УДК 539.3

З.Г. ЕРШОВА, В.И. ЕРШОВ

Тутаевский филиал ГОУ ВПО «Рыбинская государственная авиационная технологическая академия имени П. А. Соловьева»

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

Исследуются низкочастотные колебания тонкой цилиндрической панели, прямолинейный край которой предполагается свободным или слабо закрепленным, в результате чего формы потери устойчивости локализуются в окрестности прямолинейного края. Рассматриваются случаи, в которых граничные условия на одном из криволинейных краев взяты из группы заделки. При этом в окрестности этого края возникает краевой эффект. Для получения асимптотической формулы для параметра частоты колебаний цилиндрической панели выполнено исключение интегралов краевого эффекта из граничных условий на криволинейных краях. Проведено сравнение асимптотических результатов с численными результатами, полученными методом прогонки и методом конечных элементов.

Ключевые слова: *цилиндрическая панель, низкочастотные колебания, асимптотическое интегрирование, интегралы краевого эффекта.*

Введение

Расчетной схемой многих элементов современных механизмов и машин является оболочка. Оболочечные конструкции, применяемые в машиностроении, ракетостроении и т.д. чаще всего находятся под воздействием динамических нагрузок, поэтому актуальными являются расчеты, заключающиеся в определении частот и форм собственных колебаний и оболочек.

В настоящей работе рассмотрены свободные низкочастотные колебания тонкой цилиндрической панели, описываемые уточненными уравнениями, в которых учитываются моментные слагаемые. Обсуждаются случаи, когда граничные условия на криволинейных краях взяты из группы заделки, где прогибы равны нулю, поэтому для получения параметра частоты необходимо осуществить исключение интегралов краевого эффекта из этих граничных условий.

Проведено сравнение асимптотических результатов с численными результатами, полученные методом прогонки и методом конечных элементов.

В статье [2] была решена краевая задача для уточненных уравнений колебаний цилиндрической панели для случаев шарнирного закрепления криволинейных краев [1], которые допускают разделение переменных x и $y=\dfrac{\varphi}{\varepsilon}$. Параметр частоты колебаний λ разыскивался в виде

$$\lambda=\lambda_0+\varepsilon^2\lambda_2+\lambda_R\,. \tag{1}$$

В настоящей работе рассмотрены различные варианты граничных условий на криволинейных краях цилиндрической панели, для которые переменные не разделяются.

В этих случаях в выражении

$$\lambda_2=I_1+I_2+I_3\Big|_{x=-l}^{x=0}, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1&=-\frac{1}{2p^{3/2}l}\iint_G\partial^{-4}f\left(w_0^0,\lambda_0\right)w_0^0\,dxdy;\\
I_2&=\frac{1}{2p^{3/2}l}\int_{-l}^{0}\Big(w_0^0\partial_y^3w_2^0-\partial_y w_0^0\partial_y^2w_2^0+\\
&+\partial_y^2w_0^0\partial_y w_2^0-\partial_y^3w_0^0w_2^0+\partial_y^{-1}w_0^0\partial_x^4\partial_y^{-4}w_2^0+\\
&+\partial_x\partial_y^{-2}w_0^0\partial_x^3\partial_y^{-3}w_2^0-\partial_x^3\partial_y^{-3}w_0^0\partial_x\partial_y^{-2}w_2^0-\\
&-\partial_x^4\partial_y^{-4}w_0^0\partial_y^{-1}w_2^0\Big)\Big|_{y=0}dx;\\
I_3&=\frac{1}{2p^{3/2}l}\int_{-\infty}^{0}\Big(-\partial_y^{-1}w_0^0\partial_x^3\partial_y^{-3}w_2^0-\\
&-\partial_x\partial_y^{-2}w_0^0\partial_x^2\partial_y^{-2}w_2^0+\partial_x^2\partial_y^{-2}w_0^0\partial_x\partial_y^{-2}w_2^0+\\
&+\partial_x^3\partial_y^{-3}w_0^0\partial_y^{-1}w_2^0\Big)dy,
\end{aligned} \tag{3}$$

слагаемое $I_3\neq 0$.

Займемся вычислением этой величины на краю x = 0. Формула содержит величины

$$\partial_z^n w\equiv\frac{\partial^n w}{\partial z^n},\qquad (\,n=0,1,2,3\,),$$

которые находятся в результате исключения интегралов краевого эффекта (см. [3]).

Рассмотрим, например, жестко закрепленный край x = 0.

В соответствии с табл. 1 и 2, полученными в работе [2], граничные условия могут быть записаны в виде:

$$\begin{gathered}
\varepsilon^4(-\partial_x\partial_y^{-2}w_2^0+(2+\nu)\partial_x^3\partial_y^{-4}w_0^0)+\\
+\varepsilon^2\nu(r_1^{-1}w_1^k+r_2^{-2}w_2^k)=0;\\
\varepsilon^3(\partial_y^{-1}w_2^0+\nu\partial_x^2\partial_y^{-3}w_0^0)+\\
+\varepsilon^3\nu(r_1^{-2}\partial_y w_1^k+r_2^{-1}\partial_y w_2^k)=0;\\
\varepsilon^2 w_2^0+w_1^k+w_2^k=0;\\
\varepsilon(\partial_y^1 w_2^0+\partial_y^{-1}w_0^0)+\\
+\varepsilon^{-1}(r_1\partial_y w_1^k+r_2\partial_y w_2^k)=0,
\end{gathered}\tag{4}$$

где r_j задаются формулами:

$$r_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$r_2=\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Таблица 1

Основные интегралы

f	Основные интегралы
u	$-\varepsilon^2\partial_x\partial_y^{-2}w^0+\varepsilon^4\left(2+\nu\right)\partial_x^3\partial_y^{-4}w^0$
v	$\varepsilon\partial_y^{-1}w^0+\varepsilon^3\nu\partial_x^2\partial_y^{-3}w^0$
γ_1	$\partial_x w^0$
T_1	$-\varepsilon^2\partial_x^2\partial_y^{-2}w^0+\varepsilon^4 2\partial_x^4\partial_y^{-4}w^0$
S	$\varepsilon^3\partial_x^3\partial_y^{-3}w^0-\varepsilon^5 2\partial_x^5\partial_y^{-5}w^0$
M_1	$\varepsilon^6\nu\partial_y^2 w^0+\varepsilon^8\left(\partial_x^2 w^0+\nu w^0\right)$
Q_{1*}	$-\varepsilon^6\left(2-\nu\right)\partial_x\partial_y^2 w^0-\varepsilon^8\left(\partial_x^3 w^0+\left(2-\nu\right)\partial_x w^0\right)$

Таблица 2

Интегралы краевого эффекта

f	Интегралы краевого эффекта
u	$-\varepsilon^2\nu\partial_\zeta^3 w^k$
v	$-\varepsilon^2\left(2+\nu\right)\partial_\zeta^2\partial_y w^k$
T_1	$\varepsilon^2\partial_\zeta^2\partial_y^2 w^k$
S	$-\varepsilon\partial_\zeta^3\partial_y w^k$
M_1	$\varepsilon^4\partial_\zeta^2 w^k$
Q_{1*}	$-\varepsilon^2\partial_\zeta^3 w^k$

Из этой системы ясно, что интегралы краевого эффекта w_1^k и w_2^k имеют порядок ε^2. Второе и четвертое уравнения (4) интегрируем по *y* от -∞ до у. После этого исключение величин w_1^k и w_2^k дает

$$\begin{gathered}
\partial_y^2 w_2^0=-\nu\partial_x^2\partial_y^{-4}w_0^0,\\
\partial_x\partial_y^{-2}w_2^0=\left(2+\nu\right)\partial_x^3\partial_y^{-4}w_0^0+\nu^2\sqrt{2}\partial_x^2\partial_y^{-2}w_0^0.
\end{gathered}\tag{5}$$

Интегрируя теперь два раза по у эти соотношения, получаем искомые выражения, приведенные в первой строке табл. 3. Величины $\partial_x^2 w_2^0$ и $\partial_x^3 w_2^0$ нам не понадобятся, ибо стоящие при них множители в I_3 обращаются в ноль.

Поступая точно так же, получаем выражения $\partial_x^n w_2^0$ и для других граничных условий. Эти величины собраны в табл. 3.

В силу формулы (1) представим величину λ_2 в виде:

$$\begin{gathered}
\lambda_2=\lambda_2^0+\lambda_2^k,\\
\lambda_2^0=I_1+I_2,\\
\lambda_2^k=I_3(0)-I_3(-1),
\end{gathered}\tag{6}$$

где величина λ_2^0 определяется формулой

$$\begin{gathered}
I_1+I_2=\frac{a_{20}\left(\nu b_{20}+b_{-4,-2}-\left(1-\nu\right)b_{11}\right)}{pl_2}+\\
+\frac{\left(a_{20}+a_{11}\right)\partial^{-1}Y_0\partial^{-6}Y_0}{pl^2}-\frac{3b_{-1,3}+b_{-5,-1}}{2p}.
\end{gathered}\tag{7}$$

Величина λ_2^k зависит как от интегралов краевого эффекта в окрестности криволинейных краев, так и от первого приближения полубезмоментных интегралов. Как следует из табл. 3, для граничных условий 0110, 0100, 1001, 1000 на криволинейных краях будет I3 = 0. Для остальных вариантов граничных условий на криволинейных краях величина $\lambda_2^k\neq 0$.

Для края x = 0 величины Iз(0) приведены в табл. 4, в которой значения производных X(n) следует брать при $\xi=0$.

Для вычисления Iз(–1) можно использовать табл. 4, причем у всех слагаемых, содержащих $\sqrt{2}$, следует изменить знак. Если же на обоих криволинейных краях заданы одинаковые граничные условия, то Iз(–1) = – Iз(0) и вклад от краевого эффекта удваивается.

В табл. 4 и в формуле (7) входят величины b_{kn}, α, a_{11}, a_{02}, а также функция X и ее производные, вычисляемые при $\xi=0$ и $\xi=-1$. Значения величин b_{kn} для различных вариантов граничных условий на прямолинейном краю, полученные в [2], приведены в табл. 4.

В табл. 5 для различных групп закрепления криволинейных краев представлены значения остальных величин. Первой указывается группа при $\xi=0$, а второй — при $\xi=-1$.

Таблица 3

Граничные условия для различных групп закрепления

1. Группа заделки ($w_0^0 = \partial_x w_0^0 = 0$).	
1111	$w_2^0 = -\nu\partial_x^2\partial_y^{-2}w_0^0$ $\partial_x w_2^0 = (2+\nu)\partial_x^3\partial_y^{-2}w_0^0 + \nu^2\sqrt{2}\partial_x^2 w_0^0$
1110	$w_2^0 = -\nu\partial_x^2\partial_y^{-2}w_0^0$ $\partial_x w_2^0 = (2+\nu)\partial_x^3\partial_y^{-2}w_0^0 + \frac{\nu^2}{\sqrt{2}}\partial_x^2 w_0^0$
1101 1100	$w_2^0 = -\nu\partial_x^2\partial_y^{-2}w_0^0$ $\partial_x w_2^0 = (2+\nu)\partial_x^3\partial_y^{-2}w_0^0$
1011	$w_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x^3\partial_y^{-4}w_0^0$ $\partial_x w_2^0 = 2\partial_x^3\partial_y^{-2}w_0^0$
1010	$w_2^0 = \sqrt{2}\partial_x^3\partial_y^{-4}w_0^0$ $\partial_x w_2^0 = 2\partial_x^3\partial_y^{-2}w_0^0$
2. Группа шарнирной опоры ($w_0^0 = \partial_x^2 w_0^0 = 0$).	
0111 0101	$w_2^0 = 0$ $\partial_x^2 w_2^0 = -\sqrt{2}\partial_x\partial_y^4 w_0^0$
0110 0100	$w_2^0 = 0$ $\partial_x^2 w_2^0 = 0$
0011	$w_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x w_0^0 - \partial_x^3\partial_y^{-4}w_0^0)$ $\partial_x^2 w_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x^3 w_0^0 - \partial_x\partial_y^4 w_0^0)$
0010	$w_2^0 = -\sqrt{2}\partial_x^3\partial_y^{-4}w_0^0$ $\partial_x^2 w_2^0 = 0$
3. Группа слабого закрепления	
1001 1000	$\partial_x w_2^0 = 0 \quad \partial_x^3 w_2^0 = 0$
4. Группа свободного края ($\partial_x^2 w_0^0 = \partial_x^3 w_0^0 = 0$).	
0001	$\partial_x^2 w_2^0 = 2\partial_x^4\partial_y^{-2}w_0^0 - \frac{\partial_x\partial_y^4 w_0^0}{\sqrt{2}}$ $\partial_x^3 w_2^0 = 2\partial_x^5\partial_y^{-2}w_0^0 - (2-\nu)\partial_x\partial_y^6 w_0^0$
0000	$\partial_x^2 w_2^0 = 2\partial_x^4\partial_y^{-2}w_0^0 - \nu\partial_y^6 w_0^0$ $\partial_x^3 w_2^0 = 2\partial_x^5\partial_y^{-2}w_0^0 - (2-\nu)\partial_x\partial_y^6 w_0^0$

Таблица 4

Значения величин b_{kn} для различных вариантов граничных условий на прямолинейном краю

Гр. условия	0000	0001	0100	0101	0010	1000
λ_0	0,112	0,222	0,222	0,418	0,809	0,809
$b_{-3,-5}$	-0,067	-0,185	-0,185	-0,459	-0,861	-0,861
$b_{-3,-3}$	0,054	0,125	0,185	0,402	0,638	0,809
$b_{-2,-4}$	-0,054	-0,125	-0,185	-0,402	-0,638	-0,809
$b_{-2,-2}$	-0,112	0,222	0,222	0,418	0,809	0,809
$b_{-1,-5}$	0,197	0,513	0,185	0,408	1,5322	0,809
$b_{-1,-3}$	-0,112	-0,222	-0,222	-0,418	-0,809	-0,809
$b_{0,-6}$	-0,054	0,357	-0,185	0,085	-0,085	-0,809
$b_{1,1}$	0,568	0,343	0,838	0,524	0,861	1,479
$b_{2,-2}$	-0,041	-0,086	-0,086	0,182	0,447	0,447
$b_{2,0}$	0,069	-0,343	0,032	-0,524	-0,861	-0,585
$b_{3,-1}$	-0,069	-0,140	-0,032	0,036	0,861	0,585
$b_{4,-2}$	0,069	0,140	0,032	-0,036	-0,309	-0,585

В качестве примера ограничимся рассмотрением случая, когда край $\varphi = 0$ свободен, а на криволинейных краях заданы граничные условия из группы жесткой заделки**.** Рассмотрим оболочку с параметрами $l = 1$, $\nu = 0{,}3$ и при трех значениях толщины $h_* = = h/R = 0{,}01$; $0{,}002$; $0{,}001$. Результаты сравнения величин Ω_0, $\Omega^{(a)}$ и $\Omega^{(мкэ)}$ помещены в табл. 6.

Таблица 5

Значения некоторых величин для различных групп закрепления

1111	$\frac{v^2(X'')^2}{l\alpha^4\sqrt{2}}b_{-2,-2}+\frac{(1+v)X''X'''}{l\alpha^5}b_{-2,-4}$
1110	$\frac{v^2(X'')^2}{l\alpha^4\sqrt{2}}b_{-2,-2}+\frac{(1+v)X''X'''}{l\alpha^5}b_{-2,-4}$
1101 1100	$\frac{(1+v)X''X'''}{l\alpha^5}b_{-2,-4}$
1011	$\frac{(X''')^2}{2l\alpha^6\sqrt{2}}b_{-3,-5}+\frac{X''X'''}{l\alpha^5}b_{-2,-4}$
1010	$\frac{(X''')^2}{l\alpha^6\sqrt{2}}b_{-3,-5}+\frac{X''X'''}{l\alpha^5}b_{-2,-4}$
0111 0101	$\frac{(X')^2}{l\alpha^2\sqrt{2}}b_{-2,2}$
0010	$\frac{(X''')^2}{l\alpha^6\sqrt{2}}b-3,-5$
0011	$\frac{1}{2l\sqrt{2}}(\frac{(X')^2}{\alpha^2}b_{-2,2}+\frac{2X'X'''}{\alpha^4}b_{-1,-3}-$ $-\frac{(X''')^2}{\alpha^6}b_{-3,-5})$
0001	$\frac{XX'}{l\alpha}(\frac{2-v}{2}b_{-1,3}-b_{-1,-5}-b_{-2,-4})+$ $+\frac{(X')^2}{2l\alpha^2\sqrt{2}}b_{-2,2}$
0000	$\frac{XX'}{l\alpha}(\frac{2-v}{2}b_{-1,3}-b_{-1,-5}-b_{-2,-4}+$ $+\frac{v}{2}b_{-2,4})$

Заделка – заделка

$$(X_0=X_0'=X_{-1}=X_{-1}'=0)$$

$$\alpha=4{,}73004,\ a_{11}=12{,}3026,\ a_{02}=-a_{11},$$

$$X_0''=44{,}746,\ X_0'''=207{,}949,\ X_{-1}''=X_0'',\ X_{-1}'''=-X_0'''.$$

Шарнир – заделка

$$\left(X_0=X_0''=X_{-1}=X_{-1}'=0\right)$$

$$\alpha=3{,}92660,\ a_{11}=11{,}5125,\ a_{02}=-a_{11},$$

$$X_0'=-5{,}71007,\ X_0'''=83{,}2639,$$

$$X_{-1}''=30{,}8364,\ X_{-1}'''=-127{,}176.$$

Слабое закрепление – заделка

$$\left(X_0'=X_0'''=X_{-1}=X_{-1}'=0\right)$$

$$\alpha=2{,}36502,\ a_{11}=3{,}07566,\ a_{02}=-a_{11},$$

$$X_0=1{,}588,\ X_0''=-6{,}799,$$

$$X_{-1}''=11{,}186,\ X_{-1}'''=-25{,}993.$$

Свободный край – заделка

$$\left(X_0''=X_0'''=X_{-1}=X_{-1}'=0\right)$$

$$\alpha=1{,}87510,\ a_{11}=4{,}64779,\ a_{02}=0{,}85825$$

$$X_0=2,\ X_0'=2{,}753,\ X_{-1}''=7{,}032,\ X_{-1}'''=-9{,}68.$$

Шарнир – шарнир

$$\left(X_0=X_0''=X_{-1}=X_{-1}'''=0\right);$$

$$\alpha=\pi, a_{11}=\pi^2, a_{02}=-a_{11}$$

$$X_0'=-\pi\sqrt{2},\ X_0'''=\pi^3\sqrt{2},$$

$$X_{-1}'=\pi\sqrt{2},\ X_{-1}'''=-\pi^3\sqrt{2}.$$

Слабое закрепление – шарнир

$$\left(X_0'=X_0'''=X_{-1}=X_{-1}''=0\right);$$

$$\alpha=\pi, a_{11}=\pi^2, a_{02}=-a_{11}$$

$$X_0=\sqrt{2},\ X_0''=-\pi^2\sqrt{2}/4,$$

$$X_{-1}'=\pi/\sqrt{2},\ X_{-1}'''=-\pi^3\sqrt{2}/8.$$

Таблица 6

Результаты сравнения величин Ω_0, $\Omega^{(a)}$ и $\Omega^{(мкэ)}$

Гр. усл.	1111	1110	1101	1100	1011	1010
$h_* = 0{,}01$						
Ω_0	0,123	0,123	0,123	0,123	0,123	0,123
$\Omega^{(a)}$	0,133	0,132	0,132	0,132	0,130	0,125
$\Omega^{(T)}$	0,146	0,143	0,104	0,090	0,139	0,136
$h_* = 0{,}002$						
Ω_0	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055
$\Omega^{(a)}$	0,057	0,057	0,057	0,057	0,056	0,055
$\Omega^{(T)}$	0,056	0,054	0,047	0,045	0,058	0,053
$h_* = 0{,}001$						
Ω_0	0,039	0,039	0,039	0,039	0,039	0,039
$\Omega^{(a)}$	0,040	0,040	0,039	0,039	0,039	0,039
$\Omega^{(T)}$	0,038	0,037	0,035	0,035	0,038	0,035

Здесь Ω_0 – значение Ω в нулевом приближении. Значения $\Omega^{(а)}$ и $\Omega^{(мкэ)}$ здесь согласуются хуже, чем в случае шарнирно опертых криволинейных краев.

Основная причина этого заключается, по-видимому, в том, что в методе конечных элементов краевой эффект плохо аппроксимируется при разбивании длины оболочки на 24 части.

Заключение

Для получения асимптотической формулы для параметра частоты колебаний цилиндрической панели выполнено исключение интегралов краевого эффекта из граничных условий на криволинейных краях. Проведено сравнение асимптотических результатов с численными результатами, полученными методом прогонки и методом конечных элементов.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик. – М.: Наука, 1979. – 383 с.

2. Ершова З.Г. Интегрирование уточненных уравнений колебаний цилиндрической панели / З.Г. Ершова, В.И. Ершов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2010. – № 2 (25) – С. 114-119.

3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит., 1995. – 320 с.

Поступила в редакцию 31.05.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Шатульский, Рыбинская государственная авиационная технологическая академия имени П.А. Соловьева, Рыбинск, Россия.

ОКРЕМІ ВИПАДКИ ІНТЕГРАЦІЇ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРОВОЇ ПАНЕЛІ

З.Г. Єршова, В.І. Єршов

Досліджуються низькочастотні коливання тонкої циліндрової панелі, прямолінійний край якої передбачається вільним або слабо закріпленим, внаслідок чого форми втрати стійкості локалізуються в межах прямолінійного краю. Розглядаються випадки, в яких граничні умови на одному з криволінійних країв узяті з групи закладення. При цьому в межах цього краю виникає крайовий ефект. Для отримання асимптотичної формули для параметра частоти коливань циліндрової панелі виконано виключення інтегралів крайового ефекту з граничних умов на криволінійних краях. Проведено порівняння асимптотичних результатів з чисельними результатами, отриманими методом прогону і методом кінцевих елементів.

Ключові слова: циліндрова панель, низькочастотні коливання, асимптотична інтеграція, інтеграли крайового ефекту.

PARTICULAR CASE OF INTEGRATION OF EQUATION FOR CYLINDRICAL PANEL'S FLUCTUATION

Z.G. Ershova, V.I. Ershov

The article presents the investigation of low frequency fluctuations of slim cylindrical panel, with rectilinear border which is supposed free or faintly fastening. As a result forms of steadiness' losses localize near the rectilinear border. Cases with border's conditions for one from curvilinear borders was taken from stopping up group were considered in the article. Border effect in this location take place. Excluding of border effect's integral from the border's conditions on the curvilinear borders for the purpose of receiving asymptotical equation for parameter of frequency fluctuations of cylindrical panel was made. Comparison of asymptotical results and numerical results by run-through method and ultimate elements method is given.

Key words: cylindrical panel, low frequency fluctuations, asymptotical integration, border effect, border's conditions.

Ершова Зинаида Георгиевна – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры технической механики Тутаевкого филиала ГОУ ВПО «Рыбинская государственная авиационная технологическая академия имени П.А. Соловьева», Тутаев, Россия, e-mail: evi-52@mail.ru.

Ершов Виктор Иванович – канд. физ.-мат. наук, доцент, директор Тутаевкого филиала ГОУ ВПО «Рыбинская государственная авиационная технологическая академия имени П. А. Соловьева», Тутаев, Россия, e-mail: evi-52@mail.ru.