

УДК 539.3.01

В.Б. МИНТЮК

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ОБОБЩЕННОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Задача обобщенного плоского напряженного состояния при конечных перемещениях формулируется для физически линейных материалов первого и второго порядков, а также для физически нелинейного несжимаемого материала Муни. Разрешающие уравнения физически линейных материалов оказываются вполне определенными для несжимаемого материала, что позволяет провести сравнительный анализ решений всех поставленных задач. На примере задачи растяжения тонкой пластины показана быстрая сходимость приближенных численных решений, построенных методом Рунца. По результатам исследований сделан вывод о том, что использование геометрически нелинейных соотношений и физически линейного закона только усугубляет погрешность линейной теории упругости.

Ключевые слова: обобщенное плоское напряженное состояние, мера деформации, физически и геометрически нелинейная задача

Введение

Нелинейная теория упругости в расчетах прочности силовых конструкций аэрокосмической техники наиболее востребована при определении разрушающих нагрузок. Среди задач, которые требуют привлечения этой теории, достаточно упомянуть, например, определение критического поведения тонкостенных силовых конструкций или же их поведение при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала, развитие трещин, контактные задачи и др.

Становление и активное развитие нелинейной теории упругости, берущей свое начало от работ Б. де Сен-Венана, Г. Кирхгофа, И. Фингера, приходится на начало прошлого века. Научные наработки этого периода подытожены в работах [1, 2]. В настоящее время она вполне сформировалась, что отражено в монографиях различных научных школ [3 – 7]. Актуальной задачей, существующей здесь и отмечаемой различными авторами, является получение достоверных численных результатов, удовлетворяющих нуждам практики. Проблема заключается, во-первых, в исследовании и обосновании неизбежно принимаемых упрощений в самой теории: неоднозначность выбора меры деформаций, закона состояния, применение технических гипотез и др. Во-вторых, существует настоятельная потребность в разработке надежных, точных и быстросходящихся численных процедур получения приближенных решений нелинейных задач. Наиболее развитый на сегодня метод конечного элемента (МКЭ) не вполне удовлетворяет перечисленным требованиям.

Ниже используется ряд теоретических положений монографий [5, 8].

В работе приведен явный вид разрешающих соотношений в терминах функций перемещений, исследовано влияние на напряженно-деформированное состояние пластины выбора типа материала, который продиктован принимаемой мерой деформации и видом закона упругости. Численные расчеты выполнены с использованием метода Рунца в сочетании с методом Ньютона.

1. Постановка задачи

Поместим прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3 с единичными ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ в тело пластины таким образом, чтобы в отсчетной конфигурации орты \mathbf{i}_1 и \mathbf{i}_2 лежали в срединной плоскости пластины. Пусть $\xi_i = x_i + u_i$, ($i = 1, 2, 3$) – координаты частиц пластины, претерпевающие перемещения $u_i(x_1, x_2)$ при переходе из отсчетной конфигурации в актуальную, являются также параметрами материальной системы координат. Тензор-градиент перемещения¹⁾, характеризующий изменение элементарного отрезка²⁾,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \mathbf{i}_i \mathbf{j}$$

с учетом кинематической гипотезы о неизменяе-

¹⁾ В отечественной литературе нет определенности в названии этого тензора, так, в работе [5] используется термин "транспонированный градиент места", в [6] – "градиент перемещения", в [7] – "градиент деформации". В зарубежной литературе он называется "deformation gradient".

²⁾ Здесь и далее подразумевается правило суммирования по повторяющемуся индексу, причем латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, а греческие – 1, 2.

мости направления нормали к срединной поверхности можно записать

$$\mathbf{F} = u_{\alpha,\beta} \mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta + \lambda \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

где введено обозначение $u_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}$;

$\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера;

λ – удлинение волокон пластины в направлении x_3 , т.е. относительное изменение толщины.

Компоненты правого тензора кратности удлинений \mathbf{U} в полярном разложении тензор-градиента перемещения

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \quad (2)$$

можно определить непосредственно из уравнения $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$, как в работе [5], или, как в работе [9], с помощью кругов Мора:

$$\begin{aligned} U_{11} &= \frac{1}{q} [u_{1,1}(u_{1,1} + u_{2,2}) + u_{2,1}(u_{2,1} - u_{1,2})]; \\ U_{22} &= \frac{1}{q} [u_{2,2}(u_{2,2} + u_{1,1}) + u_{1,2}(u_{1,2} - u_{2,1})]; \\ U_{12} = U_{21} &= \frac{1}{q} [u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,2}u_{2,1}]; \\ U_{33} &= \lambda; \\ U_{13} = U_{23} = U_{31} = U_{32} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $q = \sqrt{(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + (u_{1,2} - u_{2,1})^2}$.

Ненулевые компоненты ортогонального тензора поворота, сопровождающего деформацию, $\mathbf{Q} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ получаются равными

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{1}{q} (u_{1,1} + u_{2,2}); \\ Q_{12} = -Q_{21} &= \frac{1}{q} (u_{1,2} - u_{2,1}); \\ Q_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Необходимые в дальнейшем при определении уравнений состояния инварианты тензора кратности удлинений и метрического тензора актуального состояния $\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$ имеют вид

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{U}) &= q + \lambda; \\ I_2(\mathbf{U}) &= q\lambda + J; \\ I_3(\mathbf{U}) &= \text{Det}(\mathbf{F}) = J\lambda; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{G}) &= q^2 - 2J + \lambda^2; \\ I_2(\mathbf{G}) &= \lambda^2 (q^2 - 2J) + J^2; \\ I_3(\mathbf{G}) &= J^2 \lambda^2, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь введено обозначение $J = u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}u_{2,1}$.

Далее, используя любую из энергетически сопряженных пар тензоров напряжений и деформаций

семейства Хилла [10], приведенных в табл. 1, или номинальную пару $\mathbf{J}\Sigma\mathbf{F}^{-T}$ и \mathbf{F} , получим выражение приращения плотности работы напряжений на вариациях перемещений

$$\begin{aligned} \delta W &= \lambda [\sigma_{11}(u_{2,2}\delta u_{1,1} - u_{2,1}\delta u_{1,2}) + \\ &+ \sigma_{12}(u_{1,1}\delta u_{1,2} - u_{1,2}\delta u_{1,1} + u_{2,2}\delta u_{2,1} - u_{2,1}\delta u_{2,2}) + \\ &+ \sigma_{22}(u_{1,1}\delta u_{2,2} - u_{1,2}\delta u_{2,1})] + J\sigma_{33}\delta\lambda, \end{aligned} \quad (7)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора истинных напряжений Коши Σ .

Таблица 1

Сопряженные пары тензоров

№ п/п	Тензор напряжений \mathbf{T}	Тензор деформаций \mathbf{E}
1	$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{J}\Sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}$ второй тензор Пиола-Кирхгофа	$\frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1})$ Грина
2	$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{J}\Sigma \cdot \mathbf{F}$ Грина-Ривлина	$\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{U}^{-2})$ Альманзи
3	$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{J}\Sigma \cdot \mathbf{Q}$	$\ln \mathbf{U}$ Генки
4	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{J}\Sigma \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{J}\Sigma \cdot \mathbf{F}^{-T})$ симметричный тензор Био	$\mathbf{U} - \mathbf{1}$ Коши
5	$\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{J}\Sigma \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{J}\Sigma \cdot \mathbf{F})$	$\mathbf{1} - \mathbf{U}^{-1}$ Кёрбера-Свейнга

Путем применения основной леммы вариационного исчисления к уравнениям равновесия в отсчетной конфигурации (без учета инерционных и массовых сил)

$$\nabla \cdot [\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{J}\Sigma] = 0, \quad (8)$$

где $\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ – набла вектор;

с последующим устранением производных под знаком вариации с помощью формулы Остроградского-Гаусса приходим к выражению приращения плотности работы (7) и набору граничных условий на торцах пластины

$$\begin{cases} (\sigma_{11}u_{2,2} - \sigma_{12}u_{1,2})n_1 + \\ + (\sigma_{12}u_{1,1} - \sigma_{11}u_{2,1})n_2 = 0 \vee \delta u_1 = 0; \\ (\sigma_{22}u_{1,1} - \sigma_{12}u_{2,1})n_2 + \\ + (\sigma_{12}u_{2,2} - \sigma_{22}u_{1,2})n_1 = 0 \vee \delta u_2 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где n_1, n_2 – направляющие косинусы внешней нормали к границе.

Из всего многообразия материалов рассмотрим гиперупругие изотропные материалы, являющиеся

обобщением закона Гука на большие деформации, – материал первого рода (Джона, гармоничный), материал второго рода и один из наиболее простых физически нелинейных материалов – материал Муни. Связь напряжений с деформациями, выраженными через перемещения, для них имеют вид [5, 6]:

– материал первого рода

$$\Sigma^I = \frac{E}{J\lambda(1+\nu)} \mathbf{F} \cdot \left[\left(\frac{I_1(\mathbf{U})-3}{1-2\nu} \nu - 1 \right) \mathbf{Q}^T + \mathbf{F}^T \right], \quad (10)$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона;

– материал второго рода

$$\Sigma^{II} = \frac{E}{2J\lambda(1+\nu)} \left[\left(\frac{I_1(\mathbf{G})-3}{1-2\nu} \nu - 1 \right) \widehat{\mathbf{G}} + \widehat{\mathbf{G}}^2 \right], \quad (11)$$

где $\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ – мера деформации Альманзи;

– материал Муни

$$\Sigma^{III} = \frac{E}{6} \left[(1+\beta + I_1(\mathbf{G})(1-\beta)) \widehat{\mathbf{G}} - (1-\beta) \widehat{\mathbf{G}}^2 \right] - p \mathbf{1}, \quad (12)$$

здесь β – постоянная материала, при $\beta = 1$ материал переходит в неогуковский;

p – всестороннее давление;

$\mathbf{1}$ – единичный тензор.

Из определений (10) – (12) нормальные напряжения в направлении x_3 в явном виде соответствуют типам перечисленных материалов представляются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^I &= \frac{E \left[(1-\nu)\lambda - 1 + \nu(q-1) \right]}{J(1+\nu)(1-2\nu)}; \\ \sigma_{33}^{II} &= \frac{E\lambda \left[(1-\nu)\lambda^2 - 1 + \nu(q^2 - 2J + 1) \right]}{2J(1+\nu)(1-2\nu)}; \\ \sigma_{33}^{III} &= \frac{E \left[1 + \beta + (q^2 - 2J)(1-\beta) \right]}{6J^2} - p. \end{aligned} \quad (13)$$

Из условия равенства нулю этих напряжений определяются следующие величины:

– для материала первого рода

$$\lambda = 1 + \frac{\nu(2-q)}{1-\nu}; \quad (14)$$

– для материала второго рода

$$\lambda^2 = 1 + \frac{\nu(2(1+J) - q^2)}{1-\nu}; \quad (15)$$

– для материала Муни

$$p = 1 + \beta + (q^2 - 2J)(1-\beta). \quad (16)$$

Относительное уменьшение толщины λ для материала Муни определяется из условия несжимаемости $I_3(\mathbf{G}) = 1$:

$$\lambda = J^{-1}. \quad (17)$$

С учетом значений удлинений для сжимаемых материалов и всестороннего давления для материала Муни потенциалы напряжений в явном виде запишутся так:

$$w^I = \frac{E \left[q^2 - 2(1-\nu)J + 2(1+\nu)(1-q) \right]}{2(1-\nu^2)}; \quad (18)$$

$$w^{II} = \frac{E \left[(q^2 - 2J - 2)^2 + 2(1-\nu)(q^2 - (1+J)^2) \right]}{8(1-\nu^2)}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} w^{III} &= \frac{E}{12} \left[(1+\beta) \left(q^2 - 2J - 3 + \frac{1}{J^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1-\beta) \left(J^2 - 3 + \frac{q^2 - 2J}{J^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Оставшиеся ненулевые компоненты тензора истинных напряжений для перечисленных материалов принимают вид:

$$\sigma_{11}^I = \frac{E \left[(J + u_{1,1}^2 + u_{1,2}^2)(q-1+\nu) - (1+\nu)Jq \right]}{Jq(1+\nu(1-q))(1+\nu)};$$

$$\sigma_{22}^I = \frac{E \left[(J + u_{2,2}^2 + u_{2,1}^2)(q-1+\nu) - (1+\nu)Jq \right]}{Jq(1+\nu(1-q))(1+\nu)}; \quad (21)$$

$$\sigma_{12}^I = \frac{E(u_{1,1}u_{2,1} + u_{2,2}u_{1,2})(q-1-\nu)}{Jq(1+\nu(1-q))(1+\nu)};$$

$$\sigma_{11}^{II} = \frac{E \left[(u_{1,1}^2 + u_{1,2}^2)(q^2 - 2J - 1 - \nu) - (1-\nu)J^2 \right]}{2J(1+\nu)\sqrt{(1-\nu)\left(1 + (1-q^2 + 2J)\nu\right)}};$$

$$\sigma_{22}^{II} = \frac{E \left[(u_{2,2}^2 + u_{2,1}^2)(q^2 - 2J - 1 - \nu) - (1-\nu)J^2 \right]}{2J(1+\nu)\sqrt{(1-\nu)\left(1 + (1-q^2 + 2J)\nu\right)}}; \quad (22)$$

$$\sigma_{12}^{II} = \frac{E(u_{1,1}u_{2,1} + u_{2,2}u_{1,2})(\nu + 1 - q^2 + 2J)}{2J(1+\nu)\sqrt{(1-\nu)\left(1 + (1-q^2 + 2J)\nu\right)}};$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{III} &= \frac{E}{6J^2} \left[\left((u_{1,1}^2 + u_{1,2}^2)J^2 - 1 \right) (1+\beta) + \right. \\ &\quad \left. + (J^4 - u_{2,2}^2 - u_{2,1}^2) (1-\beta) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{III} &= \frac{E}{6J^2} \left[\left((u_{2,2}^2 + u_{2,1}^2)J^2 - 1 \right) (1+\beta) + \right. \\ &\quad \left. + (J^4 - u_{1,1}^2 - u_{1,2}^2) (1-\beta) \right]; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\sigma_{12}^{III} = \frac{E}{6} (u_{1,1}u_{2,1} + u_{2,2}u_{1,2}) \left((1+\beta) + \frac{1-\beta}{J^2} \right).$$

Заметим, что при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ (условие несжимаемости) материалы

первого и второго порядков вполне определены (см. формулы (18), (19), (21), (22)).

Если выражения потенциальных энергий (18), (19) и (20) разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $u_{1,1} = 1$, $u_{2,2} = 1$, $u_{1,2} = 0$, $u_{2,1} = 0$ с удержанием квадратичных слагаемых, а функции напряжений (21), (22) и (23) и относительного изменения толщины (14), (15), (17) – только линейных, то приходим к соответствующим выражениям линейной теории упругости (материал Муни переходит в линейный при $\nu = 0,5$ и $\beta = 1$)

$$w^{IV} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - 4 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right]; \quad (24)$$

$$\sigma_{11}^{IV} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right);$$

$$\sigma_{22}^{IV} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right); \quad (25)$$

$$\sigma_{21}^{IV} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right);$$

$$\lambda = 1 - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right). \quad (26)$$

2. Численный эксперимент

В качестве численного эксперимента рассматривается сравнительно простая задача о поведении двухосных полос, т.е. растяжения тонкой пластины, две стороны которой смещаются вдоль оси x_1 с сохранением длины, а две другие свободны, как показано на рис. 1.

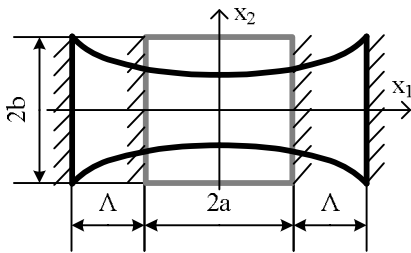


Рис. 1. Растяжение тонкого прямоугольного листа

Функции перемещений ищутся в виде рядов

$$u_1 = \frac{\Lambda x_1}{a} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \varphi_{2m}(x_1) \psi_{2n-1}(x_2); \quad (27)$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \varphi_{2m-1}(x_1) \psi_{2n}(x_2),$$

где Λ – смещение краев (см. рис. 1);

$$\varphi_n(x_1) = P_{n+1} \left(\frac{x_1}{a} \right) - P_{n-1} \left(\frac{x_1}{a} \right);$$

$$\psi_m(x_2) = P_{m-1} \left(\frac{x_2}{b} \right),$$

P – полиномы Лежандра.

Индексы координатных функций в суммах (27) выбраны с учетом симметрии задачи.

Неизвестные коэффициенты V_{mn}^α определяются методом Ньютона из системы нелинейных алгебраических уравнений, к которой приводит условие минимума полной потенциальной энергии

$$\frac{\partial W}{\partial V_{mn}^\alpha} = 0,$$

где $W = \int_{-a}^a \int_{-b}^b w dx_1 dx_2$ – полная потенциальная

энергия, а вид плотности энергии w определяется одним из выражений (18) – (20) или (24) в зависимости от решаемой задачи.

Пример решения такой задачи приведен в работе [11] при следующих данных (значения переведены в метрическую систему мер): размеры пластины в плане $a = b = 10,16$ см, толщина $t = 1,27$ мм, модуль упругости $E = 1,055$ МПа, постоянная Муни $\beta = 0,882$.

На рис. 2 показана сходимость величины результирующей силы P , которую необходимо приложить, чтобы достичь двойного увеличения длины пластины. С увеличением плотности конечно-элементной сетки сходимость значения силы P носит монотонный характер. Здесь заключение о точности численного решения можно сделать после введения 420 неизвестных. Сходимость приближенного решения (27) носит колебательный характер, разброс значений величины силы P во всем диапазоне изменения числа слагаемых в суммах (27) не превышает 2%. Это свидетельствует о более быстрой сходимости решения, построенного на аналитических функциях, чем конечно-элементного решения.

Необходимо отметить, что сходимость решений существенно ухудшается из-за наличия в угловых точках особенностей, связанных со сменой типа граничных условий. Вследствие этого с увеличением количества слагаемых в суммах (27) в самих угловых точках значения напряжений неограниченно растут, а их окрестности, где на границе $x_2 = \pm a$ нарушаются уравнения равновесия, уменьшаются. На рис. 3 показаны линии уровня относительных компонент симметричного тензора Био, т.е. условных напряжений и относительного изменения толщины λ при $\Lambda = a$.

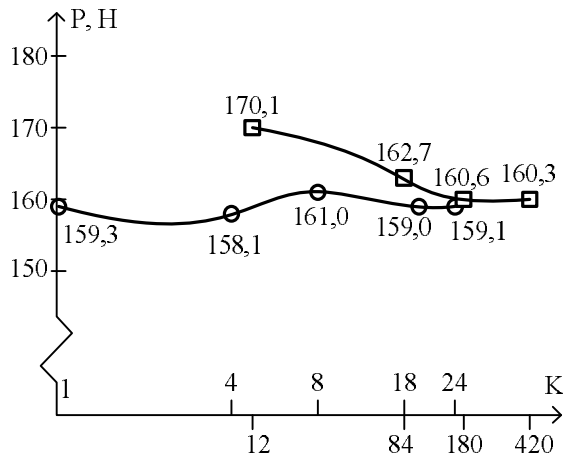


Рис. 2. Сходимость величины результирующей силы Р, необходимой для получения перемещения $\Lambda = a$, от количества неизвестных К в приближенных решениях:
 —○— сходимость решения (27) (верхняя шкала на оси абсциссе),
 —□— сходимость МКЭ по [11] (нижняя шкала на оси абсциссе)

Изменение величины результирующей силы Р с увеличением удлинения пластины, заполненной различными материалами, показано на рис. 4. Для моделирования несжимаемого материала дополнительно необходимо положить $\nu = 0,5$.

Как можно видеть при растяжении пластины, когда первоначальный размер увеличивается в два раза ($\Lambda/a = 1$), величины значений результирующей силы Р, подсчитанные для различных материалов, значительно разнятся, за исключением материала Муни (5, рис. 4) и неогукковского (4, рис. 4). Поведение пластины из материала первого порядка (1, рис. 4) близко к линейному решению (2, рис. 4) и гораздо ближе к истинному, в качестве которого принимается подтвержденная экспериментально зависимость 5 [11], чем пластины из материала второго порядка (4, рис. 3).

Как и следовало ожидать, при малых удлинениях все зависимости близки к линейной. Так, при $\Lambda/a = 0,05$, превышающем для большинства негиперупругих материалов предельное значение, погрешность определения результирующей силы по отношению к величине, определенной для материала Муни, составляет: 15% для материала второго порядка, 13% для материала первого порядка, 5% для линейной теории и 0,3% для неогукковского материала.

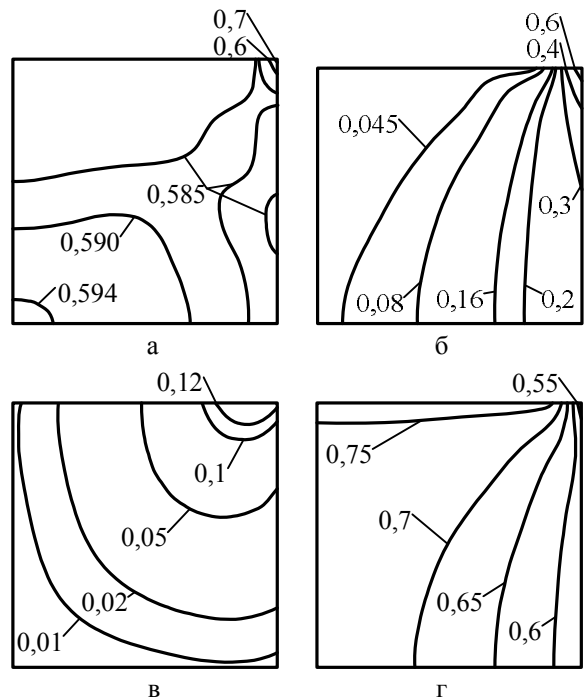


Рис. 3. Распределение относительных условных напряжений и изменение толщины:

а – напряжения $\frac{\sigma_{11}}{E}$; б – напряжения $\frac{\sigma_{22}}{E}$;
 в – напряжения $\frac{\sigma_{12}}{E}$; г – изменение толщины λ

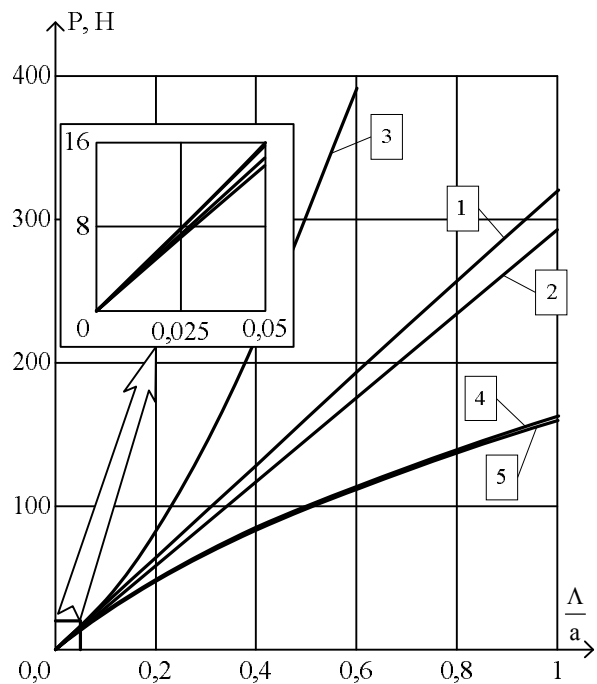


Рис. 4. Зависимость величины результирующей силы Р от величины удлинения пластины:
 1 – материал первого порядка (18), (21);
 2 – линейные соотношения (24), (25);
 3 – материал второго порядка (198), (22);
 4 – неогукковский материал (20), (23) при $\beta = 1$;
 5 – материал Муни (20), (23)

Аналогичные зависимости можно наблюдать и для пластины, выполненной из сжимаемого материала. На рис. 5 прослежено изменение относительных величин:

– силы $\bar{P} = \frac{P}{atE}$;

– уменьшения толщины в центре пластины $s = 1 - \lambda$;

– уменьшения ширины при $x_1 = 0$

$$\bar{v} = \frac{u_2|_{x_2=-a} - u_2|_{x_2=a}}{a}$$

Рассмотрена пластина с размерами $a = b = 100t = 1$, коэффициент Пуассона материала $\nu = 1/3$. Заметим, что приведенные величины не зависят от значения модуля упругости, так как сила P зависит от E линейно.

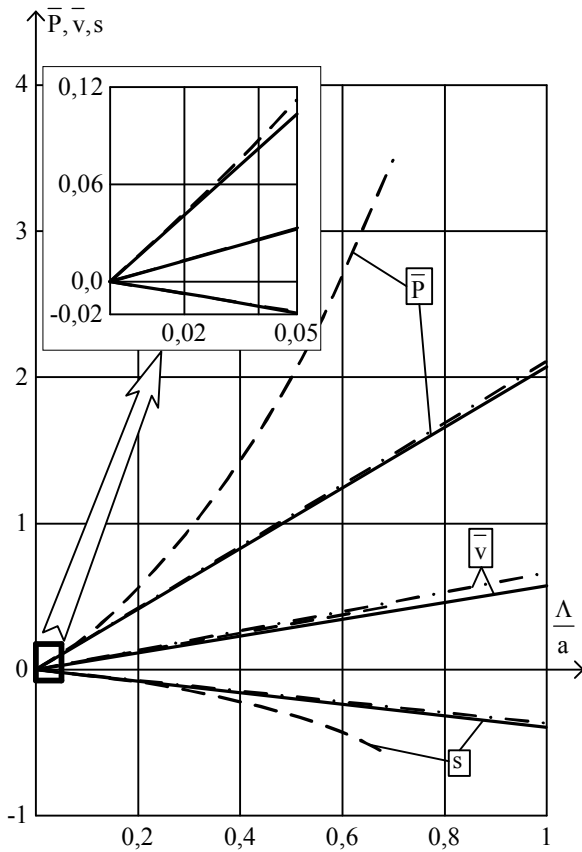


Рис. 5. Зависимость относительной результирующей силы \bar{P} , сужения \bar{v} и уменьшения толщины s от удлинения пластины:

- — — материал второго порядка (19), (22), (15);
- · - · - материал первого порядка (18), (21), (14);
- линейные соотношения (24), (25), (26)

Здесь результаты, полученные с использованием соотношений для материала первого порядка, практически полностью совпадают с результатами,

доставляемыми линейной теорией упругости, во всем диапазоне изменения удлинения. С этими данными при малых значениях удлинения совпадают результаты, полученные с использованием соотношений для материала второго порядка. Так, при значении $\Lambda = 0,05$ относительная разница величин силы \bar{P} составляет 8%, $\bar{v} - 0,7\%$, $s - 5\%$. С ростом удлинения эта разница увеличивается, и при достижении $\Lambda \approx 0,4$ относительное изменение толщины пластины λ (15) в зонах угловых точек становится мнимым. При значении $\Lambda \approx 0,7$ эти зоны распространяются практически на всю область, занимаемую пластиной, и дальнейшие вычисления становятся невозможными. Это свидетельствует о нефизичности данного материала, отмечаемой также другими авторами.

Качественно зависимости, приведенные на рис. 4 и 5, согласуются с результатами, полученными в работе [12], где рассмотрены различные меры деформаций для физически линейной задачи о растяжении цилиндрического стержня.

Заключение

1. Уравнения обобщенной плоской задачи для физически линейных материалов первого и второго порядков, порождаемые соответственно тензором кратности удлинений и метрическим тензором, вполне определены для несжимаемого материала.

2. На примере задачи растяжения пластины показана быстрая сходимость приближенных решений, аппроксимируемых аналитическими функциями.

3. В задаче растяжения-сжатия пластины решение линейной теории упругости оказывается ближе к истинному, чем решения, построенные с использованием геометрически нелинейных соотношений и физически линейного закона. Это объясняется тем, что в данной задаче деформации и углы поворота оказываются одного порядка, а малость деформаций влечет за собой малость перемещений. Отклонение поведения решения от линейного связано именно с физической нелинейностью.

Автор выражает искреннюю благодарность С. А. Халилову за ряд ценных замечаний.

Литература

1. Ляв, А. Математическая теория упругости [Текст] / А. Ляв. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 676 с.
2. Кутилин, Д.И. Теория конечных деформаций [Текст] / Д.И. Кутилин. – М.: Гостехиздат, 1947. – 275 с.
3. Новожилов, В.В. Теория упругости [Текст] / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 372 с.
4. Грин, А. Большие упругие деформации и не-

линейная механика сплошной среды [Текст]/ А. Грин, Дж. Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 456 с.

5. Лурье, А.И. *Нелинейная теория упругости* [Текст]/ А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

6. Черных, К.Ф. *Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах* [Текст]/ К.Ф. Черных. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1986. – 336 с.

7. Коробейников, С.Н. *Нелинейное деформирование твердых тел* [Текст]/ С.Н. Коробейников. – Новосибирск: СО РАН, 2000. – 262 с.

8. Черных, К.Ф. *Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин* [Текст]/ К.Ф. Черных. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 288 с.

9. Садаков, О.С. *Использование круга Мора для решения задачи полярной декомпозиции при плоском*

напряженном состоянии [Текст]/ О.С. Садаков, А.О. Щербакова, С.И. Шульженко // *Серия «Математика. Механика. Физика»: Вестник ЮУрГУ. Выпуск 2. – 2010. – № 9. – С. 21 – 26.*

10. Хилл, Р. *Об определяющих неравенствах для простых материалов* [Текст]/ Р. Хилл // *Механика : периодический сборник переводов иностранных статей. – М.: Мир, 1969. – Вып. 4(116). – С. 94 – 109.*

11. Оден, Дж. *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред* [Текст]/ Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

12. Farahani, K. *Hyper-elastic constitutive equations of conjugate stresses and strain tensors for the Seth–Hill strain measures* [Text]/ K. Farahani, H. Bahai // *International Journal of Engineering Science. – 2004. – V. 42. – P. 29 – 41.*

Поступила в редакцию 23.04.2012

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высшей математики А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНО ТА ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

В.Б. Минтюк

Задача узагальненого плоского напруженого стану при кінцевих переміщеннях формулюється для фізично лінійних матеріалів першого та другого порядків, а також для фізично нелінійного матеріалу, що не стискається, Муні. Всі рівняння, необхідні для розв'язання фізично лінійних задач, виявляються цілком визначеними для матеріалу, який не стискається, що дозволяє провести порівняльний аналіз розв'язків всіх поставлених задач. На прикладі задачі розтягнення тонкої пластини показано швидко збіжність наближених розв'язків, побудованих методом Рітца. За результатами досліджень зроблено висновок про те, що використання геометрично лінійних співвідношень і фізично лінійного закону не уточнює результати лінійної теорії пружності.

Ключові слова: узагальнений плоский напружений стан, міра деформації, фізично та геометрично нелінійна задача.

RESEARCH OF GEOMETRICALLY AND PHYSICALLY NONLINEAR GENERALIZED PLANE STRESS

V.B. Mintyuk

The problem of generalized plane stress state with finite displacements is formulated for physically linear material of the first and second orders, as well as for physically nonlinear Mooney's incompressible material. Resolving equations of physically linear materials are found to be fully determined for an incompressible material, which allows a comparative analysis of solutions to all assigned tasks. By using the example of thin plate stretching problem the rapid convergence of approximate numerical solutions constructed by means of Ritz method is shown. Due to the results of the current research the conclusion is made that application of geometrically nonlinear equations with linear constitutive law only makes the error of linear elasticity theory being worse.

Keywords: generalized plane stress state, measure of strain, materially and geometrically nonlinear problem.

Минтюк Виталий Борисович – канд. техн. наук, докторант кафедры прочности летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.