

УДК 631.7.04-197:631:7.019.21

В.О. ПОВГОРОДНИЙ

Институт проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного, Украина

РАСЧЕТ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ДЕФОРМАЦИЙ ТЕЛА

Рассмотрен метод решения нестационарной обратной задачи термоупругости (ОЗТУ), которая связана с нахождением температурного поля на основе измерений деформации в некоторых точках тела. Рассматриваемые в теории теплопроводности и термоупругости задачи связаны, как правило, с нахождением температурного поля на основе заданных краевых условий теплообмена и граничных механических условий. Данные задачи применимы в случаях, когда измерения на отдельных частях тела (объекта) затруднены. При решении задач термоупругости используется один из численных методов – метод конечных разностей. Рассмотрены два примера для определения температурного поля. Данные задачи могут широко применяться при решении задач теплопроводности и термоупругости в различных объектах энергетического машиностроения, в частности, в дисках и лопатках турбин.

Ключевые слова: обратная задача, градиент, температурное напряжение, численный метод, конечная разность.

Введение

Рассмотрим метод решения нестационарной обратной задачи термоупругости (ОЗТУ), которая связана с нахождением температурного поля на основе измерений деформации в некоторых точках тела.

Рассматриваемые в теории теплопроводности задачи связаны, как правило, с нахождением температурного поля на основе заданных краевых условий теплообмена. На практике, возникают ситуации когда определение этих условий неосуществимо или трудноосуществимо и для нахождения температурной функции необходимы результаты некоторых косвенных измерений, в частности, измерений тепловой деформации тела. В последнем случае, отыскание, температурного поля является по существу обратной задачей термоупругости (ОЗТУ). Решение такого рода задач в ряде случаев является основой математического обеспечения.

Математическая модель

Рассмотрим численный метод восстановления поля температур по данным измерения деформации пластины ($0 \leq z \leq 1$) произвольной формы в плане. Пластина является свободной, т.е. напряжения на ее границах $z = 0$ и $z = 1$ отсутствуют. Деформация ее обусловлена изменением температуры T по толщине Z и времени τ , причем, влиянием деформации на температуру и инерционными эффектами можно пренебречь. Физические характеристики материала пластины являются заданными. Известна температура в начальный момент времени $\tau = 0$

$$T(z, 0) = \phi(z) \quad (1)$$

и на нижней границе ($z = 0$):

$$T(0, \tau) = \psi(\tau). \quad (2)$$

Кроме того, известна одна из компонент перемещения, скажем в направлении оси Z , для произвольной точки тела с координатами $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ относительно неподвижной его точки

$$\omega(x_0, y_0, z_0, \tau) = \psi_1(\tau). \quad (3)$$

Требуется определить температуру $T(1, \tau)$ на верхней границе ($z = 1$) пластины

$$T'(1, \tau) = T_\Gamma(\tau). \quad (4)$$

Если функция $T_\Gamma(\tau)$ в некотором приближении найдена, то определение полей температуры, напряжений или деформаций при условиях (1), (2) и (4) представляет собой прямую задачу термоупругости (ПЗТУ) решение которой не вызывает затруднений.

Рассмотрим метод поиска функций $T_\Gamma(\tau)$ исходя из условия, чтобы отвечающая ей расчетная компонента теплового перемещения ω_p в точке с координатами $(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$ совпадала с заданной функцией на множестве точек Q , т.е.

$$|\omega_p(x_0, y_0, z_0, \tau) - \psi_1(\tau)| < E, \tau \in Q,$$

где E – некоторое малое число, которое в расчетах принималось равным $10^{-9} \cdot \max |\psi_1(\tau)|$. Множество Q может быть определено как минимальное число точек интервала изменения переменной τ , которое обеспечивает для всех измеренных значений перемещений выполнение условия

$$|\omega_p(x_0, y_0, z_0, \tau) - \psi_1(\tau)| < \delta,$$

где δ – погрешность измерения исходных данных, в частности, $\psi_1(\tau)$.

Поиск же функции $T_r(\tau)$ будет связан с многократным вычислением при условиях (1), (2) и (4) полей температур и перемещений. Для рассматриваемого метода не существенно, как решить эту ПЗТУ (численно или аналитически). При практической реализации метода температура $T_i^{k+1} \approx T(z_i, \tau_{k+1})$ во внутренних точках находилась по явной разностной схеме, исходя из метода конечных разностей.

Теплопроводность λ , теплоемкость c и плотность ρ могут быть функциями координаты z , времени или температуры.

Перемещения, напряжения и деформации можно определить также на основе явной разностной схемы решения уравнений термоупругости в перемещениях методом установления. Для простоты будем полагать, что модуль упругости $E = \text{const}$, коэффициенты термического расширения $\alpha = \text{const}$ и Пуассона $\mu = \text{const}$. В этом и деформациями, с одной стороны, и температурой $T(z, \tau)$, с другой – может быть представлена в аналитическом виде, причем компонента перемещения вдоль оси Z по известной формуле в аналитической механике [1]

Поиск $T_r(\tau)$ производится по шагам $\Delta\tau$ вдоль оси τ причем, $\Delta\tau$ выбирается из условия, чтобы тепловые возмущения, возникшие в период $\Delta\tau$ на границе $z = l$, достаточно отчетливо проявились на границе. Контрольные расчеты показали, что шаг $\Delta\tau$ должен удовлетворять неравенству $\Delta F_0 = \Delta\tau\lambda / (c\rho l^2) \geq 0,3$.

Это ограничение не позволяет прибегнуть к линейной аппроксимации T_r функции в интервале $\Delta\tau$. Представим функцию T_r в интервале $\tau_0^s < \tau < \tau_0^s + \Delta\tau$ в виде степенного ряда

$$T_r(\tau) = a_0^s + a_1^s(\tau - \tau_0^s) + a_2^s(\tau - \tau_0^s)(\tau - \tau_1^s) + \dots + a_m^s(\tau - \tau_0^s) \times (\tau - \tau_1^s) \dots (\tau - \tau_{m-1}^s) + \dots \quad (10)$$

Это разложение удобно в том отношении, что члены ряда с порядковым номером $r > m$ не оказывают влияния на значения функции T_r в точках $\tau_0^s, \tau_1^s, \dots, \tau_m^s$. Каждому коэффициенту ряда (10) ставится в соответствие определенная точка τ_m^s интервала $[\tau_0^s, \tau_0^s + \Delta\tau]$.

Результаты численных экспериментов показали, что при не слишком резком изменении температурного поля в ряде (10) достаточно удерживать только три первых члена. Коэффициентам a_0^s, a_1^s и a_2^s сопоставляются точки $\tau_0^s, \tau_0^s + \Delta\tau$ и $\tau_0^s + \Delta\tau/2$, соответственно.

Начальное условие (1) определяет значение $T_r(0) = a_0^0 = \phi(1)$. Предположим, что функция $T_r(\tau)$

в интервале $[\tau_0^{s-1}, \tau_0^{s-1} + \Delta\tau]$ найдена и ее требуется

определить в интервале $[\tau_0^s, \tau_0^s + \Delta\tau]$. Как показали

численные эксперименты, с точки зрения точности и экономичности решения целесообразно положить

$$\tau_0^s = \tau_0^{s-1} + \frac{\Delta\tau}{2}. \text{ При этом,}$$

$$T_r(\tau_0^s) = a_0^s = T_r(\tau_0^{s-1} + \Delta\tau/2),$$

т.е. коэффициент a_0^s при отыскании функции $T_r(\tau)$ в

интервале $[\tau_0, \tau_0^s + \Delta\tau]$ следует считать известной

величиной. Коэффициенты a_1^s и a_2^s определяются

путем итераций. Предполагая, что в интервале $[\tau_0, \tau_0^s + \Delta\tau]$ функция $T_{r(1)}(\tau)$ известна в первом при-

ближении, решаем прямую задачу термоупругости в том же интервале и определяем температурные перемещения в первом приближении. Разность между перемещением в вычисленном в приближении в определенной точке и заданным перемещением (деформацией), используется как сигнал рассогласования для получения последующего приближения коэффициента $a_{m(n+1)}^s$, которому поставлена в соответствие точка

τ_m^s . Далее определяется абсолютная скорость изменения функции температурного перемещения (деформации) по величине a_m^s . Кроме того, следует сказать, что последняя формула не может быть использована для определения скорости изменения температурной деформации (перемещения), которая полагается равной соответственно скорости на предыдущем шаге.

После того как в результате последовательных приближений добиваются выполнения условия (5) осуществляется второе приближение для коэффициента, как и для первого, проводится с использованием (11) исходя из требования удовлетворения (5) в точке интервала. После каждого изменения коэффициента проводится цикл итераций, который связан с определением значения, обеспечивающего удовлетворение условия точности в определенной точке. Далее осуществляется следующее приближение. Поиск функции в интервале прекращается, когда условие (5) удовлетворяется как в точке, так и на границе.

Рассмотрим первый пример. Для опробования описанного метода проведен следующий численный эксперимент. Вначале на основе соотношений решена прямая задача термоупругости (ПЗТУ) при таких исходных данных:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1; \psi(\tau) = \exp(-b_2\tau) \sin b_3\tau; z_0 = 1/2; \\ (6\alpha/l^3) \cdot (x_0^2 + y_0^2) &= b_4; h = 1/10 = 0,1; l = 0,3 \cdot 10^{-2}; \\ c\rho &= 1; \lambda = b_5 + b_6\tau + b_7\tau^2; b\gamma = \text{const}; \gamma = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Для установления степени влияния неточности измерения входных данных на погрешность искомых величин на функции $\phi(z)$ и $\psi(\tau)$, а также найденную в результате решения прямой задачи функцию $\psi_1(\tau) = \omega(x_0, y_0, z_0, \tau)$ накладываются возмущения: - температурное поле в начальный момент времени возмущалось путем замены в (1) функции $\phi(z)$ другой функцией $\phi(z) (1 + b_8 \sin b_9 z)$, $b_8 = 0 - 0,15$; $b_9 = 0 - 100$.) Температура на границе $z = 0$ возмущалась добавлением к $\psi(\tau)$ знакопеременной функции $\psi b_{10} \sin b_{11} \tau$. Для возмущения функции температурного перемещения использовался датчик псевдослучайных чисел, распределенных по нормальному закону при средней относительной ошибке $\zeta = 0 - 0,3$.

Далее, на основе описанного метода проводится решение ОЗТУ на возмущенных входных данных и в результате определяется функция $T(L, \tau)$ – верхняя граница. Последняя сравнивается с ее точным выражением $T_u(\tau)$, которое использовано при решении прямой задачи термоупругости ПЗТУ).

На проведение численного эксперимента при заданных значениях в γ на сетке $I = 10$ при измене-

нии числа (критерия) Фурье $Fo = \frac{\lambda \tau}{c r l^2}$ в интервале

$0 < Fo < 5$ значительное количество машинного времени, а на каждом интервале 4 – 5 итераций. При этом, на каждом интервале времени для определения коэффициентов требуется 4 – 5 итераций. Погрешность решения ОЗТУ при невозмущенных входных данных практически не отличается от погрешности решения на той же сетке прямой задачи.

На плакатах к докладу представлены результаты расчетов для случаев, когда краевые условия для ОЗТУ заданы точно или с некоторой погрешностью. Погрешность при задании начальных данных оказывает влияние на решение лишь при относительно небольших значениях числа.

Многочисленные результаты расчетов показали, что погрешность решения, обычно, не превышала погрешности задания краевых условий в широком диапазоне изменения последней. Это обстоятельство свидетельствует об эффективности метода решения.

Рассмотрим второй пример. В случае, когда упругие характеристики материала в пределах каждого слоя являются постоянными, можно получить точные аналитические решения задач термоупругости для многослойных конструкций [2]. Рассмотрим задачу термоупругости для двухслойного тонкого круглого диска (плоское напряженное состояние) с центральным отверстием при осесимметричном температурном поле.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_i}{dr} - \frac{1}{r^2} U_i - (1 + \nu_i) \alpha_i \frac{dT_i(r)}{dr} = 0; \quad (5)$$

где U – радиальное перемещение; r – координата; μ – коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного расширения; T – температура, $i = 1, 2$.

Общий интеграл уравнения (5) будет

$$U_i = C_{li} r + C_{2i} \frac{1}{r} + (1 + \nu_i) \frac{\alpha_i}{r} \int_{r_i}^r T_i(r) r dr, \quad (6)$$

где C_{li}, C_{2i} ($i = 1, 2$) – постоянные интегрирования.

Формулы для определения радиальных и окружных напряжений имеют вид:

$$\sigma_{ri} = C_{li} \frac{E_i}{(1 - \nu_i)} - C_{2i} \frac{E_i}{(1 + \nu_i) r^2} - \frac{\alpha_i E_i}{r^2} \int_{r_i}^r T_i(r) r dr; \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta i} = C_{li} \frac{E_i}{(1 - \nu_i)} + C_{2i} \frac{E_i}{(1 + \nu_i) r^2} - \alpha_i E_i T_i(r) + \frac{\alpha_i E_i}{r^2} \int_{r_i}^r T_i(r) r dr; \quad (8)$$

где E – модуль нормальной упругости (модуль Юнга).

Неизвестные постоянные C_{li}, C_{2i} ($i = 1, 2$), находясь из граничных условий, а именно, равенство нулю напряжений на границах двухслойного диска) и условий сопряжения, а именно, равенство напряжений и перемещений в точке контакта слоев). Подставляя известные зависимости для определения коэффициентов C_{li}, C_{2i} ($i = 1, 2$) получим систему алгебраических линейных уравнений, которые решаем известными матричными методами.

После определения неизвестных постоянных напряжения и перемещения находятся по формулам теории термоупругости, исходя из температурных напряжений.

Найденное решение конкретной задачи термоупругости для двухслойного диска с центральным отверстием при следующих исходных данных представлено на рис.1.

Температурная кривая для каждого слоя аппроксимировалась функцией вида

$$T_i(r) = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ki} \phi_k(r),$$

где α_{ki} , ($i = 1, 2$) – неизвестные коэффициенты;

$\phi_k = r^{k-1}$ – координатные функции.

Были получены следующие значения коэффициентов α_{ki} :

$$\alpha_{11} = 202,140; \alpha_{12} = -10,022; \alpha_{13} = 0,222; \alpha_{14} = -1,950;$$

$$\alpha_{21} = 675,02; \alpha_{22} = -38,5; \alpha_{23} = 0,77; \alpha_{24} = -5,16.$$

Графики распределения температуры напряжений представлены на рис. 1 – 3 соответственно.

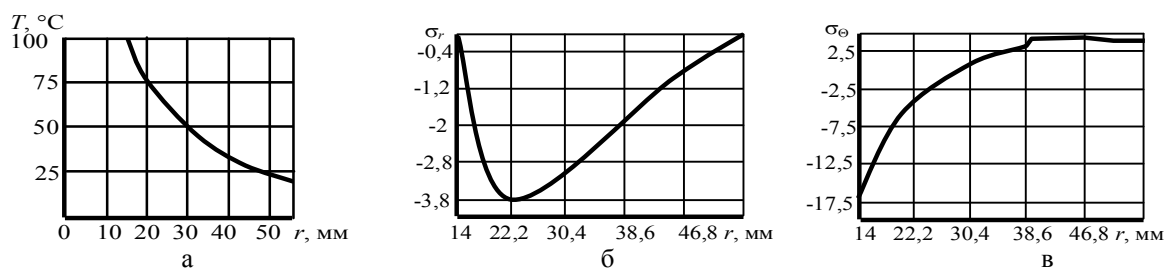


Рис. 1. График распределения в двухслойном диске: а – температуры; б – напряжения σ_r ; в – напряжения σ_θ

Заключение

Совершенствование расчетной базы в современном машиностроении и энергомашиностроении – важная научно-техническая и производственная задача, на решение которой направлена данная статья.

Одной из составляющих этой статьи есть правильный, научно-обоснованный выбор допускаемых напряжений для проекторочных и проверочных прочностных расчетов в машиностроении. Приведенные примеры подтверждают эффективность использования данной методики. Целью данной статьи автор поставил оценку и учет температурных напряжений и деформаций при выборе допускаемых напряжений для несущих деталей машин в виде тел вращения, поверхностный

слой которых имеет иные физико-механические характеристики, чем материал основания (ПС-слой) [3].

Литература

1. Никитенко Н.И. Метод расчета поля температур по данным измерений деформации тела. / Н.И.Никитенко // Инж.-физ. журнал. – Минск, 1985. – Т. XLIX, № 3. – С. 491-496.
2. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях/ В.А. Кудинов, Б.В. Аверин., Е.В. Стефанюк., С.А. Назаренко. – Самара.: СамГТУ, 2006. – 303 с.
3. Бахышев Ш.М. Обратные задачи термоупругости: моногр. / Ш.М. Бахышев – М.: Машиностроение, 2004. – 340 с.

Поступила в редакцию 2.06.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры П.Д. Доценко, Харьковский национальный аэрокосмический университет «ХАИ», Харьков, Украина.

РОЗРАХУНОК ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР ЗА ДАНИМИ ВИМІРУ ДЕФОРМАЦІЙ ТІЛА

В.О. Повгородний

Розглянуто метод розв'язку нестандартної оберненої задачі термопружності (ОЗТП), котра пов'язана з знаходженням температурного поля на основі виміру температурних деформацій у деяких точках тіла. Розглянуті в теорії теплопровідності та термопружності задачі пов'язані в першу чергу, з знаходженням температурного поля з урахуванням крайових умов теплообміну та граничних механічних умов. Ці задачі використовуються в випадках, коли виміри на деяких частинах поверхні ускладнені. Розрахунок поля температурних деформацій здійснюється за допомогою чисельних методів, а, саме, за допомогою методу кінцевих різниць. Розглянуті два приклади вирішення оберненої задачі термопружності. Такі задачі широко використовуються при вирішенні характеристик теплопровідності та термопружності в різних об'єктах енергетичного машинобудування, в дисках та лопатках турбін, тобто енергетичного машинобудування.

Ключові слова: обернена задача, градієнт, температурна напруга, чисельний метод, кінцева різниця.

THE CALCULATION OF THE TEMPERATURE'S FIELD AFTER MEASURED BODIES DEFORMATION

V.O. Povgorodny

The article devoted to problems of definition and study of invers problem's of the thermoelasticity. The temperature field is definite with account temperature stress and other conditions. They are border's and edge's. The results for real rubber dampation compare with other results of calculation of the thermo and thermoelasticity problems. The results of calcuations of the thermal and stress state's are used by the digital methods. The results of calcuations of the thermal and stress state's are received by the method finite differences. These problems are used in others part's of thermo and thermoelasticity. In this article are used two examples. These problems are used of definition of the character's of the energetical machine buildings in disks and others of turbine. These data's are used in the project's of these constructions.

Key words: inverse problem, gradient, temperature's stress, digital method, finite difference.

Повгородний Владимир Олегович – канд. техн. наук, мл. научн. сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, e-mail: povgorod@ipmach.kharkov.ua.