

УДК 531.133.1

Е.А. ИГУМЕНЦЕВ, Е.А. ПРОКОПЕНКО

Украинская инженерно-педагогическая академия, Украина

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ЗАРЯЖЕННОГО ГИРОСКОПА

В работе рассмотрены свободное вращение и установившаяся прецессия гироскопа, широко применяемого в летательных аппаратах, под действием силы тяжести. Сила тяжести, стремящаяся опрокинуть гироскоп, фактически не вызывает, а лишь поддерживает результирующую прецессию. Для симметричного гироскопа, когда не действует внешний момент, частота вращения вдоль оси симметрии постоянна. В этом случае вектор момента импульса и ось симметрии не совпадают, в отличие от идеального шара. Установлено, что гироскоп в виде неидеального шара с малым значением эксцентриситета обладает всеми динамическими свойствами симметричного гироскопа и «почти» всеми свойствами идеального шара.

Ключевые слова: гироскоп, нутация, идеальная и неидеальная сфера, момент импульса, вектор, проекция, частота.

Необычное на первый взгляд поведение известной игрушки – детского волчка (гироскопа) объясняется законом изменения момента импульса под действием внешних сил. Согласно этому закону, скорость изменения момента импульса \vec{L} (называемого иначе угловым моментом) любого тела относительно некоторой точки равна суммарному моменту \vec{N} действующих на тело внешних сил [1]:

$$d\vec{L}/dt = \vec{N}. \quad (1)$$

Когда волчок вращается вокруг собственной оси, вектор момента импульса \vec{L} тоже направлен вдоль этой оси. Направление \vec{L} связано с направлением вращения волчка правилом правого винта. Будем указывать направление оси волчка в пространстве (от точки опоры к центру масс) с помощью единичного вектора \vec{p}_0 (рис.1). Пусть I_0 — момент инерции волчка относительно оси симметрии (например, для однородного диска или цилиндра $I_0 = mR^2/2$, где m – масса, r – радиус), а ω_0 – угловая скорость вращения вокруг собственной оси (положительная при вращении против часовой стрелки). Тогда вектор момента импульса волчка можно представить в виде $\vec{L} = I_0\omega_0\vec{p}_0$.

Наклоненный к вертикали волчок прецессирует, т.е. помимо вращения вокруг собственной оси поворачивается еще и вокруг вертикальной оси. При быстром собственном вращении эта прецессия (поворот вокруг вертикальной оси) происходит настолько медленно, что с хорошей точностью можно пренебречь той составляющей момента импульса, которая обусловлена прецессией вокруг вертикали. Иными словами, приближенно можно считать, что

вектор полного момента импульса \vec{L} и в этом случае направлен вдоль оси волчка: $\vec{L} \cong \vec{L}_0 = I_0\omega_0\vec{p}_0$. Именно такой быстро вращающийся вокруг собственной оси волчок и называют гироскопом. В приближенной теории гироскопа, основанной на законе изменения момента импульса (1), как раз и предполагается, что вектор \vec{L} равен \vec{L}_0 и все время направлен вдоль собственной оси волчка. Поэтому описываемое уравнением (1) поведение вектора \vec{L} говорит и о том, как ведет себя в пространстве ось гироскопа.

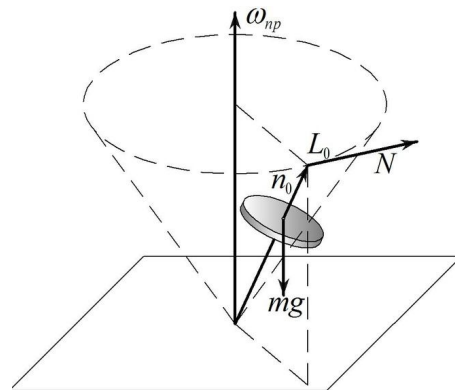


Рис. 1. Установившаяся (регулярная) прецессия гироскопа под действием силы тяжести

В случае тела, имеющего неподвижную точку (у детского волчка это точка опоры о горизонтальную плоскость), уравнение (1) удобно применять именно к этой точке. Будем называть эту точку полюсом. При выборе полюса в точке опоры момент силы реакции, действующей на волчок как раз в этой точке, обращается в нуль. В правой части урав-

нения (1) остается только момент \bar{N} силы тяжести $m\bar{g}$, который в каждый момент времени перпендикулярен вектору \bar{L} . Поэтому сила тяжести может изменить только направление \bar{L} , но не его длину, т.е. вызвать поворот вектора \bar{L} , а вместе с ним и поворот оси волчка вокруг вертикали, как это показано на рис. 1.

Пусть ε – расстояние от точки опоры до центра тяжести. Тогда момент силы тяжести можно записать как векторное произведение вектора $\bar{n}_0\varepsilon$ проведенного из точки опоры вдоль оси волчка в центр тяжести, на силу $m\bar{g}$: $\bar{N} = \bar{n}_0\varepsilon \times m\bar{g}$. Вектор \bar{N} лежит в горизонтальной плоскости и направлен перпендикулярно вектору \bar{n}_0 , т.е. перпендикулярно оси волчка. Движение конца оси гироскопа происходит в направлении момента \bar{N} силы тяжести, а не в направлении самой силы тяжести $m\bar{g}$. Этим и объясняется «необычное» поведение гироскопа. Согласно уравнению (1), за каждый малый промежуток времени dt вектор момента импульса \bar{L} получает под действием силы тяжести приращение $d\bar{L} = \bar{N}dt$, направленное вдоль \bar{N} , т.е. лежащее в горизонтальной плоскости перпендикулярно оси волчка. Отсюда следует, что вектор \bar{L} и вместе с ним ось волчка равномерно поворачиваются (совершают прецессию) вокруг вертикали, проходящей через точку опоры.

Угловую скорость $\bar{\omega}_{пр}$ этой прецессии можно найти, подставив $\bar{L} \cong \bar{L}_0 = I_0\omega_0\bar{n}_0$ в левую часть уравнения (1) и $\bar{N} = \bar{n}_0\varepsilon \times m\bar{g}$ — в правую часть. Пренебрегая трением, угловую скорость собственного вращения ω_0 будем считать постоянной [2] и вынесем за знак производной. В результате уравнение (1) принимает вид:

$$I_0\omega_0 \frac{d\bar{n}_0}{dt} = \bar{n}_0\varepsilon \times m\bar{g}, \text{ или} \quad (2)$$

$$\frac{d\bar{n}_0}{dt} = \bar{\omega}_{пр}\bar{n}_0, \quad \bar{\omega}_{пр} = -\frac{\varepsilon m}{I_0\omega_0} \bar{g}.$$

Вектор угловой скорости прецессии $\bar{\omega}_{пр}$ при $\omega_0 > 0$ (т.е. при вращении гироскопа против часовой стрелки) направлен противоположно вектору \bar{g} , т.е. прецессия происходит тоже против часовой стрелки. Как следует из уравнения (2), величина угловой скорости прецессии обратно пропорциональна угловой скорости собственного вращения ω_0 и прямо пропорциональна расстоянию ε от точки опоры до центра тяжести. Она не зависит от угла наклона оси волчка к вертикали.

Описываемое уравнением (2) поведение оси гироскопа называют регулярной прецессией. Это

вынужденная прецессия, так как она происходит под действием момента силы тяжести. Все точки волчка, лежащие на его оси, равномерно движутся по круговым траекториям, центры которых лежат на вертикали, проходящей через точку опоры волчка.

Установлено [1], что регулярная прецессия, угловая скорость которой рассчитана выше на основе приближенной теории гироскопа, в действительности является одним из возможных точных решений динамического уравнения (1).

Однако вынужденная регулярная прецессия волчка – это не единственно возможное точное решение уравнения (1), когда в правой его части стоит момент силы тяжести. Регулярная прецессия будет происходить только при строго определенных начальных условиях: чтобы получить такое движение, нужно не только раскрутить волчок вокруг собственной оси, но и сообщить этой оси вращение вокруг вертикали с нужной угловой скоростью, а именно, угловой скоростью $\omega_{пр}$, с которой должна происходить дальнейшая прецессия волчка. В определенном смысле можно сказать, что сила тяжести, стремящаяся опрокинуть волчок, фактически не вызывает, а лишь поддерживает регулярную прецессию [1].

Кроме того, установлено [2, 3], что волчок будет устойчив в том случае, когда его ось расположена горизонтально.

Уравнение (1) справедливо для инерциальной системы отсчета. Инерциальные коэффициенты удобнее всего определяются по отношению к координатным осям, покоящимся во вращающемся теле, с которым связана неинерциальная система отсчета (мы рассматриваем вопрос о том, являются ли оси покоящимися или нет).

Известно [3], как преобразовать вектор из инерциальной системы отсчета (ин) во вращающуюся систему отсчета:

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{ин} = \frac{d\bar{L}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L}, \quad (3)$$

где $\bar{\omega}$ – угловая скорость вращающейся системы отсчета. Все другие величины в правой части (3) относятся к вращающейся системе отсчета. Поэтому (1) принимает вид:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L} = \bar{N}, \quad (4)$$

где \bar{L} относится к вращающейся системе отсчета.

Предположим, что оси координат во вращающейся системе отсчета расположены вдоль главных осей ξ, η, ζ .

Принимая во внимание [2], мы можем написать для проекций на ось o , вместо (4),

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{\xi} + (\bar{\omega} \times \bar{L})_{\xi} = \frac{dL_{\xi}}{dt} + \omega_{\eta}L_{\zeta} - \omega_{\zeta}L_{\eta} =$$

$$= I_{\xi} \cdot d\omega_{\xi}/dt + \omega_{\eta}I_{\zeta}\omega_{\zeta} - \omega_{\zeta}I_{\eta}\omega_{\eta} = N_{\xi} \quad (5)$$

или, преобразуя (5), мы можем также написать уравнения для компонентов вдоль осей ξ, η, ζ . Здесь $I_o, I_s, I_{ж}$ — моменты инерции относительно этих осей.

$$\left. \begin{aligned} I_{\xi} \cdot d\omega_{\xi}/dt + (I_{\eta} - I_{\zeta})\omega_{\eta}\omega_{\zeta} &= N_{\xi} \text{ (а)} \\ I_{\eta} \cdot d\omega_{\eta}/dt - (I_{\xi} - I_{\zeta})\omega_{\xi}\omega_{\zeta} &= N_{\eta} \text{ (б)} \\ I_{\rho} \cdot d\omega_{\zeta}/dt + (I_{\xi} - I_{\eta})\omega_{\xi}\omega_{\eta} &= N_{\zeta} \text{ (в)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти уравнения известны под названием уравнений Эйлера. Они являются исходными уравнениями для решения задач на вращение твердых тел. При использовании уравнений Эйлера главные оси ξ, η, ζ связаны с телом.

Для однородного шара, у которого $I_{\xi} = I_{\eta} = I_{\zeta}$, уравнения Эйлера принимают простой вид: $I_{\xi}\dot{\omega}_{\xi} = N_{\xi}$; $I_{\eta}\dot{\omega}_{\eta} = N_{\eta}$; $I_{\zeta}\dot{\omega}_{\zeta} = N_{\zeta}$. При свободном движении $N = 0$ и из последних уравнений следует, что $\omega_{и} = \text{const}$, где $\omega_{и}$ — угловая скорость однородного (идеального) шара. Это и является характерным отличительным признаком свободно вращающегося шара. Угол $\omega_{и}$ между векторами ω и одинаковыми проекциями $\omega_{\xi} = \omega_{\eta} = \omega_{\zeta}$ зафиксирован, с косинусом угла $\omega_{и}$, равным $\cos \psi_{и} = 1/\sqrt{3}$ (рис. 2).

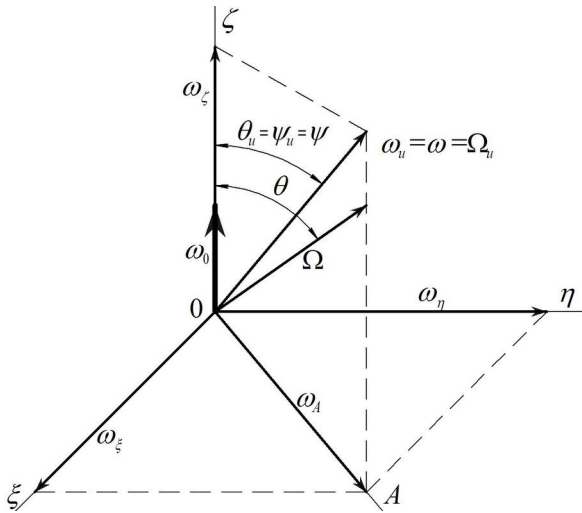


Рис. 2. Проекция угловых скоростей идеального шара и симметричного волчка

Проекция, выраженные через ω , равны

$$\omega_{\xi} = \omega_{\eta} = \omega_{\zeta} = \omega/\sqrt{3}.$$

Проекция частоты ω на ось А, лежащую в плоскости $o\omega z$ под углом $\pi/4$ к осям o и z , равна $\omega_A = \sqrt{2}\omega/\sqrt{3}$ с косинусом угла между ω_A и ω , равным

$$\cos(\pi/2 - \psi_{и}) = \sin \psi_{и} = \sqrt{2}/\sqrt{3}.$$

Если координатные оси проведены таким образом, что проекции частот вращения не равны между собой и

$$\cos \psi_{и} \neq 1/\sqrt{3},$$

то

$$\omega_A = \omega_{и} \sin \psi_{и}; \quad \omega_{\rho} = \omega_{и} \cos \psi_{и}.$$

Для симметричного волчка ($I_{\xi} = I_{\eta} \neq I_{\zeta}$) из (6) следует, что при свободном вращении волчка, когда не действует внешний момент вращения $N_i = 0$, ω_{ζ} (и только ω_{ζ}) постоянна. Система уравнений (6) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_{\xi} + \omega_{\zeta}\omega_{\eta} \cdot (I_o - I)/I &= 0 \\ \dot{\omega}_{\eta} + \omega_{\zeta}\omega_{\xi} \cdot (I_o - I)/I &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь обозначено $I_{\xi} = I_{\eta} = I$; $I_{\zeta} = I_o$.

Рассмотрим вытянутое вдоль оси симметрии тело, когда $I > I_o$. Обозначим частоту вращения тела вокруг оси симметрии

$$\omega_0 \equiv \omega_{\zeta} \cdot (I - I_o)/I, \quad (8)$$

а уравнение (7) перепишем в другом виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_{\xi} + \omega_0\omega_{\eta} &= 0 \\ \dot{\omega}_{\eta} + \omega_0\omega_{\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Решение уравнений (9) имеет вид

$$\omega_{\xi} = \omega_A \cos \omega_0 t, \quad \omega_{\eta} = -\omega_A \sin \omega_0 t, \quad (10)$$

где ω_A (рис. 2) постоянная амплитуда колебаний, являющаяся компонентой угловой скорости $\omega_A = \sqrt{\omega_{\eta}^2 + \omega_{\xi}^2}$, ортогональной к оси симметрии волчка (ось ζ). Компонента ω_A вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 в противоположном (отрицательном) направлении относительно подвижных осей ξ и η .

Подвижные оси координат вместе с телом вращаются с частотой ω_{ζ} вокруг оси ζ . Следовательно, компонента ω_A вращается в положительном направлении вокруг оси ζ с частотой, равной $\Omega_{\zeta} = \omega_{\zeta} - \omega_0$. Компонента ω_{ζ} угловой скорости вдоль оси симметрии ζ волчка постоянна. Поэтому вектор ω равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 относительно оси волчка. Другими словами, волчок, вращающийся относительно своей геометрической оси ж с угловой скоростью ω_{ζ} в пространстве, в котором не действуют силы, будет раскачиваться из стороны в сторону с частотой ω_0 (см. рис. 2)

Направим вектор частоты вращения симметричного волчка вдоль вектора $\omega_{и}$ идеального шара. При условии $\cos \psi = 1/\sqrt{3}$ и $\omega = \omega_{и}$ углы равны $\psi = \psi_{и}$. Равны между собой и проекции частот ω и $\omega_{и}$ на оси ζ и А (рис. 2).

Однако, проекции на оси ξ и η уже не равны. Для шара они постоянны $\omega_\xi = \omega_\eta = \omega/\sqrt{3}$, а для волчка — переменны и определяются соотношениями (10). Здесь, как и для идеального шара, при условии

$$\begin{aligned} \cos \psi &= 1/\sqrt{3}; \\ \omega_A &= \sin \psi = \Omega \sin \theta; \\ \omega_\zeta &= \omega \cos \psi. \end{aligned}$$

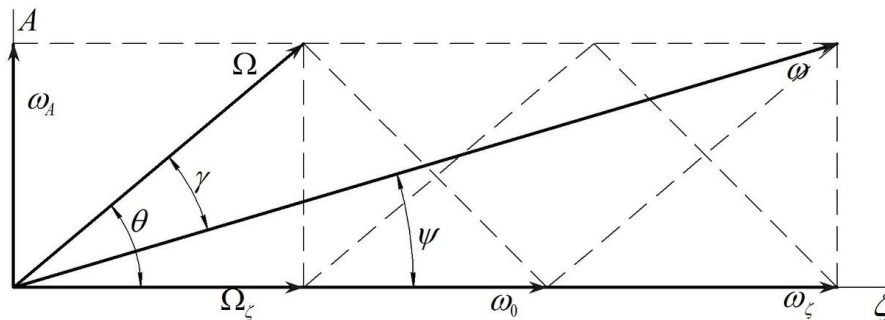


Рис. 3. Разложение вектора мгновенной угловой скорости ω на сумму двух составляющих векторов $\bar{\omega}_0$ и $\bar{\Omega}$ и сумму взаимортогональных компонент $\bar{\omega}_A$ и $\bar{\omega}_\zeta$

Итак, с учетом соотношения (8), получим выражение для соответствующей угловой скорости $\omega_{ж}$ в виде

$$\omega_\zeta = \Omega_\zeta + \omega_\zeta [(I - I_0)/I]. \quad (11)$$

Из (11) следует, что

$$\Omega_\zeta = \Omega \cos \theta = \omega_\zeta (I/I_0) \quad (\text{рис. 3}),$$

а отношения (11) и (8) принимают следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_\zeta &= (I/I_0)\Omega_\zeta \\ \omega_0 &= (I/I_0 - 1)\Omega_\zeta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Учитывая, что $\omega_A = \Omega \sin \theta$ является проекцией вектора $\bar{\omega}$, из теоремы Пифагора (рис. 3) получим

$$\omega^2 = \Omega^2 \left\{ 1 + \left[(I/I_0)^2 - 1 \right] \cos^2 \theta \right\}. \quad (13)$$

С учетом (12) выражение для частоты вращения компоненты угловой скорости ω_A в положительном направлении вокруг оси ж примет вид:

$$\Omega_\zeta = (\omega_\zeta - \omega_0) = \Omega \cos \theta. \quad (14)$$

Таким образом, проекция частоты вращения ω на ось ζ состоит из двух частот: частоты вращения тела вокруг оси симметрии и частоты вращения проекции ω_A ортогональной оси

$$\omega_\zeta = \Omega_\zeta + \omega_0. \quad (15)$$

Рассмотрим вытянутое вдоль оси тело (т.е. тело с моментами инерции $I > I_0$).

Проведем из конца вектора $\bar{\omega}_\zeta$ отрезок $(\omega_\zeta - C)$, параллельный отрезку $(\Omega - \omega_0)$ (рис. 3), затем соединим точку C с концом вектора $\bar{\Omega}_\zeta$.

Несложно доказать, что отрезок $(\Omega_\zeta - C)$ параллелен вектору $\bar{\Omega}$, а следовательно, отрезок $(\omega_\zeta - \omega_0)$ равен вектору $\bar{\Omega}_\zeta$.

Для нахождения угла (γ) между векторами $\bar{\Omega}$ и $\bar{\omega}$ необходимо применить теорему косинусов (рис. 3):

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \Omega^2 + 2\Omega\omega \cos \gamma. \quad (16)$$

Здесь $\omega_0 = \omega_\zeta - \Omega_\zeta$ из (15). Вычисляя $\cos \gamma$ из уравнения (16) с учетом (12) и (13), получим:

$$\cos \gamma = \frac{1 + (I/I_0 - 1) \cos^2 \theta}{\sqrt{1 + \left[(I/I_0)^2 - 1 \right] \cos^2 \theta}}. \quad (17)$$

Для идеального шара $I/I_0 = 1$, $\cos \gamma = 1$, вектора $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}$ совпадают, а углы η_n и ψ_n равны между собой (рис. 2).

Под неидеальным шаром понимаем такой шар, у которого центр жесткости (геометрический центр) образует идеальный шар, где моменты инерции относительно любых осей, проходящих через центр жесткости, равны $I_\xi = I_\eta = I_\zeta = I_0$. Центр тяжести не совпадает с центром жесткости и имеет незначительный эксцентриситет ε . Если ось ж провести через центр жесткости и центр тяжести, то моменты инерции относительно осей ζ, ξ, η будут равны $I_\zeta = I_0$; $I_\xi = I_\eta = I_0 + m\varepsilon^2$, отношение I/I_0 , входящее в (17), равно $I/I_0 = 1 + 5\varepsilon^2 / (2R^2)$, где R — радиус шара.

При малом значении ϵ , когда $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$, угол γ мал, вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ «почти» совпадают, а $\cos \gamma = 1 - \left[5\epsilon^2 / (2R^2) \right]^2$.

Для этого случая $\gamma \approx \sqrt{2} \cdot 5\epsilon^2 / (6R^2)$.

Аналогично и для любых значений ϵ и в интервале $0 < \theta < \pi/2$ при малом ϵ вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ «почти» совпадают, а угол γ мал.

Таким образом, волчок в виде неидеального шара с малым значением ϵ обладает всеми динамическими свойствами гироскопа и «почти» всеми свойствами идеального шара.

Литература

1. Бутиков Е.И. Динамика вращения твердого тела / Е.И. Бутиков. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета, 2007. – 22 с.
2. Киттель Ч. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – М.: Наука, 1971. – Том 1. – 479 с.
3. Трофимова Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М.: Изд-во «Академия», 2008. – 560 с.

Поступила в редакцию 1.06.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.И. Кузнецов, Научно-технический центр магнетизма технических объектов технических объектов НАН Украины, Харьков.

МОМЕНТ ІМПУЛЬСУ ГІРОСКОПУ, ЩО МАЄ ЗАРЯД

Є.О. Ігуменцев, О.О. Прокопенко

У роботі розглянуто вільне обертання і стала прецесія гіроскопа, широко вживаного в літальних апаратах, під впливом сили тяжіння. Сила тяжіння, яка прагне перевернути гіроскоп, фактично не викликає, а лише підтримує результуючу прецесію. Для симетричного гіроскопу, коли не діє зовнішній момент, частота обертання уздовж осі симетрії постійна. В цьому випадку вектор моменту імпульсу і вісь симетрії не збігаються, на відміну від ідеальної кулі. Встановлено, що гіроскоп у виді ідеальної кулі з малим значення ексцентриситету володіє усіма динамічними властивостями симетричного гіроскопу і практично усіма властивостями ідеальної кулі.

Ключові слова: гіроскоп, нутація, ідеальна та неідеальна куля, момент імпульсу, вектор, проекція, частота.

MOMENT OF IMPULSE OF THE CHARGED GYROSCOPE

E.A. Igumentsev, E.A. Prokopenko

This article is about a free rotation and set procession of gyroscope, widely used in aircrafts, under the action of gravity. The gravity, trying to tip gyroscope over, in fact does not cause, but only supports a resulting procession. For a symmetric gyroscope, when an external moment does not operate, frequency of rotation along the axis of symmetry is permanent. In this case vector of moment of impulse and axis of symmetry do not coincide. It is proven, that gyroscope in the shape of not ideal ball with a small excentrisitent has all the dynamical properties of the symmetrical gyroscope and “almost” all the properties of the ideal ball.

Key words: gyroscope, nutation, ideal and non-perfect sphere, moment of impulse, vector, projection, frequency.

Игуменцев Евгений Александрович – д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой систем управления технологических процессов и объектов Украинской инженерно-педагогической академии, Харьков, Украина.

Прокопенко Елена Александровна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры систем управления технологических процессов и объектов Украинской инженерно-педагогической академии, Харьков, Украина.