи метод расчета величины предельно допустимого повреждения  $\psi_{пред}$  материала может быть создан с использованием теории перколяции (протекания) [3 – 5]. Сама по себе теория протекания довольно-таки молода по меркам современной науки. Основные ее идеи были сформулированы в 1957 году при изучении явления прохождения газов через угольный фильтр, но со временем выяснилось, что новая теория способна описать широчайший круг явлений из таких областей, как физика и химия. Поэтому в настоящем теория перколяции получила весьма широкое распространение. Например, в контексте исследуемой темы эта теория позволяет определить характер состояния системы из большого числа связей, при условии, что они носят случайный характер, то есть могут быть заданы при помощи генератора случайных чисел.

Можно принять, что вероятность возникновения дефекта предельно допустимой величины для рассмотренного материала зависит только от степени повреждения материала:

$$P(S_{пред}) = F(\psi_m) = \int_{-\infty}^{\psi_T} f(\psi) d\psi, \quad (1)$$

где  $S_{пред}$  – предельно допустимая величина дефекта;  $\psi_m$  – текущее значение повреждения материала;  $F(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  – соответственно функция и плотность вероятности возникновения дефекта предельно допустимой величины.

Материал может использоваться до выполнения условия:

$$\psi_m < \psi_{пред} \quad (2)$$

При постановке задачи в рамках теории перколяции можно считать, что предельное повреждение материала  $\psi_{пред}^p$  при котором вероятность возникновения дефекта предельной величины  $P$  равняется заданной, зависит только от структуры материала:

$$\psi_{пред}^p = F^{-1}(CM) = \text{const}, \quad (3)$$

где  $CM$  – константа, которая характеризует структуру материала;  $F^{-1}(\cdot)$  – функция, обратная функции  $F(\cdot)$  вероятности достижения предельного состояния.

В этом случае для определения  $\psi_{пред}^p$  необходимо конкретизировать зависимость  $F(\cdot)$  – определить закон распределения и его параметры.

**2.3. Связь с теорией перколяции.** Один из простых способов изучения перколяции основан на использовании генератора случайных чисел. Вычислительная процедура при этом сводится к генерации случайного числа и его сравнению с некоторым порогом  $p$  (ячейка решетки считается «рабочей», если случайное число меньше  $p$ ). Если вероятность рабочего состояния ячейки мала, можно ожидать, что будут присутствовать только небольшие, изолированные кластеры. По сравнению с этим, если  $p \sim 1$ , то можно ожидать, что большинство работающих ячеек образуют один большой кластер, который протянется от одной стороны решетки до другой. О таком кластере говорят, что он «перекидывается» через решетку, и называют *соединяющим кластером*.

В пределе бесконечной решетки существует вполне определенная «пороговая вероятность»  $p$  такая, что для  $p > p_c$  существует один соединяющий кластер или путь; для  $p < p_c$  нет ни одного соединяющего кластера и все кластеры конечны. Для

конечной решетки со стороной  $n$  всегда существует ненулевая вероятность того, что будет появляться соединяющий кластер, связывающий одну сторону решетки с другой. Известно, что порог протекания для двумерного массива ячеек составляет 0,34 и всего 0,21 – для трехмерного [8].

Применение данного подхода к ответственным деталям, таким как детали авиационных двигателей и газоперекачивающего оборудования, диктует необходимость модификации метода моделирования и определения предельного состояния. Это связано с тем, что предельное состояние достигается задолго до появления соединяющего кластера и может возникнуть, например, при разрушении  $3 \div 10$  зерен поверхностного слоя, расположенных рядом. Таким образом, для таких деталей надо определить значение поврежденности  $\psi^p_{пред}$ , при которой достигается заданное предельное состояние.

### 3. Сущность математической модели

Далее рассмотрим построение имитационной математической модели, предназначенной для моделирования процессов накопления повреждений в поверхностном слое для случаев возникновения эрозионного, коррозионного разрушений или контактного выкрашивания материала. При этом можно ввести допущение, что при низкой концентрации дефектов взаимодействие и взаимное влияние дефектов друг на друга отсутствуют, а координата возникновения дефекта на поверхности материала – случайная, равномерно распределенная, величина.

Будем считать, что поверхностный слой (ПС) материала состоит из элементарных структурных элементов (ЭСЭ), каждый из которых граничит с некоторым числом  $n$  соседних ЭСЭ. Если число соседних элементов постоянно для всех элементов структуры ( $n$ -const) и не зависит от номера ЭСЭ то структура ПС материала однородная и определяется только числом связей ЭСЭ –  $n_{св}$ . При случайном количестве связей ЭСЭ ( $n_{св}$  – var) поверхностный

слой материала является неоднородным. Далее при анализе структурного повреждения будут рассмотрены только однородные структурные элементы, математические модели которых состоят из ЭСЭ одинаковых по величине (площади и числу связей  $n_{св}$ ). Следует отметить, что предлагаемые математические модели поверхностной структуры материала не накладывают никаких ограничений на фактическую величину и форму ЭСЭ и являются функцией только одного структурного параметра –  $n_{св}$

Рассмотрим процесс повреждения поверхностного слоя материала. Возникновение элементарного повреждения (дефекта) можно описать как разрушение ЭСЭ, что является процессом случайным и однородным как во времени, так и на поверхности материала. Процесс повреждения ПС материала будем рассматривать как процесс объединения отдельных ЭСЭ и образование новых структур – фракталов. Под фракталом с мощностью  $m$  будем понимать объединение, которое включает в себя  $m$  ЭСЭ. В качестве других характеристик повреждения ПС материала рассмотрены структуры, связанные с фрактальным повреждением, а именно участка поверхности материала охваченного фракталом. В частности, это площадь круга (или число ЭСЭ внутри круга) с диаметром, равным максимальному расстоянию между элементами фрактала или площадь прямоугольника (число ЭСЭ внутри фигуры) со сторонами равными максимальным высоте и ширине фрактала. Последние характеристики повреждения материала включают как поврежденные, так и не поврежденные ЭСЭ и их рост на средних и конечных стадиях разрушения происходит более интенсивно.

Очевидно, что возможность объединения ЭСЭ во фракталы определяется количеством его связей  $n_{св}$ . В свою очередь  $n_{св}$  определяет характеристики функции  $f(\cdot)$  и зависимость (3) принимает вид

$$\psi^p_{гран} = F^{-1}(n_{св}) = \text{const.} \quad (4)$$

В такой постановке задача определения характе-

ристик функции  $f(\cdot)$  может быть решена с использованием методов математического моделирования.

Рассмотрим случай поверхностного разрушения для структурно однородных материалов. При этом ЭСЭ можно представить в виде плоских правильных фигур, каждая из которых имеет  $n$  связей с соседними элементами. Основными необходимыми для моделирования характеристиками ЭСЭ в этом случае является площадь одного ЭСЭ –  $S_e$ , радиусы описанной  $R$  и вписанной  $r$  окружностей и координаты их центров тяжести –  $x, y$ .

Рассматривается поверхность, которая имеет размер  $n_x$  на  $n_y$  ЭСЭ. С помощью генератора случайных чисел определяются координаты очередного разрушенного ЭСЭ. Через каждые  $n_i$  итераций соответственно законам объединения дефектов, осуществляется построение фракталов и их приведение в порядок по мощности (длине) фрактала. Далее осуществляется расчет характеристик структурного повреждения. Расчет ведется до возникновения фрактала предельного размера.

В ходе математического эксперимента первого уровня значения параметра  $n_{св}$  принималось равным 3, 4, 6, 8 и 12, второго – 18, 24 и 36 за счет формы ЭСЭ и условий объединения дефектов.

Рассматривались три математических модели формы ЭСЭ - равносторонняя треугольная (рис. 2, а), квадратная (рис. 2, б), правильная шестиугольная (рис. 2, в), и для каждой из них процесс объединения определялся двумя законами: когда расстояние между центрами тяжести фигур равняется двум радиусам вписанной или описанной окружностей. В первом случае, например для треугольных элементов, когда расстояние между центрами фигур равняется сумме радиусов вписанных в данные ЭСЭ окружностей (рис. 3, а) число контактирующих элементов равняется 3, а в случае, когда расстояние между центрами фигур равняется сумме радиусов описанных окружностей (рис. 3, б) – 12. В табл. 1 приведены значения количества соседних ЭСЭ, которые могут объединиться во фрактал.

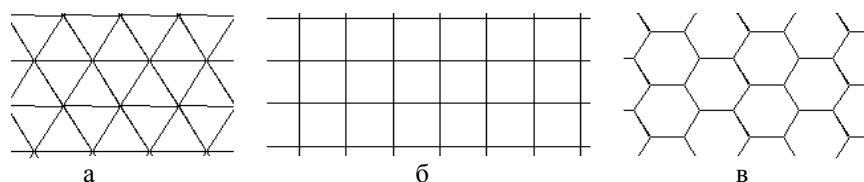


Рис. 2. Типы плоских решеток ПС материала: а – равносторонняя треугольная; б – квадратная; в – правильная шестиугольная

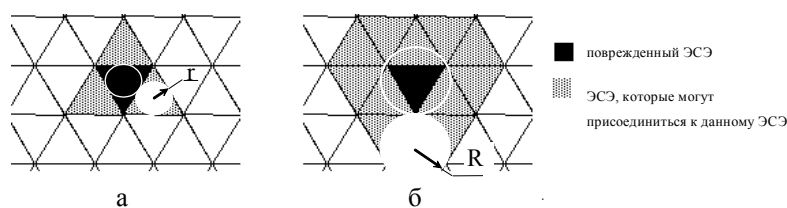


Рис. 3. Возможные варианты объединения ЭСЭ во фракталы для треугольной формы ЭСЭ, которые имеют общую сторону (а) и ЭСЭ, которые имеют хотя бы одну общую точку (б)

Таблица 1

Количество связей ЭСЭ математических моделей разной формы

Форма ЭСЭ	Условие объединения дефектов во фрактал	
	при наличии общей стороны (модель объединения – $2r$ )	при наличии хотя бы одной точки соприкосновения (модель объединения – $2R$ )
Равносторонний треугольник	3	12
Квадрат	4	8
Правильный шестиугольник	6	6

Если в качестве ЭСЭ, которые объединяются во фрактал, рассматривать не только контактирующие элементы, но и находящиеся на следующем уровне, то математические модели построенные на рассмотренных принципах для структурно однородных материалов имеют вид приведенный на рис. 3, в которых число связей между ЭСЭ соответственно равняется 18 – для шестиугольных элементов, 24 – квадратных и 36 – треугольных элементов.

Кроме числа связей между ЭСЭ в качестве структурного параметра можно использовать радиус связи, удвоенное значение которого равняется расстоянию между центрами тяжести максимально отдаленных ЭСЭ от центрального элемента. Между структурными параметрами была установлена зависимость, которая, при условии полной эквивалентности ЭСЭ разной формы, выражается в равенстве их площадей  $S_3 = S_4 = S_6 = S_e$ .

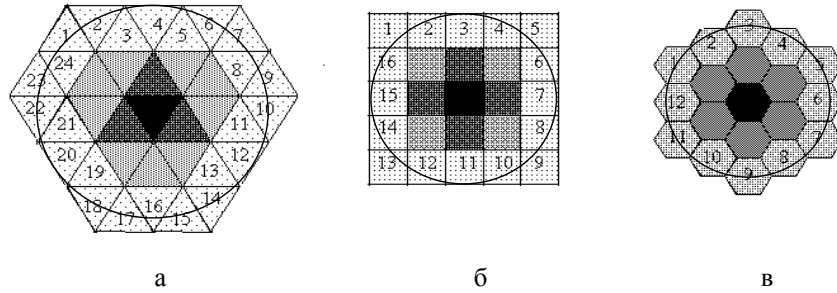


Рис. 4. Математические модели структурного повреждения однородных материалов второго уровня с числом связей: а – 36, б – 24 и в – 8

Таблица 2

Зависимость между структурными параметрами  $n_{св}$  и  $r_{св}$ ,  $r_e$

Число связей, $n_{св}$	3	4	6	8	12	18	24	36
Радиус связи, $r_{св}$	0,436	0,5	0,537	0,707	0,877	1,075	1,414	1,582
Эффективный радиус связи, $r_e$	0,436	0,5	0,620	0,707	0,877	1,075	1,266	1,582

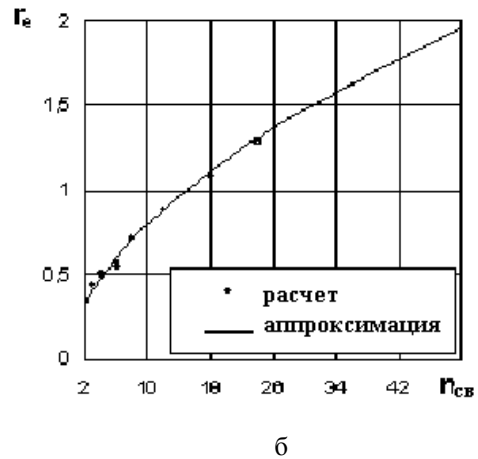
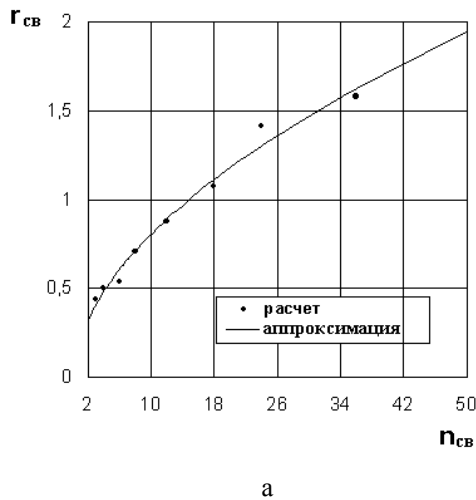


Рис. 5. Зависимости между структурными параметрами: а – зависимость радиуса связи ( $r_{св}$ ) от числа связей ( $n_{св}$ ); б – зависимость эффективного радиуса связи ( $r_e$ ) от числа связей ( $n_{св}$ )

В табл. 2 приведены значения радиусов связи для соответствующих  $n_{св}$  при  $S_e = 1$ , а также значение т.н. эффективных радиусов, которые частично приведены на рис. 3. Введенный эффективный радиус связи больше отвечает соответствующему значению  $n_{св}$ .

Так как структурный параметр  $n_{св}$  – целочисленный, а параметр  $r$  – непрерывный и может принимать значение в некотором диапазоне то радиус связи можно задать в этом диапазоне пропорционально отношению площади круга, который описывается

этим радиусом, и площади соответствующей математической модели  $S_f/S_m = \pi r_e^2 / (S_e \times (n_{ce} + 1)) = \text{const}$ . На рис. 5 приводятся расчетные и аппроксимированные значения и зависимости  $r_{ce} = f(n_{ce})$  и  $r_e = f(n_{ce})$ . Математические выражения для аппроксимированных зависимостей имеют вид (5):

$$\begin{aligned} r_{ce} &= -0,0665043 + 0,00230527n_{ce} + 0,268222\sqrt{n_{ce}}; \\ r_e &= +0,0453792 + 0,00673436 n_{ce} + 0,2156547\sqrt{n_{ce}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Следует еще раз отметить, что математические модели объединения ЭСЭ и образование фракталов являются довольно общими и их форма не влияет на характеристики фрактальной повреждаемости. Главным параметром является число связей  $n_{ce}$  между ЭСЭ или радиус связей  $r_{ce}$  ( $r_e$ ). Уникальная особенность предложенных моделей заключается в том, что число связей между ЭСЭ для всех элементов есть величина постоянная и потому можно исследовать индивидуальные особенности влияния этих структурных параметров на повреждаемость материала.

Как характеристика единичного структурного повреждения материала в математической модели использовалась площадь фрактала  $S_f$ , что образовывается из поврежденных ЭСЭ. При этом величина данного параметра может рассчитываться:

- как суммарная площадь поверхности, занятая ЭСЭ, входящих во фрактал (обозначим как  $S_{f\_e}$ );
- как площадь прямоугольника, описывающая все ЭСЭ, входящие во фрактал ( $S_{f\_np}$ );
- как площадь круга с диаметром, равным расстоянию между наиболее отдаленными точками фрактала ( $S_{f\_кр}$ );
- как площадь секторов, построенных для ЭСЭ, входящих во фрактал с центром, который находится в геометрическом центре фигуры ( $S_{f\_сек}$ ).

Относительное повреждение поверхности элементарными дефектами при этом равняется:

$$\Psi_e = \frac{\sum_{i=1}^{n_{э}} S_{e i}}{S}, \quad (6)$$

где  $S$  – общая площадь рассмотренной поверхности материала;  $n_s$  – количество разрушенных ЭСЭ.

Относительное повреждение поверхности фракталами равняется:

$$\Psi_{\phi} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{\phi}} S_{\phi i}}{S}, \quad (7)$$

где  $S_{\phi i}$  – площадь  $i$ -го фрактала;  $n_{\phi}$  – количество фракталов.

В зависимости от того, какая величина ( $S_{f\_e}$ ,  $S_{f\_np}$ ,  $S_{f\_кр}$  или  $S_{f\_сек}$ ) используется как величина  $S_f$ , могут быть сформированы соответственно четыре параметра фрактального повреждения –  $\Psi_{\phi\_e}$ ,  $\Psi_{\phi\_np}$ ,  $\Psi_{\phi\_кр}$ ,  $\Psi_{\phi\_сек}$ .

Процесс накопления поверхностного повреждения материала может характеризоваться скоростью изменения вышеперечисленных параметров, а также зависимостью величин, которые характеризуют фрактальную повреждаемость, от величины повреждения разрушенных ЭСЭ –  $\Psi_e$ .

На основании описанной методики было разработано программное обеспечение и проведен ряд численных экспериментов. При этом влияние ранее разрушенных ЭСЭ и их фракталов, а также направление внешней нагрузки на процесс разрушения новых ЭСЭ не учитывался. На рис.6. приводятся фрагменты смоделированных процессов повреждения поверхностного слоя материала в зависимости от количества связей ( $n_{ce} = 3, 4, 6, 8$  и  $12$ ) при фиксированном значении  $\psi_e$ .

На рис. 7 приводятся расчетные модельные зависимости фрактальной повреждаемости  $\Psi_{\phi\_e}$  при разных длинах фракталов ( $l_{\phi} = 2, 3, 4, 5, 6-10, 11-20, 21-50, >50$ ) от повреждаемости ЭСЭ для разных значений структурного параметра ( $n_{ce} = 3, 4$ ). С увеличением повреждаемости ЭСЭ интенсивность роста длины фракталов тем большая чем большее число связей  $n_{ce}$ . На рис. 8 показана динамика изменения распределения повреждаемости фракталами разной длины ( $l_{\phi} = 2, 3, 4, 5, 6-10, 11-20, 21-50, >50$ ) для числа связей  $n_{ce} = 36$ . На начальной стадии струк-



турная повреждаемость определяется фракталами меньшей длины  $l_f = 2-4$  (при  $\psi_e = 2,25\%$ ), а далее

фракталами средней  $l_f = 4-20$  (при  $\psi_e = 4,5-7,75\%$ ) и большой длины  $l_f = 20-50, >50$  (при  $\psi_e = 9\%$ ).

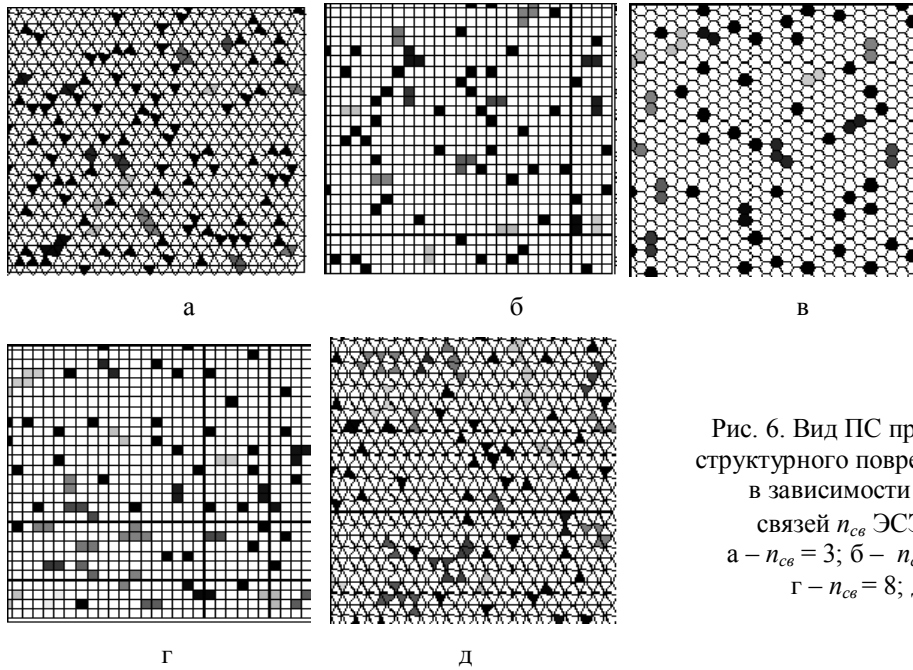


Рис. 6. Вид ПС при моделировании структурного повреждения материала в зависимости от количества связей  $n_{св}$  ЭСЭ при  $\Psi_e = 0,1$ : а –  $n_{св} = 3$ ; б –  $n_{св} = 4$ ; в –  $n_{св} = 6$ ; г –  $n_{св} = 8$ ; д –  $n_{св} = 12$

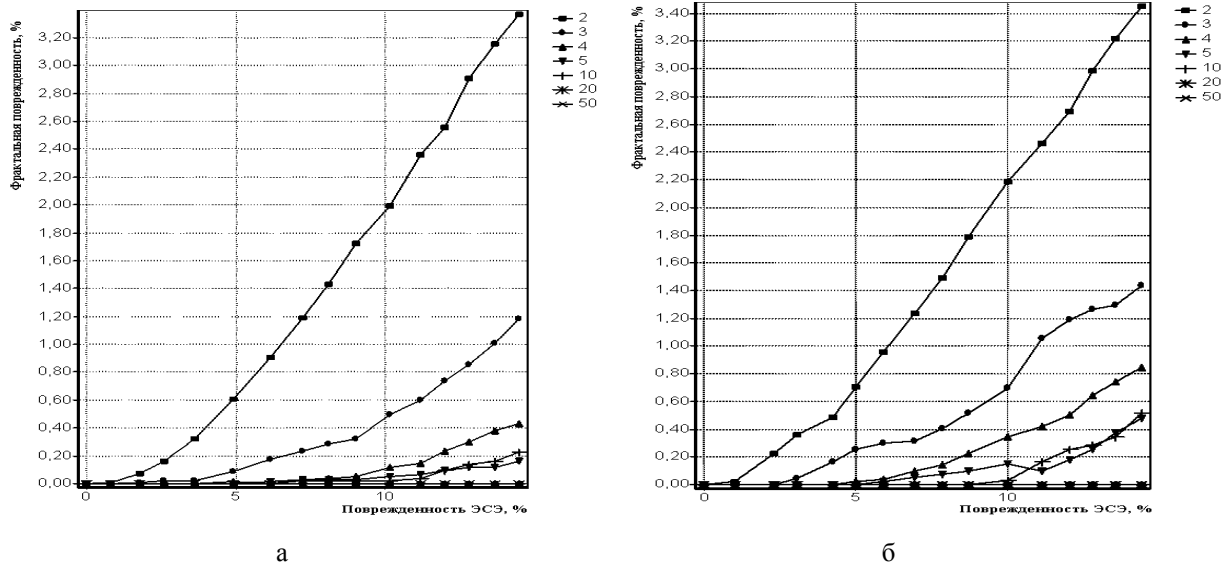


Рис. 7. Зависимость фрактальной повреждаемости при различных длинах фракталов от повреждаемости ЭСЭ: а – для количества связей  $n_{св} = 3$ ; б – для количества связей  $n_{св} = 4$

На рис. 9, а и б приводятся зависимости фрактальных повреждаемостей  $\psi_{ф\_пр.}, \psi_{ф\_кр}, \psi_{ф\_се}$  – (а) и относительной фрактальной повреждаемости  $\psi_i / \psi_{i\ max}$  – (б) от повреждаемости ЭСЭ (%) для числа связей –  $n_{св} = 36$ . В зависимости от вида ( $\psi_{ф\_пр.}, \psi_{ф\_кр}, \psi_{ф\_се}$ ) фрактальная повреждаемость  $\psi_{ф\_кр}$  развивается более интенсивно. Соотношение между видами повреждаемости в среднем сохраняется постоянным и

незначительно зависит от числа связей.

На рис. 10 приводятся расчетные предельные значения повреждаемости ЭСЭ и построенные по ним зависимости повреждаемостей ЭСЭ  $\psi_e$  при достижении предельного состояния от числа связей  $n_{св}$  – а и от эффективного радиуса связей  $r_e$  – б. Аппроксимирующие зависимости описываются формулами (8):

$$\begin{aligned} \psi_e = +1,5648165 + 0,235209 \ln(n_{св}) - & \psi_e = -0,172384 + 0,036065 r_e + \\ -1,234556 [\ln(n_{св})]^{1/2}, C.K.O. = 0,00556; & + 0,299067 \frac{1}{r_e}, C.K.O. = 0,00709. \end{aligned} \quad (8)$$

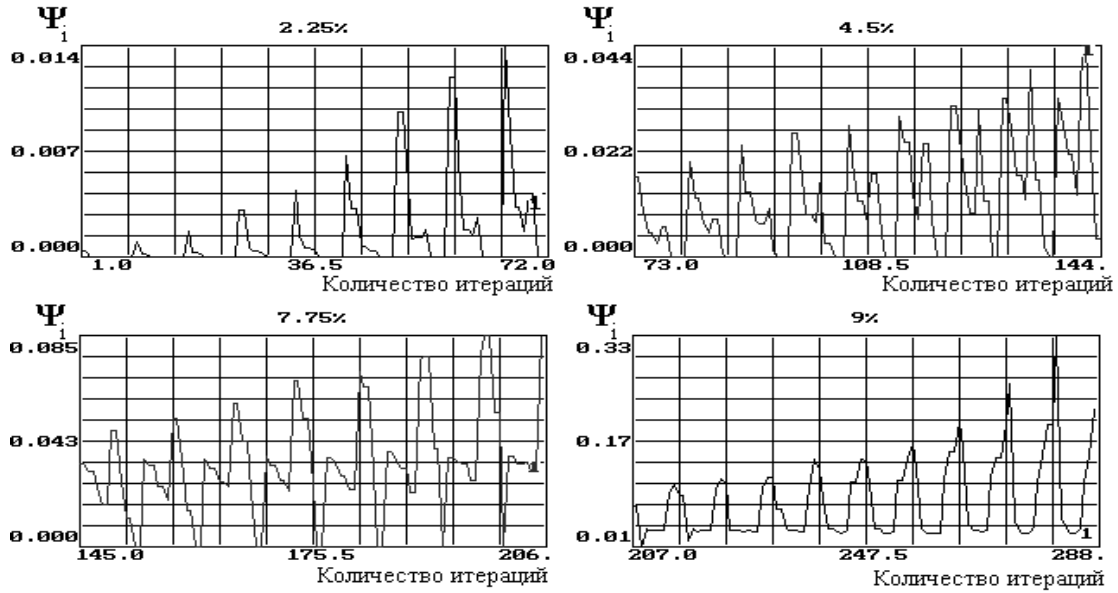


Рис. 8. Динамика изменения распределений повреждаемостей фракталами разной длины для  $n_{св} = 36$

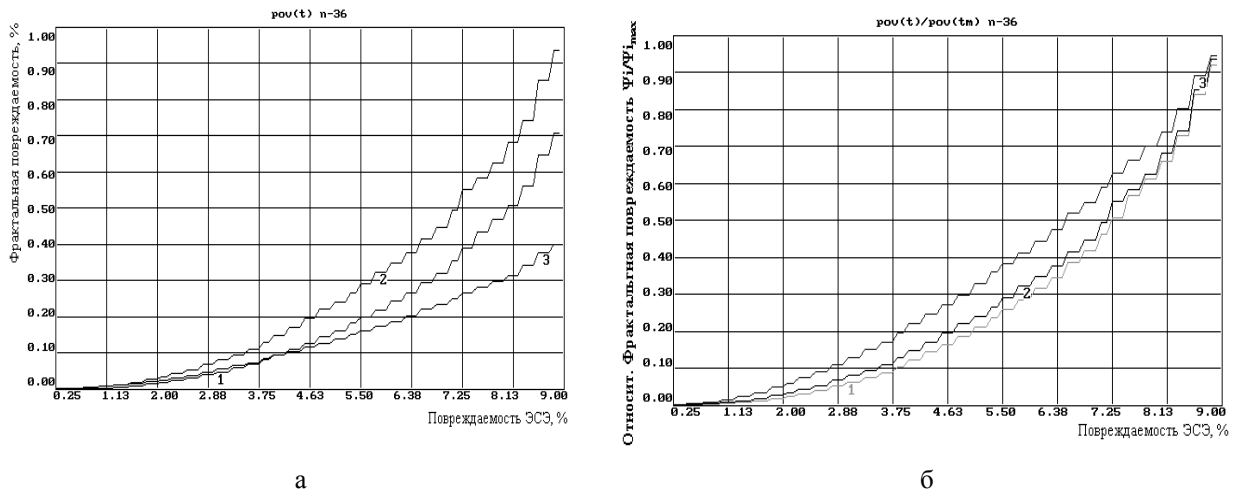


Рис. 9. Зависимость фрактальных повреждаемостей  $\psi_{ф\_np}(1)$ ,  $\psi_{ф\_кр}(2)$ ,  $\psi_{ф\_се}(3)$  (рис.9.а) и относительной фрактальной повреждаемости  $\psi_i/\psi_{imax}$  (рис.9.б) от повреждаемости ЭСЭ (%) для  $n_{св} = 36$

Таблица 3

Зависимости предельной повреждаемости ЭСЭ  $\psi_e$  от структурных параметров  $n_{св}$  и  $r_e$

Число связей, $n_{св}$	3	4	6	8	12	18	24	36
Эффективный радиус связи, $r_e$	0,436	0,5	0,620	0,707	0,877	1,075	1,266	1,582
Повреждаемость ЭСЭ, $\psi_e$	0,53	0,43	0,345	0,275	0,20	0,14	0,11	0,075

### Заключение

Получена математическая модель для моделирования процессов накопления повреждений в по-

верхностном слое для случаев возникновения коррозии, эрозии или контактного выкрашивания материала. При этом вводится допущение, что взаимодействие и взаимное влияние дефектов друг на дру-

га отсутствуют, а координата возникновения дефекта на поверхности материала – случайная, равномерно распределенная, величина.

Главным параметром является число связей  $n_{св}$  между ЭСЭ или радиус связей  $r_{св}$  ( $r_e$ ). Особенность модели заключается в том, что число связей между ЭСЭ для всех элементов есть величина постоянная и потому можно исследовать индивидуальные осо-

бенности влияния этих структурных параметров на повреждаемость материалов.

В результате проведенных исследований установлены значения повреждаемостей ЭСЭ  $\psi_e$  при которых структурная повреждаемость ПС материала  $\Psi_{ф\_пр.}, \Psi_{ф\_кр.}, \Psi_{ф\_се}$  достигает предельной величины  $\Psi_{пред}^P$  с вероятностью  $P = 50\%$  для разного числа связей  $n_{св}$  или эффективного радиуса связей  $r_e$ .

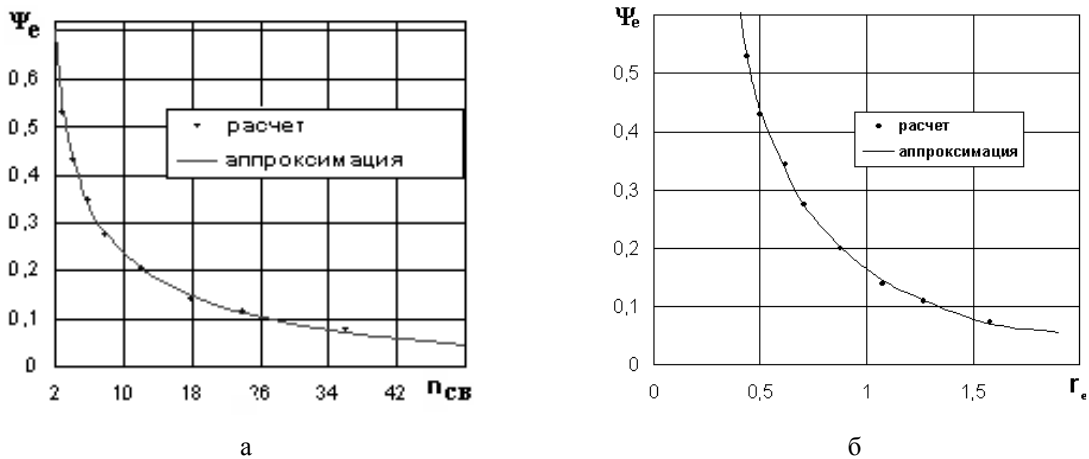


Рис. 10. Графики зависимостей предельной повреждаемости ЭСЭ  $\psi_e$  от числа связей  $n_{св}$  (а) и эффективного радиуса связи  $r_e$  (б)

## Литература

1. Игнатович С.Р., Кучер А.Г., Якушенко А.С., Башта А.В. Моделирование объединения рассеянных поверхностных трещин. Сообщение 1. Вероятностная модель объединения трещин // Проблемы прочности. – 2004. – № 2. – С. 21-32.

2. Методы определения соответствия к АП 25.571 «Обеспечение безопасности конструкции по условиям прочности при длительной эксплуатации». – 1996. – 29 с.

3. Челидзе Т.Л. Методы теории перколяции в механике разрушения // Механика твердого тела. – 1983. – № 6. – С. 114-123.

4. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. – Г.: Наука, 1978. – 792 с.

5. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. – Г.: Наука, 1982. – 176 с.

6. Игнатович С.Р. Критические значения концентрации накопленных рассеянных повреждений // Проблемы прочности. – 1995. – № 4. – С. 61-68.

7. Костецкий Б.И., Носовский И.Г., Бершадский Л.И. Надежность и долговечность машин. – М.: Техника, 1975. – 408 с.

8. Долгий Э. Храните свои терабайты в ящике // Экспресс-Электроника. – 2004. – № 8 (117). – С. 45-49.

Поступила в редакцию 2.06.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.В. Панин, Национальный авиационный университет, Киев.