

УДК 532.526

FAYAD A. SHALAL

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОЗЕЕНА ДВИЖЕНИЯ ТЕЛЕСНОГО ПРОФИЛЯ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА**

На базе обобщенных потенциалов, оригинального аппарата векторно-тензорного анализа и систематического применения метода граничных интегральных уравнений показана однозначная разрешимость начально-краевых задач формирования кинематических и динамических характеристик при обтекании телесного профиля потоком вязкой несжимаемой жидкости в многосвязной области. Представлены результаты вычислительного эксперимента определения распределенных и суммарных аэродинамических характеристик при воздействии внезапного порыва воздуха на реальный профиль крыла самолета, расположенный вблизи поверхности раздела.

Ключевые слова: система уравнений Озеена, начально-краевая задача, интегральные представления решений, системы интегральных уравнений, завихренность, давление, коэффициенты подъемной силы и сопротивления, поляра, качество.

Введение

Изучение неустановившихся движений актуально для различных практических вопросов, так как часто именно в самом неустановившемся характере явления заключается его сущность [1, 2].

Наиболее достоверной и апробированной из существующих математических моделей движения жидкости является краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных Навье-Стокса. Краевые задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных Навье-Стокса относятся к важнейшим и сложнейшим задачам прикладной математики и механики и их решение позволит существенно изменить способы проведения гидроаэродинамических расчетов, улучшит качество этих расчетов и повысит достоверность результатов, что может иметь также и реальное экономическое значение.

В настоящее время наиболее перспективной представляется интегрированная компьютерная технология, основанная на идеологии метода граничных интегральных уравнений. Этот метод позволяет сводить краевые задачи для уравнений в частных производных на многообразия меньшей размерности и является одним из классических методов исследования и решения краевых задач математической физики. Он находит широкое применение при построении математических моделей явлений, при доказательстве вопросов существования и единственности решений задач, а также является теоретической основой разработки алгоритмов их численного исследования. Наиболее эффективным методом оказался в случаях внутренних и внешних

задач для неограниченных областей с компактными внутренними границами и позволяет непосредственно определять распределенные аэродинамические характеристики несущих систем, движущихся также и вблизи поверхности раздела.

Все это является безусловными преимуществами метода граничных интегральных уравнений перед конечно-разностными методами и методом конечных элементов. Именно поэтому этот метод с успехом используется для решения сложных инженерных задач – плоских и пространственных, стационарных и неустановившихся. Наконец, течения вязкой жидкости, описываемые уравнениями Навье-Стокса, приводят в большинстве случаев формально к корректным краевым задачам, и решения этих задач являются функциями бесконечно дифференцируемыми.

Актуальность рассматриваемых вопросов определяется тем, что, несмотря на рост парка ЭВМ и увеличение их производительности, сложность и объем задач, выдвигаемых практикой, опережают прогресс в развитии вычислительной техники. Следовательно, возрастают требования, предъявляемые к вычислительным алгоритмам, и, прежде всего, к их экономичности, универсальности и точности. Чтобы найти приемлемый компромисс между этими зачастую противоречивыми требованиями, необходимо рассмотреть некоторые подходы к вопросам конструирования вычислительных алгоритмов.

Таким образом, значительный практический и теоретический интерес вызывает решение задачи обтекания телесного профиля в ограниченном потоке, включая исследование процесса формирования вихревых структур и явления отрыва потока на начальной стадии движения.

1. Постановка задачи

Для несжимаемой среды, находящейся в термодинамическом равновесии, при отсутствии внутренних моментов и полей массовых сил математической моделью широкого круга задач аэрогидродинамики является известная [3] система законов сохранения:

– массы

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0, \tag{1}$$

– импульса

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla, (\mathbf{V} * \mathbf{V})) = (\nabla, \hat{\mathbf{T}}), \tag{2}$$

где символом «*» обозначена диада, тензор напряжений

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{i}} \left(-\frac{p}{\rho} \right) + \nu (\nabla \mathbf{V} + \nabla' \mathbf{V}), \tag{3}$$

причем тензор $\nabla' \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$

является сопряженным тензору

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix},$$

а коэффициент кинематической вязкости

$$\nu = \nu(p, T) \tag{4}$$

и $\hat{\mathbf{i}}$ – единичный тензор.

Система уравнений (1 – 2) решается при выполнении начальных и граничных условий (рис. 1):

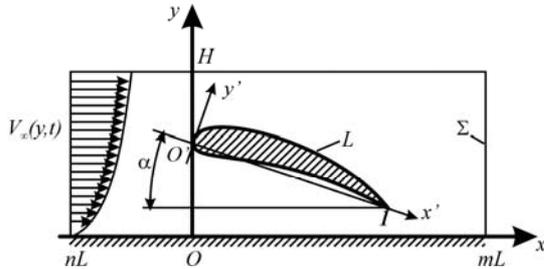


Рис. 1. Телесный профиль вблизи поверхности раздела

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{V}_0; \tag{5}$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \Big|_{L+\Sigma} = \mathbf{V}_{L+\Sigma}. \tag{6}$$

2. Неустановившееся движение вязкой, несжимаемой, нетеплопроводной жидкости

В этом случае уравнение сохранения энергии удовлетворяется, а при отсутствии поля массовых сил $\mathbf{F} = 0$ система (1, 2) приобретает вид

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla, (\mathbf{V} * \mathbf{V})) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{V} \tag{8}$$

при выполнении естественных начальных и граничных условий (5 – 6).

Из векторного анализа известно, что для консервативного, в силу (7), вектора скорости \mathbf{V} :

$$\Delta \mathbf{V} = (\nabla, \nabla \mathbf{V}) = \nabla (\nabla, \mathbf{V}) - [\nabla, [\nabla, \mathbf{V}]] = -[\nabla, \mathbf{\Omega}],$$

а в силу незначительности скоростей на начальной стадии движения инерционные слагаемые в уравнении (8), $(\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} \approx 0$, что ни в коей мере не ограничивает развития завихренности течения.

Таким образом, система уравнений (7 – 8) принимает следующий вид:

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu [\nabla, \mathbf{\Omega}] = 0. \tag{9}$$

Причем на границе раздела и неподвижном профиле скорость течения равна нулю, на границах же движущегося профиля и контрольного объема – скорость заданный вектор координат и времени. Кроме этого, в некоторый начальный момент времени движение отсутствует.

Применяя операцию ротации к уравнению (9), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nu [\nabla, [\nabla, \mathbf{\Omega}]] = 0, \tag{10}$$

а в силу опять же консервативности вектора $\mathbf{\Omega}$ по определению, окончательная математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$\Delta p = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{\Omega} = 0. \tag{12}$$

Причем можно считать, что на входных границах контрольного объема известны как давление p , так и завихренность $\mathbf{\Omega}$.

3. Интегральное представление решения задачи о движении профиля вблизи поверхности раздела

3.1. Фундаментальные решения

Очевидно, что решения уравнений (11) и (12) целесообразно искать в классах функций

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = e^{vt} \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{r}), \quad \frac{p}{\rho}(\mathbf{r}, t) = e^{vt} \frac{\bar{p}}{\rho}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = e^{vt} \bar{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{r}).$$

Тогда

$$v\mathbf{V} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + v[\nabla, \boldsymbol{\Omega}] = 0, \quad (14)$$

$$\Delta \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad (15)$$

и

$$\Delta \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (16)$$

Здесь следует отметить, что если для уравнения Лапласа (15) элементарное (фундаментальное) решение для пространств любой размерности широко известно и хорошо изучено, к уравнению Клейна-Гордона-Фока (16) это относится в меньшей степени.

Фундаментальное решение этого уравнения, зависящее только от расстояния, имеет вид [4]:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-r\tau} d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}}, \quad (17)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

3.2. Интегральное представление решений системы уравнений (15 – 16)

Классическая теория потенциала [5] позволяет выписать интегральные представления решений как уравнения Лапласа (15), так и уравнения Клейна-Гордона (16):

$$p = \frac{1}{2\pi} \oint_L \left(\ln r \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) dl; \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = \oint_L \left(\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right) d\rho l, \quad (19)$$

где фундаментальное решение уравнения (16) модифицированная функция Бесселя нулевого порядка (17), а с учетом (14) имеем окончательную систему интегральных представлений

$$p = -\frac{1}{2\pi} \oint_L \left(\mu \ln r V_n - \mu \left([\mathbf{n}, \nabla(\ln r)], \boldsymbol{\Omega} \right) + p \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) dl, \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = \oint_L \left(\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) [\mathbf{n}, \mathbf{V}] - \frac{1}{\mu} [\mathbf{n}, \nabla \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})] p - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right) d\rho l. \quad (21)$$

Причем в интегральных представлениях (20, 21) ядра $[\mathbf{n}, \nabla(\ln r)]$ не хуже сингулярных в (20), а абсолютное значение

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{2\pi} \int_1^\infty e^{-r\xi} \sqrt{\xi^2 - 1} d\xi \quad (22)$$

в (24) представляет собой модифицированную функцию Бесселя первого порядка.

3.3. Система эквивалентных граничных интегральных уравнений

Для корректного перехода от интегральных представлений (20 – 21) к граничным интегральным уравнениям необходимо исследовать предельный переход от точек пространства к границам потока. При численном решении профиль удобно представить (рис. 2) ломаной линией – системой отрезков $[a_i, b_i]$ достаточно малой длины, так чтобы на этом элементе параметры потока были постоянны.

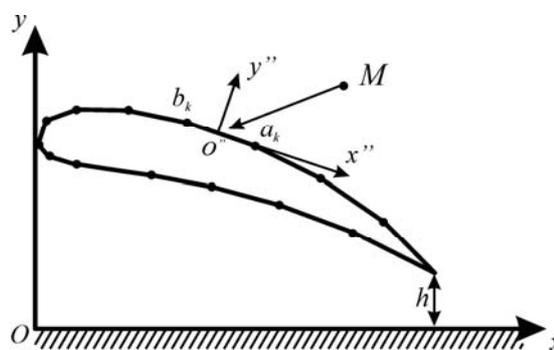


Рис. 2. Локальные координаты на элементе профиля

Тогда вопрос сводится к определению пределов интегралов с новыми ядрами в (20 – 21), когда $M \rightarrow M_0$ (рис. 3):

$$\int_{a_i}^{b_i} [\mathbf{n}, \nabla(\ln r)] dl, \quad (23)$$

$$\int_{a_i}^{b_i} [\mathbf{n}, \nabla \phi(\mathbf{r})] dl, \quad (24)$$

так как свойства интегралов с нормальными производными хорошо известны.

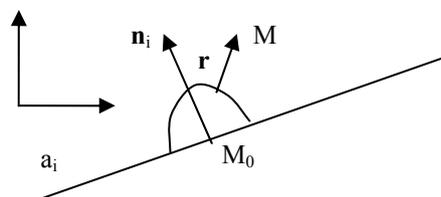


Рис. 3. Элемент профиля с выделенной особой точкой

Выделим предельную точку M_0 полуокружностью бесконечно малого радиуса. Тогда на дуге (рис. 3):

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial \ln r}{\partial n} dl = \int_0^\pi \frac{\varepsilon d\omega}{\varepsilon} = \pi,$$

а для ядра $\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})}{\partial n}$ имеет место аналогичный результат в силу того обстоятельства, что

$$\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \ln \frac{1}{r}.$$

Для исследования предельных свойств особых интегралов (23 – 24) выделим особую точку $M_0(x_0)$ ε -окрестностью, тогда в локальной системе координат, связанной с линейным элементом, где $\mathbf{n} \equiv \mathbf{j}$:

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} [\mathbf{n}, \nabla(\ln r)] dl &= \int_{a_i}^{b_i} \left[\mathbf{j}, \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right] dx = \\ &= \mathbf{k} \int_{a_i}^{x_0-\varepsilon} \frac{dx}{x_0-x} - \mathbf{k} \int_{x_0+\varepsilon}^{b_i} \frac{dx}{x-x_0} = \mathbf{k} \ln \frac{x_0-a}{b-x_0}. \end{aligned}$$

Для интегралов типа (27) в этом случае имеем последовательно:

$$\int_{a_i}^{b_i} [\mathbf{n}, \nabla \phi(\mathbf{r})] dx = \frac{\mathbf{k}}{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} (x-x_0) \int_1^\infty e^{-(x-x_0)\xi} \sqrt{\xi^2-1} d\xi dx.$$

Переставляя порядок интегрирования, подсчитаем интеграл по координате, учитывая выделение предельной точки при $x \rightarrow x_0$:

$$\begin{aligned} &\int_{a_i}^{b_i} (x-x_0) e^{-|x-x_0|\xi} dx = \\ &= - \int_{a_i}^{x_0-\varepsilon} (x_0-x) e^{-|x-x_0|\xi} dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b_i} (x-x_0) e^{-|x-x_0|\xi} dx. \end{aligned}$$

В обоих случаях, выполняя интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \int te^{-t\xi} dt &= \left| \begin{aligned} t = u, dt = du \\ e^{-t\xi} dt = dv, v = -\frac{e^{-t\xi}}{\xi} \end{aligned} \right| = \\ &= -t \frac{e^{-t\xi}}{\xi} + \int \frac{e^{-t\xi}}{\xi} dt = \\ &= -t \frac{e^{-t\xi}}{\xi} + \int \frac{e^{-t\xi}}{\xi} dt = -t \frac{e^{-t\xi}}{\xi} - \frac{e^{-t\xi}}{\xi^2}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} &\int_{a_i}^{b_i} (x-x_0) e^{-|x-x_0|\xi} dx = \\ &= \int_{x_0-a_i}^\varepsilon te^{-t\xi} dt + \int_\varepsilon^{b_i-x_0} te^{-t\xi} dt = \\ &= -\frac{\varepsilon}{\xi} e^{-\varepsilon\xi} - \frac{1}{\xi^2} e^{-\varepsilon\xi} + \frac{\varepsilon}{\xi} e^{-\varepsilon\xi} + \frac{1}{\xi^2} e^{-\varepsilon\xi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{x_0-a_i}{\xi} e^{-(x_0-a_i)t} + \frac{1}{\xi^2} e^{-(x_0-a_i)t} - \\ &- \frac{b_i-x_0}{\xi} e^{-(b_i-x_0)t} - \frac{1}{\xi^2} e^{-(b_i-x_0)t} = \\ &= \frac{x_0-a_i}{\xi} e^{-(x_0-a_i)t} + \frac{1}{\xi^2} e^{-(x_0-a_i)t} - \\ &- \frac{b_i-x_0}{\xi} e^{-(b_i-x_0)t} - \frac{1}{\xi^2} e^{-(b_i-x_0)t}, \end{aligned}$$

а для конечного радиуса модифицированные функции Бесселя ограничены [6].

Таким образом, приходим к корректной системе граничных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha p &= \oint_L (\mu \ln r V_n - \\ &- \mu([\mathbf{n}, \nabla(\ln r)], \boldsymbol{\Omega}) + p \frac{\partial \ln r}{\partial n}) dl; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \beta \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) &= \oint_L \left(\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) [\mathbf{n}, \mathbf{V}] - \frac{1}{\mu} [\mathbf{n}, \nabla \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})] p - \right. \\ &\left. - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right) d\rho l, \end{aligned} \quad (26)$$

однозначно разрешимой при заданных краевых условиях (5 – 6) на границах контрольной области и профиля (см. рис. 1).

3.4. Численная реализация задачи порывистого обтекания телесного профиля вблизи поверхности раздела

Интегральные представления решений (25 – 26) в области течения необходимо записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} p &= \oint_L (\mu \ln r V_n - \mu([\mathbf{n}, \nabla(\ln r)], \boldsymbol{\Omega}) + p \frac{\partial \ln r}{\partial n}) dl + \\ &+ \oint_\Sigma (\mu \ln r V_n - \mu([\mathbf{n}, \nabla(\ln r)], \boldsymbol{\Omega}) + p \frac{\partial \ln r}{\partial n}) dl, \quad (27) \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) &= \oint_L \left(\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) [\mathbf{n}, \mathbf{V}] - \frac{1}{\mu} [\mathbf{n}, \nabla \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})] p - \right. \\ &+ \oint_\Sigma \left(\phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) [\mathbf{n}, \mathbf{V}] - \frac{1}{\mu} [\mathbf{n}, \nabla \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})] p - \right. \\ &\left. \left. - \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})}{\partial n} \right) d\rho l, \end{aligned} \quad (28)$$

где обход контура профиля L выполняется по часовой стрелке, а граница контрольной области Σ – против часовой стрелки (рис. 1).

Методами элементарной аналитической геометрии координаты узловых точек (a_k, b_k) для всех $0 \leq k \leq N$ стандартного аэродинамического профиля, заданного в связанной системе координат $x'O'y'$ и движущегося под углом атаки α на рас-

стоянии h от твердой поверхности раздела (рис. 1), в базовой системе координат xOy определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha; \\ y &= -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + h. \end{aligned} \quad (29)$$

Численная реализация поставленной выше задачи основывается на квадратурно-интерполяционном методе, в соответствии с которым произвольный телесный профиль представляется многозвенником с острой задней кромкой, где угол между касательными к верхней и нижней границам конечен.

Поэтому, для реализации развитого численного метода необходимо от базовой системы координат xOy перейти к локальной системе координат $x''O''y''$ (рис. 4), связанной с элементарным отрезком профиля $[a_k, b_k]$ для всех $0 \leq k \leq N$.

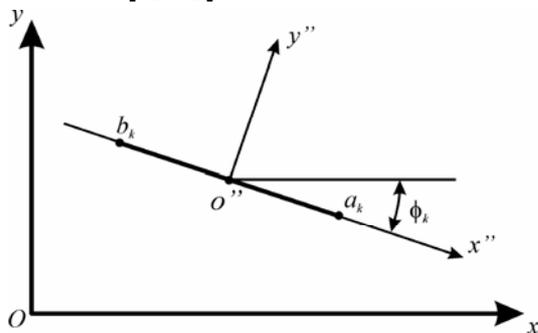


Рис. 4. Геометрические преобразования и локальные координаты

Тогда, аналогично (29), имеем:

$$\begin{aligned} x'' &= (x - x_{O''}) \cos \phi_k - (y - y_{O''}) \sin \phi_k; \\ y'' &= (x - x_{O''}) \sin \phi_k + (y - y_{O''}) \cos \phi_k, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\sin \phi_k = \frac{y_{b_k} - y_{a_k}}{l_k}$; $\cos \phi_k = \frac{x_{b_k} - x_{a_k}}{l_k}$,

$l_k^2 = (x_{b_k} - x_{a_k})^2 + (y_{b_k} - y_{a_k})^2$ – квадрат длины отрезка $[a_k, b_k]$, а начало координат системы $x''O''y''$ расположено на середине отрезка $[a_k, b_k]$:

$$x_{O''} = \frac{x_{b_k} + x_{a_k}}{2}; \quad y_{O''} = \frac{y_{b_k} + y_{a_k}}{2}. \quad (31)$$

Ядра $\frac{\partial \ln r_{lk}}{\partial n}$; $[\mathbf{n}, \nabla \ln r_{lk}]$; $\frac{\partial K_0(r_{lk})}{\partial n}$;

$[\mathbf{n}, \mathbf{r}_{lk} K_1(r_{lk})]$ являются непрерывными. В силу малости длин отрезков l_{lk} , интегрирование с достаточной степенью точности выполняется по известным формулам с учетом уравнений отрезков в виде

$$y_1 = y_{a_1} + (x_1 - x_{a_1}) \frac{y_{b_1} - y_{a_1}}{x_{b_1} - x_{a_1}}; \quad y'_1 = \frac{y_{b_1} - y_{a_1}}{x_{b_1} - x_{a_1}} \quad \text{или}$$

$$x_1 = x_{a_1} + (y_1 - y_{a_1}) \frac{x_{b_1} - x_{a_1}}{y_{b_1} - y_{a_1}}; \quad x'_1 = \frac{x_{b_1} - x_{a_1}}{y_{b_1} - y_{a_1}}; \quad \text{тогда в}$$

случае непрерывных плотностей

$$\begin{aligned} \int_{(a_1, b_1)} f(x_1, y_1, x_{0k}, y_{0k}) dl &= \int_{x_{a_1}}^{x_{b_1}} f(x_1, y_1(x_1), x_{0k}, y_{0k}) \times \\ &\times \sqrt{1 + y_1'^2(x_1)} dx = f(x_{01}, y_{01}, x_{0k}, y_{0k}) \times \\ &\times \int_{x_{a_1}}^{x_{b_1}} \frac{l_1}{x_{b_1} - x_{a_1}} dx = f(x_{01}, y_{01}, x_{0k}, y_{0k}) l_1. \end{aligned}$$

Во втором случае получается аналогичный результат:

$$\begin{aligned} \int_{(a_1, b_1)} f(x_1, y_1, x_{0k}, y_{0k}) dl &= \int_{y_{a_1}}^{y_{b_1}} f(x_1(y_1), y_1, x_{0k}, y_{0k}) \times \\ &\times \sqrt{1 + x_1'^2(y_1)} dy = f(x_{01}, y_{01}, x_{0k}, y_{0k}) \times \\ &\times \int_{y_{a_1}}^{y_{b_1}} \frac{l_1}{y_{b_1} - y_{a_1}} dy = f(x_{01}, y_{01}, x_{0k}, y_{0k}) l_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу условий Коши-Римана для гармонических функций

$$\frac{\partial \ln r_{lk}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\arctg \frac{y_1 - y_k}{x_1 - x_k} \right) \quad \text{и поэтому численные}$$

вычисления здесь основывается на представлениях

$$\begin{aligned} \int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) \frac{\partial \ln r_{lk}}{\partial n_k} dl &= \\ &= \int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) \frac{\partial}{\partial l_k} \left(\arctg \frac{y_1 - y_k}{x_1 - x_k} \right) dl = \\ &= f(x_{0k}, y_{0k}) \arctg \frac{y_1 - y_k}{x_1 - x_k} \Big|_{x_{a_k}}^{x_{b_k}} = \\ &= f(x_{0k}, y_{0k}) \left[\arctg \frac{y_1 - y_{b_k}}{x_1 - x_{b_k}} - \arctg \frac{y_1 - y_{a_k}}{x_1 - x_{a_k}} \right] = \\ &= f(x_{0k}, y_{0k}) \arctg \frac{\frac{y_1 - y_{b_k}}{x_1 - x_{b_k}} - \frac{y_1 - y_{a_k}}{x_1 - x_{a_k}}}{1 + \frac{y_1 - y_{b_k}}{x_1 - x_{b_k}} \frac{y_1 - y_{a_k}}{x_1 - x_{a_k}}}, \end{aligned}$$

что оказывается несколько точнее предшествующего.

В случае выполнения граничного условия на отрезке интегрирования (a_k, b_k) для вычисления несобственных интегралов типа потенциалов двойного слоя с ядрами

$$\frac{\partial \ln r_k}{\partial n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial K_0(r_k)}{\partial n},$$

где $r_k^2 = (x_k - x_{0k})^2 + (y_k - y_{0k})^2$ в системе координат, связанной с отрезком (a_k, b_k) , неподвижную особую точку выделим полуокружностью сколь угодно малого радиуса ε с центром в точке (x_{0k}, y_{0k}) (рис. 5). Причем, как доказано [4], от положения этой точки на отрезке интегрирования (a_k, b_k) результат не зависит.

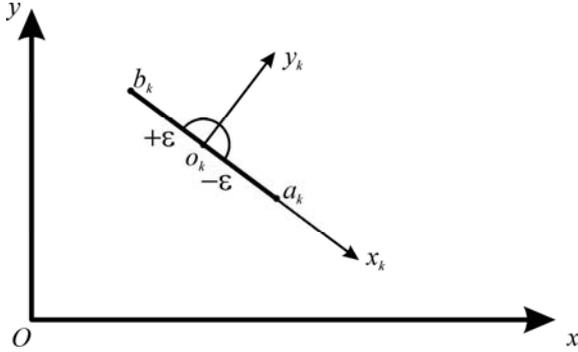


Рис. 5. Элемент профиля с исключенной особой точкой

Таким образом, для исследования предельного значения потенциала двойного слоя с фундаментальным решением уравнения Лапласа в интегральных представлениях (25 – 26), когда точка области течения стремится к границе профиля, имеем последовательно

$$\int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) \frac{\partial \ln r_k}{\partial n_k} dl = \int_{x_{a_k}}^{\varepsilon} f(x_k, y_k) \frac{\partial \ln r_k}{\partial y_k} dx + \int_{(C_\varepsilon)} f(x_k, y_k) \frac{\partial \ln r_k}{\partial r_k} \varepsilon d\varphi + \int_{-\varepsilon}^{x_{b_k}} f(x_k, y_k) \frac{\partial \ln r_k}{\partial y_k} dx.$$

Здесь в первом и третьем интегралах ядра непрерывны, так как $r_k \neq 0$, и в предельном случае, когда $y_k \rightarrow 0$ на интервале (a_k, b_k) ,

$$\lim_{y_k \rightarrow 0} \frac{\partial r_k}{\partial y_k} = \lim_{y_k \rightarrow 0} \frac{y_k}{x_k^2 + y_k^2} = 0.$$

Для интеграла по полуокружности получаем стандартный результат [4]:

$$\int_{(C_\varepsilon)} f(x_k, y_k) \frac{\partial \ln r_k}{\partial r_k} \varepsilon d\varphi = f(x_{0k}, y_{0k}) \int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon d\varphi = \pi f(x_{0k}, y_{0k}). \quad (32)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) \frac{\partial \ln r_k}{\partial n_k} dl = \pi f(x_{0k}, y_{0k}). \quad (33)$$

С другой стороны, в силу аналитичности функ-

ций $\varphi = \ln \sqrt{(x_k - x_{k0})^2 + (y_k - y_{k0})^2}$ и

$\psi = \arctg \frac{y_k - y_{k0}}{x_k - x_{k0}}$, а также условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial l},$$

$$\begin{aligned} \int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) \frac{\partial \ln r_k}{\partial n_k} dl &= \\ &= \int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) \frac{\partial}{\partial l_k} \left(\arctg \frac{y_k - y_{k0}}{x_k - x_{k0}} \right) dl = \\ &= \pi f(x_{0k}, y_{0k}). \end{aligned}$$

В случае уравнения Клейна-Гордона-Фока [5], фундаментальное решение которого исследовалось О. Пикаром [4] и экстремальные значения были приведены выше [5], важно подчеркнуть, что при $r_k \leq \varepsilon$ $K_0(r_k) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln r_k$ и поэтому сохраняется идеология, приведенная выше, вычисления предельных значений потенциала двойного слоя и в случае уравнения Клейна-Гордона-Фока:

$$\begin{aligned} \int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) \frac{\partial K_0(r_k)}{\partial n_k} dl &= \\ &= \int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) (\mathbf{n}_k, \nabla K_0(r_k)) dl = \\ &= \int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) (\mathbf{n}_k, \mathbf{r}_k) K_1(r_k) dl, \end{aligned}$$

где модифицированные функции Бесселя нулевого K_0 и первого K_1 порядков соответственно имеют интегральные представления [6]:

$$K_0(r_k) = \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-r_k \tau}}{\sqrt{\tau^2 - 1}} d\tau,$$

а $K_1(r_k) = -\frac{1}{2\pi} \int_1^\infty e^{-r_k \tau} \sqrt{\tau^2 - 1} d\tau,$

и неограниченно возрастают при $r_k \rightarrow 0$ (табл. 1). Поэтому окончательно проведенные вычисления дают

$$\int_{(a_k, b_k)} f(x_k, y_k) \frac{\partial K_0(r_k)}{\partial n_k} dl = -\pi f(x_{0k}, y_{0k}). \quad (34)$$

Предельные значения интегралов в представлениях (28, 29):

$$\begin{aligned} \int_{(a_k, b_k)} [\mathbf{n}_k, \nabla \ln r_k] f(x_k, y_k) dl; \\ \int_{(a_k, b_k)} [\mathbf{n}_k, \nabla K_0(r_k)] f(x_k, y_k) dl \end{aligned}$$

относятся к классу сингулярных интегралов. Дейст-

вительно, на отрезке (a_k, b_k) вектор нормали

$\mathbf{n}_k \equiv \mathbf{j}_k$, а на полуокружности $C_\varepsilon : \mathbf{n}_k \equiv \frac{\mathbf{r}_k}{r_k}$. Тогда

$$\int_{(a_k, b_k)} [\mathbf{n}_k, \nabla \ln r_k] f(x_k, y_k) dl =$$

$$= -\mathbf{k} \int_{x_{ak}}^{\varepsilon} \frac{x_k - x_{k0}}{(x_k - x_{k0})^2 + (y_k - y_{k0})^2} f(x_k, y_k) dx +$$

$$+ \int_0^{\pi} \left[\frac{\mathbf{r}_k}{r_k}, \frac{\mathbf{r}_k}{r_k} \right] f(x_k, y_k) r_k d\delta -$$

$$-\mathbf{k} \int_{-\varepsilon}^{x_{bk}} \frac{x_k - x_{k0}}{(x_k - x_{k0})^2 + (y_k - y_{k0})^2} f(x_k, y_k) dx,$$

где \mathbf{k} – орт перпендикулярный плоскости течения.

Таблица 1

Модифицированные функции Бесселя
нулевого и первого порядков

r	K_0	K_1
1,0000000e-003	7,0236888e+000	9,9999624e+002
3,0000000e-003	5,9250901e+000	3,3332370e+002
5,0000000e-003	5,4142890e+000	1,9998521e+002
7,0000000e-003	5,0778511e+000	1,4283762e+002
8,0000000e-003	4,9443404e+000	1,2497822e+002
1,0000000e-002	4,7212447e+000	9,9973894e+001
1,2000000e-002	4,5389795e+000	8,3303100e+001
1,4000000e-002	4,3848933e+000	7,1394378e+001
1,7000000e-002	4,1908485e+000	5,8783659e+001
1,8000000e-002	4,1337308e+000	5,5513854e+001
2,0000000e-002	4,0284573e+000	4,9954718e+001
2,2000000e-002	3,9332412e+000	4,5405783e+001
2,6000000e-002	3,7663957e+000	3,8406080e+001
2,8000000e-002	3,6924019e+000	3,5655598e+001
3,0000000e-002	3,6235295e+000	3,3271488e+001
3,2000000e-002	3,5591178e+000	3,1185063e+001
3,4000000e-002	3,4986261e+000	2,9343798e+001
3,5000000e-002	3,4697073e+000	2,8501970e+001
3,6000000e-002	3,4416066e+000	2,7706841e+001
3,8000000e-002	3,3876842e+000	2,6241938e+001
3,9000000e-002	3,3617833e+000	2,5565736e+001
4,0000000e-002	3,3365415e+000	2,4923286e+001
4,2000000e-002	3,2879075e+000	2,3729996e+001
4,3000000e-002	3,2644573e+000	2,3174898e+001
4,4000000e-002	3,2415494e+000	2,2644980e+001
4,5000000e-002	3,2191595e+000	2,2138564e+001
4,6000000e-002	3,1972649e+000	2,1654117e+001
4,7000000e-002	3,1758444e+000	2,1190239e+001
4,8000000e-002	3,1548780e+000	2,0745643e+001
4,9000000e-002	3,1343471e+000	2,0319150e+001
5,0000000e-002	3,1142340e+000	1,9909674e+001

Здесь понятно, что в любом случае интеграл по дуге окружности C_ε исчезает, а предел исходного интеграла при $y_k - y_{k0} \rightarrow 0$ существует в смысле главного значения

$$\int_{(a_k, b_k)} [\mathbf{n}_k, \nabla \ln r_k] f(x_k, y_k) dl =$$

$$= -\mathbf{k} \int_{x_{ak}}^{\varepsilon} \frac{f(x_k, y_k)}{x_k - x_{k0}} dx +$$

$$+ \mathbf{k} \int_{-\varepsilon}^{x_{bk}} \frac{f(x_k, y_k)}{x_{k0} - x_k} dx =$$

$$= -\mathbf{k} f(x_{k0}, y_{k0}) \times$$

$$\times \left\{ \int_{x_{ak}}^{\varepsilon} \frac{dx}{x_k - x_{k0}} - \int_{-\varepsilon}^{x_{bk}} \frac{dx}{x_{k0} - x_k} \right\} =$$

$$= -\mathbf{k} f(x_{k0}, y_{k0}) \times$$

$$\times \left[\ln \frac{\varepsilon - x_{k0}}{x_{ak} - x_{k0}} + \ln \frac{x_{k0} - x_{bk}}{x_{k0} + \varepsilon} \right].$$

И тогда, окончательно, имеем квадратурную формулу

$$\int_{(a_k, b_k)} [\mathbf{n}_k, \nabla \ln r_k] f(x_k, y_k) dl =$$

$$= \mathbf{k} f(x_{k0}, y_{k0}) \left[\ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \ln \frac{x_{k0} - x_{bk}}{x_{ak} - x_{k0}} \right] =$$

$$= -\mathbf{k} f(x_{k0}, y_{k0}) \ln \frac{x_{k0} - x_{bk}}{x_{ak} - x_{k0}},$$

которая существует при $x_{bk} < 0$. Если выбрать $x_{k0} = 0$, что не сказывается на результатах вычислений, а $x_{ak} = -x_{bk}$, то

$$\int_{(a_k, b_k)} [\mathbf{n}_k, \nabla \ln r_k] f(x_k, y_k) dl = 0. \quad (36)$$

В заключение приведем результаты тестовых расчетов аэродинамических характеристик телесного профиля

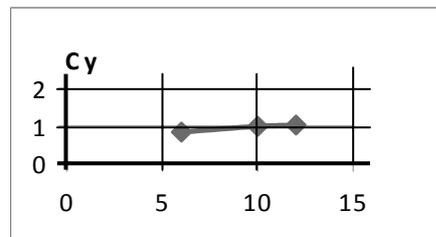


Рис. 6. Зависимость подъемной силы профиля от угла атаки при $h = 0,5$ и в момент времени $t = 0,01$ с

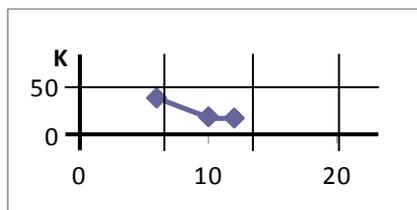


Рис. 7. Зависимость качества профиля от угла атаки при $h = 0,5$ и в момент времени $t = 0,01$ с

Заключение

Представлено развитие нового общего направления численно-аналитического решения широкого класса задач механики сплошных сред. Развита новый подход и формализм в построении граничных интегральных уравнений, эквивалентных начально-краевым задачам основных математических моделей механики жидкости и газа.

Литература

1. Некрасов А.Н. Теория крыла в нестационарном потоке / А.Н. Некрасов. — М.: Изд-во АН СССР, 1947. — 258 с.
2. Голубев В.В. Лекции по теории крыла / В.В. Голубев. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 480 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1970. — 904 с.
4. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. — М.: Наука, 1966. — 204 с.
5. Крашаница Ю.А. Нестационарное движение телесного профиля вблизи поверхности раздела в вязкой среде / Ю.А. Крашаница, Ф.А. Шалал // Авиационно-космическая техника и технология. — 2007. № 3(39). — С. 56-61.
6. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Поступила в редакцию 2.09.2008

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры А.В. Бастеев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ОЗЕЕНА РУХУ ТІЛЕСНОГО ПРОФІЛЮ ПОБЛИЗУ ПОВЕРХНІ РОЗПОДІЛУ

Фаяд А. Шалал

На базі узагальнених потенціалів, оригінального апарату векторно-тензорного аналізу й систематичного застосування методу граничних інтегральних рівнянь показана однозначна можливість розв'язання початково-крайових задач формування кінематичних і динамічних характеристик при обтіканні тілесного профілю потоком в'язкої нестисливої рідини в багатозв'язній області. Представлено результати обчислювального експерименту визначення аеродинамічних характеристик при впливі раптового пориву повітря на реальний профіль крила літака, розташований поблизу поверхні розподілу.

Ключові слова: початково-крайова задача Озеена, інтегральні подання рішень, системи інтегральних рівнянь, завихреність, тиск, коефіцієнти піднімальної сили й опору, якість.

NUMERICAL REALIZATION OF INITIAL-REGIONAL OZEEN PROBLEM OF THE CORPORAL PROFILE MOVEMENT NEAR TO THE BOUNDING SURFACE

Fayad A. Shalal

On the basis of the generalized potentials and the original system of vector and tensor analysis and regular application of the boundary integral equations method the resolvability of unequivocal initial-regional problems during kinematics and dynamic characteristics formation is shown at the viscous incompressible liquid stream flow about the corporal profile in multicoherent area. Results of computing experiment of distributed and total aerodynamic characteristics determination are presented at influence of a sudden impulse of air on a real profile of aircraft wing which is located near to the bounding surface.

Key words: system of Ozeen equations, an initial-regional problem, integrated representations of results, systems of the integral equations, vorticity, pressure, factors of elevating force and resistance, polar diagram, aerodynamic quality.

Фаяд А. Шалал (Fayad A. Shalal) — аспирант кафедри аэрогидродинамики Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.