

УДК 539.3

К.В. АВРАМОВ<sup>1</sup>, А.В. БОРИСЮК<sup>2</sup>, Л.В. РОЗОВА<sup>2</sup><sup>1</sup> *Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина*<sup>2</sup> *Национальный технический университет «ХПИ», Украина*

## БИФУРКАЦИИ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ОДНОДИСКОВОГО РОТОРА В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

*Получена математическая модель колебаний несимметричного однодискового ротора в подшипниках скольжения. Для анализа сил масляного слоя используется аналитическое решение уравнения Рейнольдса для короткого подшипника. В исследуемом диапазоне наблюдаются несколько видов установившихся движений: равномерное вращение ротора, автоколебания, возникающие в следствие седло-узловых бифуркаций в системе. Для анализа автоколебаний используется метод гармонического баланса и решение двухточечной краевой задачи. Решения, полученные методом гармонического анализа, сравниваются с результатами численного моделирования.*

**Ключевые слова:** несимметричный однодисковый ротор, подшипник скольжения, автоколебания, седло-узловые бифуркации, метод гармонического баланса, двухточечная краевая задача.

### Введение

Подшипники скольжения в качестве опор ротора находят применение в стационарных газотурбинных установках. В современных газотурбинных установках возникают многочастотных нелинейных колебаний [1]. В частности, автоколебания возникают вследствие взаимодействия масляной пленки подшипника скольжения с цапфой. Автоколебания сопровождаются потерями устойчивости и как следствие бифуркационными состояниями, что может привести к разрушению ряда роторных систем [2]. На сегодняшний день, для исследования динамики роторных систем применяются аналитические и численные методы нелинейной динамики [3]. Эти задачи широко исследовались как учеными, так и инженерами, что объясняется их важностью в технике. Позняк [4] аналитически описал давления в масляной пленке подшипников скольжения. Олимпиев [5] получил асимптотическое решение уравнения Рейнольдса используя вариационный подход. В монографии [6] рассматривается устойчивость цапфы в подшипнике скольжения. Каринцев, Шульженко [7] исследовали влияние инерции масляного слоя на значения давления в подшипнике и получили модель давлений в масляном слое для коротких подшипников скольжения. А.П. Филиппов, Н.Г. Шульженко [8] применяли асимптотические методы для исследования автоколебаний в роторах. Овчарова, Голоскоков [9] анализируют вынужденные колебания ротора, состоящего из упругого вала с тремя дискретными массами, с учетом масляного слоя в коротких подшипниках скольжения.

В этой статье выводятся уравнения нелинейных колебаний однодисковых роторов в коротких подшипниках скольжения. В усилиях, действующих на цапфы ротора со стороны масляного слоя, учитываются нелинейные члены вплоть до кубических слагаемых относительно обобщенных координат и их скоростей.

Для исследования автоколебаний в полученной системе применяется метод гармонического баланса и алгоритм продолжения для решения двухточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется устойчивость периодических движений.

### Уравнения движения

В данной статье рассматривается динамика ротора, который представляет собой диск, который крепится к вращающемуся упругому валу. Вал закреплен в коротких подшипниках скольжения. В процессе вращения вала цапфы А и В совершают колебания. Перемещения цапф А и В описываются обобщенными координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . В подшипнике, со стороны масляного слоя, возникают силы, которые действуют на цапфы вала. Проекция этих сил на соответствующие оси обозначим через  $F_x(x_i, y_i), F_y(x_i, y_i), i = \overline{1, 2}$ . На рис.1 представлена расчетная схема несимметричного однодискового ротора в подшипниках скольжения.

Ротор вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $Z$ , тогда угловую скорость диска представим следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \omega_1 \bar{e}_1^{-(3)} + \omega_2 \bar{e}_2^{-(3)} + \omega_3 \bar{e}_3^{-(3)}, \\ \omega_1 &= \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3, \\ \omega_2 &= \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3, \\ \omega_3 &= \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2.\end{aligned}\quad (1)$$

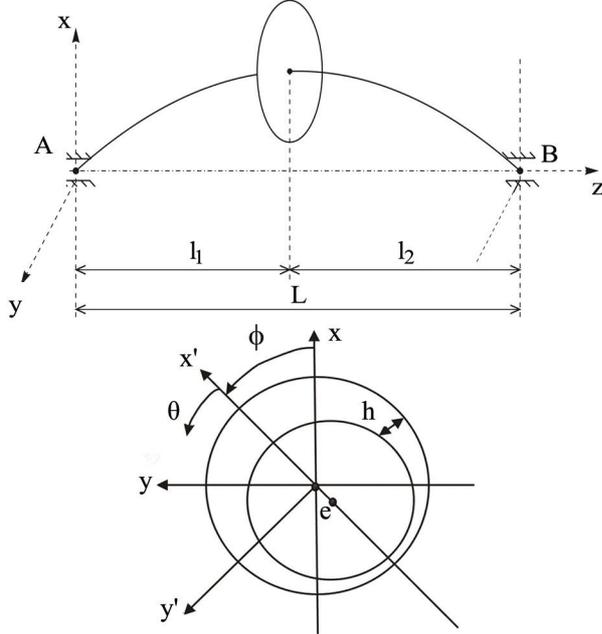


Рис. 1. Расчетная схема однодискового ротора

Окончательно, угловую скорость  $\Omega$  представим так:  $\Omega = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$ . Используя (1), запишем кинетическую энергию в виде:

$$T = \frac{I_e}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2)$$

где  $x, y$  - обобщенные координаты, описывающие перемещения точек крепления диска к валу;

$I_e, I_p$  - экваториальный и полярный моменты инерции диска.

Потенциальную энергию системы представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} c_{11} \left[ (x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1)^2 + (y - \zeta_2 y_1 - \zeta_1 y_2)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} c_{22} \left[ \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 \right] + \\ &+ c_{12} \left[ (x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1) \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) - \right. \\ &\left. - (y - \zeta_2 y_1 - \zeta_1 y_2) \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right],\end{aligned}\quad (3)$$

где  $c_{11}, c_{12}, c_{22}$  - элементы матрицы жесткости;

$$\zeta_1 = \frac{l_1}{l}, \quad \zeta_2 = \frac{l_2}{l}.$$

Используя выражения для кинетической и потенциальной энергии (2, 3), запишем уравнения движения в следующем виде:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + c_{11} (x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1) + c_{12} \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) &= -mg, \\ m\ddot{y} + c_{11} (y - \zeta_1 y_2 - \zeta_2 y_1) - c_{12} \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) &= 0, \\ I_e \ddot{\theta}_1 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 + c_{22} \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - & \\ - c_{12} (y - \zeta_2 y_1 - \zeta_1 y_2) &= 0, \\ I_e \ddot{\theta}_2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 + c_{22} \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + & \\ + c_{12} (x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1) &= 0,\end{aligned}\quad (4)$$

Уравнения равновесия цапф ротора представим так:

$$\begin{aligned}\left( \frac{\tilde{n}_{12}}{l} - \zeta_2 c_{11} \right) (x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1) + & \\ + \left( \frac{c_{22}}{l} - \zeta_2 c_{12} \right) \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) &= F_x(x_1, y_1), \\ \left( \frac{\tilde{n}_{12}}{l} - \zeta_2 c_{11} \right) (y - \zeta_1 y_2 - \zeta_2 y_1) + & \\ + \left( \zeta_2 c_{12} - \frac{c_{22}}{l} \right) \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) &= F_y(x_1, y_1), \\ \left( \zeta_1 c_{11} + \frac{\tilde{n}_{12}}{l} \right) (x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1) + & \\ + \left( \frac{c_{22}}{l} + \zeta_1 c_{12} \right) \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) &= -F_x(x_2, y_2), \\ \left( \frac{\tilde{n}_{22}}{l} + \zeta_1 c_{12} \right) \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - & \\ - \left( \zeta_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (y - \zeta_2 y_1 - \zeta_1 y_2) &= F_y(x_2, y_2).\end{aligned}$$

Под действием силы тяжести ротор занимает некоторое состояние равновесия, которое характеризуется следующим набором обобщенных координат:  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ . Эти состояния равновесия определяются из следующей системы уравнений:

$$F_X(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = mg \frac{l_2}{l}, \quad F_X(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = mg \frac{l_1}{l}, \quad (5)$$

$$F_Y(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0, \quad F_Y(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0.$$

Остальные обобщенные координаты определяются так:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \zeta_1 \bar{x}_2 + \zeta_2 \bar{x}_1 - \frac{mgc_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad \bar{y} = \zeta_2 \bar{y}_1 + \zeta_1 \bar{y}_2, \\ \theta_1 &= \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{l}, \quad \theta_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l} + \frac{mgc_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}.\end{aligned}\quad (6)$$

Теперь движения ротора рассматривается относительно найденного положения равновесия (5,6). Для этого введем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} & (x, y, \theta_1, \theta_2, x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow \\ & \rightarrow (\bar{x} + x, \bar{y} + y, \bar{\theta}_1 + \theta_1, \bar{\theta}_2 + \theta_2, \bar{x}_1 + x_1, \\ & \bar{y}_1 + y_1, \bar{x}_2 + x_2, \bar{y}_2 + y_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Окончательно, систему (4) с учетом (7) запишем так:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= R_X^{(1)}, I_e\ddot{\theta}_2 - I_p\Omega\dot{\theta}_1 + R_X^{(2)} = 0, \\ m\ddot{y} &= R_Y^{(1)}, I_e\ddot{\theta}_1 + I_p\Omega\dot{\theta}_2 - R_Y^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $R_X^{(1)} = \tilde{F}_X(x_2, y_2) + \tilde{F}_X(x_1, y_1)$ ;

$$R_X^{(2)} = I_1\tilde{F}_X(x_1, y_1) - I_2\tilde{F}_X(x_2, y_2);$$

$$R_Y^{(1)} = \tilde{F}_Y(x_1, y_1) + \tilde{F}_Y(x_2, y_2);$$

$$R_Y^{(2)} = I_1\tilde{F}_Y(x_1, y_1) - I_2\tilde{F}_Y(x_2, y_2).$$

Проекции сил, действующие на цапфы вала со стороны масляного слоя подшипника, представим так:

$$\begin{aligned} F_x &= - \int_0^{L_b} \int_0^\pi (\cos(\theta + \phi) p(\theta, z) R) d\theta dz, \\ F_y &= - \int_0^{L_b} \int_0^\pi (\sin(\theta + \phi) p(\theta, z) R) d\theta dz, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $L_B$  – длина короткого подшипника;

$\phi$  – угол линии центров.

Предполагается, что масляный слой занимает область  $\theta \in [0; \pi]$ . Давление, действующее на цапфу со стороны масляного слоя  $p(z_1, \theta)$ , определяется из уравнения Рейнольдса [5]. Решение этого уравнения для короткого подшипника представим так:

$$p = \frac{3\mu}{h^3} \left[ \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] z_1 (z_1 - L_b), \quad (10)$$

где  $\mu$  – вязкость масла;

$z_1$  – продольная локальная координата подшипника скольжения.

Величина  $h$  принимает следующее значение:  $h = c + e \cos(\theta) = c - x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$ , где  $c$  – величина зазора между цапфой и подшипником (см. рис.1).

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{R\mu L_b^3}{2} \int_0^\pi \frac{\cos(\theta + \phi)}{h^3} (\Omega(x \sin(\theta + \phi) - \\ & y \cos(\theta + \phi)) + 2(\dot{x} \cos(\theta + \phi) + \dot{y} \sin(\theta + \phi))) d\theta, \\ F_y &= \frac{R\mu L_b^3}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(\theta + \phi)}{h^3} (\Omega(x \sin(\theta + \phi) - \\ & - y \cos(\theta + \phi)) + 2(\dot{x} \cos(\theta + \phi) + \dot{y} \sin(\theta + \phi))) d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{c}, \quad \tilde{y}_j = \frac{y_j}{c}, \quad H = \frac{h}{c}, \quad \tau = \Omega t. \quad (12)$$

Когда ротор находится в состоянии равновесия, решение (10) принимает следующий вид:

$$p = - \frac{3\mu\Omega e \sin \theta}{(c + e \cos \theta)^3} z_1 (z_1 - L_B). \quad \text{Уравнения равнове-}$$

сия цапфы запишем так:

$$F_{X'} = G \cos \phi_e, \quad F_{Y'} = -G \sin \phi_e, \quad (13)$$

где  $F_{X'}, F_{Y'}$  – проекции сил в направлении осей  $x', y'$ ;

$\phi_e$  – угол линии центров для равновесного состояния цапфы;

$G$  – значение вертикальной силы в подшипнике.

Для цапф А и В сила  $G$  принимает следующий вид:  $G = mg \frac{l_2}{l_1}$ ;  $G = mg \frac{l_1}{l_1}$ . Тогда статические силы можно представить так:

$$F_{X'} = \frac{L_B^3 \mu \Omega R e^2}{c^2 (1 - \varepsilon^2)^2}, \quad F_{Y'} = - \frac{\pi L_B^3 \mu \Omega R e}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}, \quad \varepsilon = \frac{e}{c}. \quad (14)$$

Из выражений (13, 14) получаем нелинейное уравнения для определения величины эксцентриситета  $\varepsilon$ :

$$G = \frac{L_B^3 \mu \Omega R e}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2)}. \quad \text{Тогда ко-}$$

ординаты равновесия цапфы А запишем так:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1,0} &= \bar{x}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \cos \phi_{e1}, \\ \tilde{y}_{1,0} &= \bar{y}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \sin \phi_{e1}, \\ \operatorname{tg} \phi_{e1} &= \pi \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} / (4\varepsilon_1). \end{aligned} \quad (15)$$

Индекс 1 у величин  $\varepsilon$  и  $\phi_e$  обозначает, что эти параметры описывают равновесие цапфы А. Рассмотрим динамику ротора относительно найденных положений равновесия. Для этого введем следующую замену:  $\tilde{x}_i \rightarrow \tilde{x}_i + \tilde{x}_{i,0}$ ,  $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_i + \tilde{y}_{i,0}$ ,  $i = 1, 2$ . Используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \theta + \phi_e, \quad \gamma = \frac{R\mu L_b^3 \Omega}{2c^2}, \quad J_1 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\cos^2(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta, \\ J_2 &= \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\sin^2(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta, \quad J_3 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\cos(\vartheta) \sin(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta, \end{aligned}$$

$$H_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = 1 - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0}) \cos \vartheta - (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0}) \sin \vartheta.$$

С учетом введенной замены, проекции сил (11) можем записать в виде:

$$F_X = \gamma(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}'_1)J_3 - \gamma(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1)J_1, \quad (16)$$

$$F_Y = \gamma(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}'_1)J_2 - \gamma(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1)J_3.$$

Разложим проекции сил  $F_X, F_Y$  в степенной ряд по обобщенным перемещениям  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$  и скоростям  $\tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$  так:

$$F_X = F_{X,0} + F_{X,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots, \quad (17)$$

$$F_Y = F_{Y,0} + F_{Y,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots,$$

где  $F_{X,0}, F_{Y,0}$  - постоянные составляющие силы;

$F_{X,1}, F_{Y,1}$  - линейные части сил относительно  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$ ;

$F_{X,2}, F_{Y,2}, F_{X,3}, F_{Y,3}$  - нелинейные составляющие силы второго и третьего порядка.

Линейные части сил масляного слоя представим следующим образом:

$$F_{X,1} = \gamma[(x - 2\dot{y})I_1 - (y + 2\dot{x})I_2 - 3\epsilon x I_3 - 3\epsilon y I_4], \quad (18)$$

$$F_{Y,1} = \gamma[(x - 2\dot{y})I_5 - (y + 2\dot{x})I_6 - 3\epsilon x I_4 - 3\epsilon y I_6].$$

Квадратичную составляющую сил (17) запишем так:

$$F_{X,2} = \gamma\left[3(x^2 - y^2 - 2x\dot{y} - 2y\dot{x})I_7 - 3x(y + 2\dot{x})I_8 + 3y(x - 2\dot{y})I_9 - 6\epsilon x^2 I_{10} - 6\epsilon y^2 I_{11} - 12\epsilon xy I_{12}\right], \quad (19)$$

$$F_{Y,2} = \gamma\left[3(x^2 - y^2 - 2x\dot{y} - 2y\dot{x})I_9 - 3x(y + 2\dot{x})I_7 + 3y(x - 2\dot{y})I_{13} - 6\epsilon x^2 I_{12} - 6\epsilon y^2 I_{14} - 12\epsilon xy I_{11}\right].$$

Кубическая составляющая сил (17) записывается в виде:

$$F_{X,3} = \gamma\left\{6\left[x^2(x - 2\dot{y}) - 2xy(y + 2\dot{x})\right]I_{15} + 6\left[2xy(x - 2\dot{y}) - y^2(y + 2\dot{x})\right]I_{16} + 6y^2(x - 2\dot{y})I_{17} - 6x^2(y + 2\dot{x})I_{18} - 20\epsilon x^3 I_{19} - 20\epsilon y^3 I_{20} - 60\epsilon x^2 y I_{21} - 60\epsilon xy^2 I_{21}\right\}, \quad (20)$$

$$F_{Y,3} = \gamma\left\{6\left[x^2(x - 2\dot{y}) - 2xy(y + 2\dot{x})\right]I_{16} + 6\left[2xy(x - 2\dot{y}) - y^2(y + 2\dot{x})\right]I_{17} + 6y^2(x - 2\dot{y})I_{23} - 6x^2(y + 2\dot{x})I_{15} - 20\epsilon x^3 I_{21} - 20\epsilon y^3 I_{24} - 60\epsilon x^2 y I_{22} - 60\epsilon xy^2 I_{20}\right\},$$

где  $I_1, \dots, I_{24}$  - интегралы, которые берутся в элементарных функциях и не приводятся для краткости изложения.

Подставляя выражения для проекций сил (17) в уравнения движения (8), получаем систему нелиней-

ных дифференциальных уравнения, которую в матричном виде запишем так:

$$[M]\ddot{q} + [G]\dot{q} = [K_1]q + [D_1]q' + W(q_1, q'_1), \quad (21)$$

где  $W(q_1, q'_1)$  - вектор нелинейных составляющих сил, которые принимают следующий вид:

$$w_1 = F_X(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + F_X(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + 2F_{X,0},$$

$$w_2 = I_1 F_Y(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) - I_2 F_Y(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + (I_1 - I_2)F_{Y,0},$$

$$w_3 = F_Y(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + F_Y(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + 2F_{Y,0},$$

$$w_4 = I_2 F_X(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) - I_1 F_X(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + (I_2 - I_1)F_{X,0}.$$

Окончательно систему (21) запишем в виде:

$$\ddot{q} + [F]\dot{q} + [Q]q = \tilde{W}(q, \dot{q}), \quad (22)$$

где  $\tilde{W}(q, \dot{q}) = [M]^{-1} W(q_1, q'_1) =$

$$= [M]^{-1} W(q_1, \Omega^{-1}\dot{q}_1) = [M]^{-1} W(\tilde{D}^{-1}Rq, \Omega^{-1}\tilde{D}^{-1}R\dot{q}).$$

В численном анализе уравнений (22) учитывались как квадратичные, так и кубические составляющие проекций нелинейных сил, действующих со стороны масляного слоя (17).

### Метод анализа автоколебаний

Для анализа автоколебаний с одной мажорантной гармоникой применяется метод гармонического баланса, который учитывает фильтрующие свойства динамических процессов. Движение системы (22) представим так:

$$\begin{aligned} x &= A_0 + \tilde{A}_1 \cos(\omega\tau + \psi_1), \\ \theta_1 &= B_0 + \tilde{B}_1 \cos(\omega\tau + \psi_2), \\ y &= C_0 + \tilde{C}_1 \cos(\omega\tau + \psi_3), \\ \theta_2 &= D_0 + \tilde{D}_1 \cos(\omega\tau + \psi_4). \end{aligned} \quad (23)$$

Система (22) является автономной, следовательно, она инвариантна относительно преобразования времени  $\tau = t + t_*$ , где параметр  $t_*$  выберем так:

$t_* = -\frac{\Psi_1}{\omega}$ . Тогда решение (23) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= A_0 + A_1 \cos(\omega t), \\ \theta_1 &= B_0 + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t), \\ y &= C_0 + C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \\ \theta_2 &= D_0 + D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $A_0, A_1, \dots, D_2, \omega$  - неизвестные параметры колебаний.

Уравнение (24) введем в (22) и приравняем гармоники при постоянных величинах,  $\sin(\omega t)$  и  $\cos(\omega t)$ . В результате получается система 12 нели-

нейных алгебраических уравнений относительно параметров  $A_0, A_1, \dots, D_2, \omega$ .

Целью анализа колебаний ротора является определение амплитудно-частотной характеристики. Для ее расчета задается значение частоты вращения ротора  $\Omega$  с некоторым шагом. Для каждого значения  $\Omega$  решается система 12 нелинейных алгебраических уравнений и определяются параметры автоколебаний ротора.

Кроме моно гармонических автоколебаний в системе (22) существуют движения состоящие из нескольких гармоник ряда Фурье. Исследование таких движений в системе (22) методом гармонического баланса приводит к практически непреодолимым вычислительным трудностям. В рассматриваемом случае метод продолжения решения по параметру в сочетании с решением двухточечной краевой задачи является чрезвычайно эффективным [10]. Для изложения этого метода систему (22) представим в следующем векторном виде:

$$\dot{z} = f(z), \quad (25)$$

где  $z = [q; \dot{q}]^T$ ;

$f(z)$  - нелинейная вектор-функция размерности 8.

Периодические движения динамической системы (25) удовлетворяют следующим граничным условиям:  $z(0) = z(T)$ . Начальные условия динамической системы (25) обозначим так:  $z_0 = z(0)$ . Тогда решение этой системы при  $t = T$  обозначим так:  $z_T = z(T)$ . Это решение является векторной функцией, которую можно представить так:  $z_T(z_0, T)$ . Тогда граничные условия записываются в виде следующей системы 8 нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} F(z_0, T) &= z_T(z_0, T) - z_0, \\ F(z_0, T) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

В этой системе уравнений 9 неизвестных: вектор  $z_0$  начальных условий и период колебаний  $T$ . Итак, число неизвестных на 1 больше чем число уравнений. Для нахождения неизвестных параметров применим итерационный метод Ньютона, который подробно рассмотрен в [10]. На  $i$ -й итерации этого метода из системы линейных алгебраических уравнений определяется векторная величина  $\Delta z^{(i)}$ , которая связывает значения вектора  $z$  на  $i$ -й и  $(i+1)$ -й итерации так:  $z^{(i+1)} = z^{(i)} - \Delta z^{(i)}$ .

Итак, метод Ньютона на каждой итерации сводится к системе 8 линейных алгебраических уравнений с 9 неизвестными.

Поэтому на каждой итерации к системе линейных алгебраических уравнений добавляется условие

ортогональности  $\Delta z^{(i)}$  к траектории, которое выражается так:  $(f(\Delta z^{(i-1)}), \Delta z^{(i)}) = 0$ .

В результате применения метода Ньютона определяются периодические колебания.

Целью нашего анализа является построение амплитудно-частотной характеристики. Для этого частота вращения ротора  $\Omega$  задается с некоторым шагом. Для каждого значения  $\Omega$  определяются периодические колебания.

Для исследования устойчивости периодических режимов исследовались уравнения в вариациях. Для их определения в периодические колебания системы (22) вводились малые возмущения  $u(t)$ , которые описываются следующей системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u} = Df(z^*) \cdot u, \quad (27)$$

где  $u(t)$  - вектор-функция, описывающая малые отклонения от периодического движения;

$Df(z^*)$  - матрица Якоби вектор-функции правых частей системы (25);

$z^*$  - периодическое движение (24).

Для оценки устойчивости вычисляется фундаментальная матрица системы (27) и находятся мультипликаторы [10].

### Численный анализ колебаний

Колебания ротора исследовались при следующих численных значениях параметров:

$$\begin{aligned} R &= 0,057 \text{ м}, \mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, L_B = 28,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\ c &= 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, m = 374 \text{ кг}, l_1 = 0,5 \text{ м}, l_2 = 0,648 \text{ м}, \\ I_p &= 28,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_e = 14,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \\ J &= 8,29 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

Определим критическую частоту вращения ротора, при которой равномерное вращение с постоянной угловой скоростью теряет устойчивость и возникает автоколебания системы. Для определения этой критической угловой скорости находятся характеристические показатели линеаризованной системы (22). Метод определения характеристических показателей представлен в [10]. Частота вращения ротора, при которой он теряет устойчивость равномерного вращения, составляет  $\tilde{\Omega} = 1710 \text{ рад/с}$ . Для исследования автоколебаний ротора численно решалась система 12 нелинейных алгебраических уравнений относительно амплитуд автоколебаний, а также двухточечная краевая задача при квазистатическом изменении частоты вращения ротора  $\Omega$ .

Результаты расчета представлены на амплитудно-частотной характеристике (рис. 2).

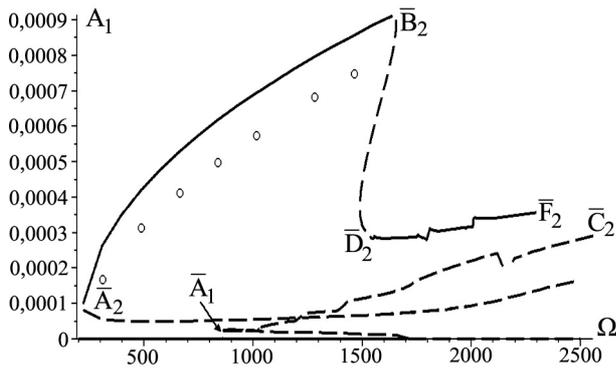


Рис.2. Амплитудно-частотная характеристика колебаний

При  $\tilde{\Omega} = 1710$  рад/с наблюдается бифуркация Хопфа. В результате этой бифуркации возникают неустойчивые предельные циклы, которые претерпевают седло-узловую бифуркацию в точке  $\bar{A}_1$ . После этой бифуркации предельные циклы являются неустойчивыми. В системе была найдена еще одна ветка автоколебаний, которая обозначена  $(\bar{C}_2\bar{A}_2\bar{B}_2)$ . Участок  $(\bar{A}_2\bar{B}_2)$  этой ветви описывает устойчивые предельные циклы, которые в точке седло-узловой бифуркации  $\bar{A}_2$  и  $\bar{B}_2$  преобразуются в неустойчивые движения. Участок  $(\bar{D}_2\bar{F}_2)$  описывает устойчивые предельные циклы, которые получены из решения двухточечной краевой задачи.

Для подтверждения результатов, полученных методом гармонического баланса, проводилось прямое численное интегрирование системы (22) методом Рунге-Кутты. Начальные условия для интегрирования выбирались из результатов метода гармонического баланса. Результаты расчета приводятся на рис.2 точками.

На рис. 3 показаны устойчивые режимы колебаний, соответствующие промежуткам  $(\bar{A}_2\bar{B}_2)$  и  $(\bar{D}_2\bar{F}_2)$ .

Между результатами, полученными двумя различными методами, наблюдается довольно хорошее совпадение.

## Выводы

Исследована бистабильность автоколебаний ротора. В диапазоне  $\Omega \in [300; 1700]$  рад/с наблюдается два вида установившихся движений. К первому виду, относятся состояния равновесия, которые описывают равномерное вращение ротора. Ко второму типу движений, относятся автоколебания, которые возник-

ают вследствие седло-узловых бифуркаций  $\bar{A}_2$ ,  $\bar{B}_2$ ,  $\bar{D}_2$ . В зависимости от величины начальных условий в системе будет реализовываться один из полученных режимов.

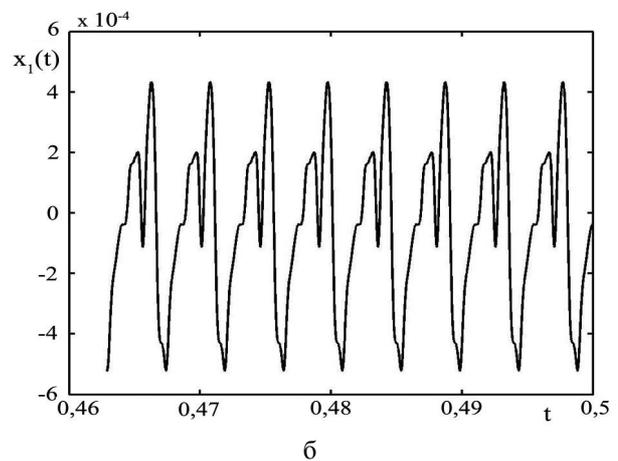
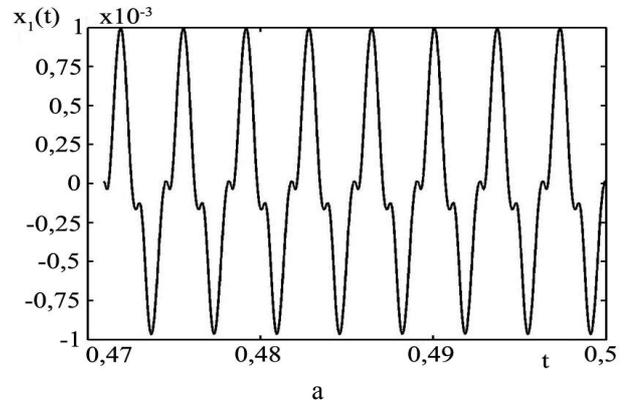


Рис. 3. Установившиеся колебания при различных значениях угловой частоты  $\Omega$  :

а – при  $\Omega = 1450$  рад/с ;

б – при  $\Omega = 1750$  рад/с

Из классической литературы по автоколебаниям роторов [4, 6] считается, что автоколебания ротора возникают в точке бифуркации Хопфа. Результаты, представленные в этой статье, опровергают сложившуюся точку зрения. Дело в том, что в системе могут возникать автоколебания вследствие седло-узловой бифуркации при частотах вращения ротора значительно меньше частоты, соответствующей бифуркации Хопфа.

## Литература

1. Письменный И.Л. Многочастотные нелинейные колебания в газотурбинном двигателе / И.Л. Письменный. – М.: Машиностроение, 1987. – 128 с.

2. Zhang X. Y. On site testing and analysis of the oil whirl phenomena in national made 200MW steam turbine generator systems / X.Y. Zhang // *Power Industry*. – 1992. – №12. – P. 32-37.

3. Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the Invariant Manifold Method / M. Legrand, D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw // *International Journal of Rotating Machinery*. – 2004. – №10. – P. 319-335.

4. Позняк Э.Л. Неустойчивые колебания роторов на подшипниках скольжения / Э.Л. Позняк // *Динамика гибких роторов*. – М.: Наука, 1972. – С. 22-29.

5. Олимпиев В.И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения / В.И. Олимпиев // *Изв. АН СССР, ОТН*. – 1960. – №3. – С. 24-29.

6. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов / А. Тондл. – Л.: Энергия, 1971. – 386 с.

7. Каринцев И.Б. Статические и динамические характеристики масляной пленки коротких подшип-

ников скольжения / И.Б. Каринцев, Н.Г. Шульженко // *В кн.: Динамика и прочность машин*. – Х.: ХГУ, 1972. – Вып. 16. – С. 14-18.

8. Филиппов А.П. Устойчивость колебаний ненагруженного неуравновешенного ротора в коротких опорах жидкостного трения / А.П. Филиппов, Н.Г. Шульженко // *Машиноведение*. – 1973. – №4. – С. 21-28.

9. Овчарова Д.К. Вынужденные колебания ротора на подшипниках скольжения / Д.К. Овчарова, Е.Г. Голоскоков // *Прикладная механика*. – 1975. – №11. – С. 95-99.

10. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. т.1. Модели, методы, явления / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.

Поступила в редакцию 20.10.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., зав. каф. теоретической механики О.К. Морачковский, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

## БІФУРКАЦІЇ ТА ВТРАТИ СТІЙКОСТІ АВТОКОЛИВАНЬ НЕСИМЕТРИЧНОГО ОДНОДИСКОВОГО РОТОРУ В ПІДШИПНИКАХ КОВЗАННЯ

*К.В. Аврамов, О.В. Борисюк, Л.В. Розова*

Отримано математичну модель коливань несиметричного однодискового ротора в підшипниках ковзання. Для аналізу сил масляного шару використовується аналітичний розв'язок рівняння Рейнольдса для випадку короткого підшипника. У досліджуваному діапазоні спостерігаються кілька видів сталих рухів: рівномірне обертання ротора та автоколивання, що виникають внаслідок сідло-вузлових біфуркацій в системі. Для аналізу автоколивань використовується метод гармонічного балансу і рішення двуточної крайової задачі. Розв'язки, що отримані методом гармонічного аналізу, порівнюються з результатами чисельного моделювання.

**Ключові слова:** несиметричний однодисковий ротор, підшипник ковзання, автоколивання, сідло-вузлові біфуркації, метод гармонічного балансу, двуточкова крайова задача.

## BIFURCATIONS AND LOSS OF STABILITY OF SELF-VIBRATIONS OF ASYMMETRICAL ONE-DISK ROTOR IN JOURNAL BEARINGS

*K.V. Avramov, A.V. Borysiuk, L.V. Rozova*

A mathematical model of vibrations of an asymmetric one-disk rotor in journal bearings is obtained. Analytical solution of Reynolds' equation for the case of a short bearing is used to analyze the forces of the fluid film. Several types of steady motions are observed in studied range. There are uniform rotation of the rotor and self-vibrations arising due to saddle-node bifurcations in the system. Method of harmonic balance and the solution of two-point boundary value problem are used to analyze the self-vibrations. Solutions obtained by harmonic balance method are compared with numerical simulation of the system.

**Key words:** asymmetrical one-disk rotor, journal bearing, self-vibrations, saddle-node bifurcations, harmonic balance method, two-point boundary value problem.

**Аврамов Константин Витальевич** – д-р техн. наук, проф., ведущий научный сотрудник отдела нестационарных процессов, ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, e-mail: kavramov@ipmach.kharkov.ua.

**Борисюк Алексей Вячеславович** – аспирант каф. газогидромеханики и тепломассообмена, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина, e-mail: alexborysiuk@mail.ru.

**Розова Людмила Викторовна** – канд. техн. наук, доцент кафедры газогидромеханики и тепломассообмена, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина.