УДК 532.516

И.Т. СЕЛЕЗОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Приведена постановка задачи динамической устойчивости упругой пластины, защемленной в плоском экране и обтекаемой сверху сжимаемой газообразной средой с постоянной скоростью. При обтекаемой критической скорости такая система может быть динамически неустойчивой. Аналитическое решение задачи построено применением интегрального преобразования Лапласа и переходом к оригиналу посредством формулы обращения Римана – Меллина и леммы Жордана. В результате из рассмотрения задачи на собственные значения определена и построена граница динамической устойчивости.

Ключевые слова: *сжимаемый газ, упругая пластина, динамическая устойчивость, преобразование Лапласа*

Прежде всего, отметим фундаментальный вклад выдающегося ученого математика-механика Н.Е. Жуковского в развитие теории движения жидких и газообразных сред.

Центральное место в моделировании панельного флаттера занимает определение оператора аэродинамического взаимодействия с колеблющейся границей, что представляет собой нетривиальную задачу. Поэтому достигнутый прогресс в области панельного флаттера связан с применением поршневой теории, аппроксимирующей этот оператор простым соотношением при больших числах Маха. Достижения в этой области отражены в обзорах [1-3] и обстоятельно изложены в монографии [4]. Получила также развитие теория первого приближения [5].

Состояние вопроса в области панельного флаттера и аэрогидроупругости отражено в работах [1 - 6]. Известные, получившие наибольшее распространение, упрощенные теории имеют ограниченные пределы применимости. Например, поршневая теория применима при больших M, а квазистационарная теория – при малых Sh. Точное решение задачи панельного флаттера было получено в рамках поршневой теории и на основе квазистационарного приближения.

Решения задач панельного флаттера в точной постановке для бесконечной пластины представлены в работах [6, 7].

Здесь рассматривается в точной постановке в рамках теории малых возмущений задача аэроупругости для протяженной в боковом направлении пластины, защемленной по двум кромкам поперек потока $x = 0$ и $x = 1$ и обтекаемой с одной стороны потоком сжимаемого газа в области Ω^f.

Задача рассматривается в исходной невозмущенной системе прямоугольных декартовых координат (x, y, z).

Область, занимаемая пластиной, $\Omega^p = \{(x, y, z): 0 \le x \le l,\ y = 0,\ -\infty < z < \infty\}$. Область течения жидкости над пластиной $\Omega^f = \{(x, y, z): (-\infty < x < 0,\ 0 \le x \le l,\ 0 < x < \infty),$ $0 \le y < \infty,\ -\infty < z < \infty\}$. В этом случае, несмотря на то, что через защемленные края упругие возмущения не передаются, аэроупругие взаимодействия имеются во всей области, занимаемой пластиной Ω^p.

Предполагается, что в невозмущенном состоянии по обе стороны панели давление равно ρ_0 и что отсчет областей производится от срединной поверхности пластины, т.е. влияние ее толщины не учитывается. Движение газа описывается уравнениями Эйлера в предположении адиабатичности течения, а движение пластины - уравнениями классической теории изгибных колебаний пластин Кирхгофа. На поверхности пластины удовлетворяются условия непроницаемости, на бесконечности - условия затухания возмущений.

После линеаризации исходных уравнений и граничных условий и выделения гармонической части $e^{i\Omega t}$ в решении получим систему уравнений в безразмерном виде относительно функций $\rho = \rho(x, y)$, $v_x = v_x(x, y)$, $v_y = v_y(x, y)$, $w = w(x)$ в области $y > 0$

$$i\Omega\cdot Sh\cdot\rho+\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,$$
$$i\Omega\cdot Sh\cdot v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{1}{M^2}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0, \qquad (1)$$
$$i\Omega\cdot Sh\cdot v_y+\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{1}{M^2}\frac{\partial\rho}{\partial y}=0,$$

в области $y=0$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\Omega^2 w+\lambda\rho(x,0)=0,$$

с граничными условиями

$$v_y(x,0)=i\Omega Sh\cdot w+\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\rho(x,\infty)=v_x(x,\infty)=v_y(x,\infty)=0, \qquad (2)$$
$$w(0)=w(1)=\frac{\partial w(0)}{\partial x}=\frac{\partial w(1)}{\partial x}=0,$$

где v_x и v_y - компоненты вектора возмущенной скорости;

ρ -возмущенная плотность;

w - прогиб пластины;

h и l - толщина пластины и расстояние между опорами;

ρ_p, E и ν - плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины;

ρ_0, v_0 и a_0 - плотность, скорость потока и скорость звука в невозмущенном состоянии;

Ω - комплексная частота;

$i=\sqrt{1}$ - мнимая единица;

$M=v_0/a_0$ - число Маха;

$Sh=h(v_0 l)^{-1}\sqrt{E/\left[12\rho_p\left(1-\nu^2\right)\right]}$ - число Струхаля;

$\lambda=\rho_0 a_0^2 l^3/D$; $D=Eh^3/\left[12\left(1-\nu^2\right)\right]$ - цилиндрическая жесткость.

Обезразмеривание произведено по следующим характерным величинам: плотность потока - по ρ_0, скорость - по v_0, поперечный прогиб и координаты - по l, время – по $T=l^2h^{-1}\sqrt{12\rho_p\left(1-\nu^2\right)/E}$.

После несложных преобразований из (1) и (2) получаем следующую краевую задачу для функции $\rho(x,y)$ в области $y>0$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}-B^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-2i\,Sh\,\Omega M^2\frac{\partial\rho}{\partial x}+(Sh\Omega M)^2\rho=0,$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial y}(x,0)=-M^2\left(iSh\Omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w, \qquad (3)$$
$$\rho(x,\infty)=0,\quad B^2=M^2-1.$$

При $y<0$ $\rho(x,0)=0$, что позволяет применить преобразование Лапласа. Полагая, $R(x,p)=\int_0^\infty e^{-py}\rho(x,y)dy$ приведем первое уравнение (3) к виду

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+2iSh\Omega\frac{M^2}{B^2}\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{(Sh\Omega M)^2+p^2}{B^2}R=$$
$$=\frac{1}{B^2}\left[p\cdot\rho(x,0)-M^2\left(iSh\Omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w(x)\right]. \qquad (4)$$

Общее решение уравнения (4) записывается в виде

$$R=C_1e^{s_1x}+C_2e^{s_2x}+R^*, \qquad (5)$$

где C_1 и C_2 - произвольные константы;

s_1 и s_2 - корни характеристического уравнения

$$s^2+2iSh\Omega\frac{M^2}{B^2}s-\frac{(Sh\Omega M)^2+p^2}{B^2}=0, \qquad (6)$$

а R^* - некоторое частное решение уравнения (4).

Так как мы ищем решение, затухающее на бесконечности, значит показатель степени роста функции $\rho(x,y)$ при $y\to\infty$ должен быть не положительным $(\mathrm{Re}s_1\le\mathrm{Re}s_2)$, поэтому изображение $R(x,p)$ должно быть аналитической функцией в области. Первый и второй член в формуле (5) не удовлетворяют этому условию (s_1 и s_2 являются двухзначной функцией от ρ и одна из точек ветвления располагается в правой полуплоскости комплексного переменного p), поэтому мы вправе положить $C_1=C_2=0$. Таким образом, нам необходимо теперь решить следующую систему уравнений

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\Omega^2 w+\left[\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}R^*(x,p)e^{py}dp\right]\Bigg|_{y=0}=0,$$
$$\frac{\partial^2 R^*}{\partial x^2}+2iSh\Omega\frac{M^2}{B^2}\frac{\partial R^*}{\partial x}-\frac{(Sh\Omega M)^2+p^2}{B^2}R^*= \qquad (7)$$
$$=\left[\frac{p}{2\pi iB^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}R^*(x,p)e^{py}dp\right]\Bigg|_{y=0}-\frac{M^2}{B^2}\left(iSh\Omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w.$$

Далее будем искать решение для поперечного прогиба в виде

$$w(X)=W_1e^{\alpha_1x}+W_2e^{\alpha_2x}+W_3e^{\alpha_3x}+W_4e^{\alpha_4x},\quad x\in(-\infty,\infty) \qquad (8)$$

где W_j, $(j=1,2,3,4)$ - произвольные константы, определяемые, как обычно, из граничных условий. Показатели α_j, $j=1-4$, определяющие форму колебания пластины, находятся из уравнения (7) следующим образом: исключая интеграл из уравнений (7), получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \Omega^2 w + \left[\frac{\lambda}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} R^*(x,p)e^{py}dp\right]\Bigg|_{y=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 R^*}{\partial x^2} + 2iSh\Omega\frac{M^2}{B^2}\frac{\partial R^*}{\partial x} - \frac{(Sh\Omega M)^2 + p^2}{B^2}R^* = \tag{9}$$

$$= -\frac{p}{\lambda B^2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \Omega^2 w\right) - \frac{M^2}{B^2}\left(iSh\Omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w.$$

Следовательно, решение $R^*(x,p)$ можем взять в аналогичном (8) виде

$$R^* = \sum_{j=1}^{4} R_j^* e^{\alpha_j x}, \tag{10}$$

где R_j^* легко определяются из уравнения (9)

$$R_j^* = -W_j\left\{p\left(\alpha_j^4 - \Omega^2\right) + \lambda M^2\left(iSh\Omega + \alpha_j\right)^2\right\}\times$$
$$\times\left\{B^2\alpha_j^2 + 2Sh\Omega M^2\alpha_j - \left[(Sh\Omega M)^2 + p^2\right]\right\}^{-1}. \tag{11}$$

Далее используя формулу обращения Римана - Меллина [7], лемму Жордана и теорему о вычетах, получим выражение для $\rho(x,y)$ после подстановки, которого в четвертое уравнение (1), учитывая (8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях e^{α}, x, выводим окончательное условие для определения четырех показателей

$$\alpha_j^4 - \Omega^2 + \lambda M^2\frac{\left(iSh\Omega + \alpha_j\right)^2}{\sqrt{M^2\left(\alpha_j + iS\Omega\right)^2 - \alpha_j^2}} = 0. \tag{12}$$

Полагая число Струхаля малым, и разложив третий член уравнения (12) в ряд Тейлора, отбросив члены второго порядка малости и выше, получим квазистационарное приближение первого порядка для бесконечной пластины, аналогичное аппроксимации для пластины конечной протяженности.

Уравнение (12) переходит при этом в следующее

$$\alpha_j^4 - \Omega + \frac{\lambda M^2}{\sqrt{M^2 - 1}}\zeta\left(\alpha_j + iSh\Omega\frac{M^2 - 2}{M^2 - 1}\right) = 0, \tag{13}$$

где

$$\zeta = \begin{cases} +I, & \text{если} \quad \mathrm{Re}\,\alpha_j > 0; \\ -I, & \text{если} \quad \mathrm{Re}\,\alpha_j < 0. \end{cases}$$

Положив, кроме того, $M \gg 1$, получим приближения "поршневой" теории для бесконечной пластины. Уравнение (12) при этом переходит в следующее

$$\alpha_j^4 - \Omega + \lambda M\zeta\left(\alpha_j + iSh\Omega\right) = 0. \tag{14}$$

Теперь, подставляя решение (8) в третье граничное условие (2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных W_j, $j = 1 \div 4$. Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Это единственное условие для определения собственных частот (вообще говоря, комплексных) колебания пластины в потоке газа.

Плоская форма равновесия пластины будет устойчивой, если все корни этого уравнения будут лежать в верхней полуплоскости комплексного переменного Ω.

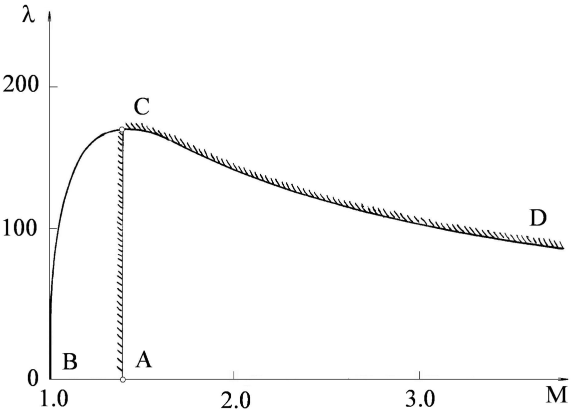

Рис. 1. Граница динамической устойчивости $Sh = 10^{-3}$

На рисунке 1 приведены результаты расчетов границы динамической устойчивости при числе Струхаля $Sh = 10^{-3}$. Наблюдаются две характерные границы устойчивости: AC соответствует переходу всех собственных значений на нижнюю полуплоскость Ω (слабый флаттер [2]), CD соответствует случаю взаимодействия смежных форм колебаний.

Расширение области динамической устойчивости может быть достигнуто при учете электропроводности течения на основе уравнений магнитной гидродинамики [8]

Автор выражает благодарность В.Г. Матвееву за участие в работе и проведение расчетов.

Литература

1. Григолюк, Э.И. Флаттер панелей и оболочек [Текст] / Э.И. Григолюк, Р.Е., Лампер, Л.Г Шандаров // Сб. Механика. - М.: Ин-т научной информации. - 1965. – С. 34-90.

2. Dowell, E.H. Panel flutter: a review of the aeroelastic stability of plates and shells [Text] / E.H. Dowell // AIAA. – 1970. – 8, N 3. – P. 385-399.

3. Новичков, Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек [Текст] / Ю.Н Новичков // Механика деформи-

руемого твердого тела. Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ. – 1978. – № 11. – С. 67-122.

4. *Болотин, В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. [Текст] / В.В. Болотин. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 340 с.*

5. *Dugundji, J. Theoretical considerations of panel flutter at high supersonic Mach numbers. [Text] / J. Dugundji // AIAA. – 1966. – 4, N 7. – P. 1257-1266.*

6. *Miles, Y.W. On the aerodynamic stability of thin panels [Text] / Y.W. Miles // J. Aeronautical Sciences. – 1956. – 23, N 8. – P. 771-780.*

7. *Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной. [Текст] / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1974. – 320 с.*

8. *Selezov, I.T. On some transformations and approximations of magnetohydrodynamic equations [Text] / I.T. Selezov // Int. J. Fluid Mechanics Research. - 2010. – 37, N 4. – P. 382-389.*

Поступила в редакцию 5.06.2012

Рецензент: главн. научн. сотр., д-р техн. наук, профессор кафедры аэрогидродинамики Ю.А. Крашаница, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

ПРО ВЗАЄМОДІЮ ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З ПОТОКОМ ГАЗУ, ЩО СТИСКАЄТЬСЯ

І.Т. Селезов

Наведено постановку задачі динамичної стійкості пружної пластини, яка затиснута в плоскому екрані і обтічна зверху газоподібним середовищем, що стискається, зі сталою швидкістю. При обтічній критичній швидкості така система може бути динамічно нестійкою. Аналітичний розв’язок задачі побудовано за застосуванням інтегрального перетворення Лапласа та переходом до оригіналу за допомогою формули перетворення Рімана – Мелліна и лемми Жордана. Внаслідок, з розгляду задачі на власні значення визначено та побудовано межу динамічної стійкості.

Ключові слова: стисливий газ, пружна пластина, динамічна стійкість, перетворення Лапласа

ON INTERACTION OF ELASTIC PLATE WITH COMPRESSIBLE GASE STREAM

I.T. Selezov

The statement of a problem of dynamic stability of the elastic plate clamped in the flat screen and flowed round from above by the compressible gaseous medium with a constant velocity is presented. At a streamline critical velocity such a system can be dynamically unstable. The analytical solution of a problem is constructed by application of the Laplace integral transformation and passage to an original by means of an inversion formula of the Riemann – Mellin inversion formula and the Jordan lemma . As a result, on the basis of the eigenvalue problem the boundary of a dynamic stability is determined and shown.

Key words: compressible gas, elastic plate, dynamic stability, Laplace transforms

Селезов Игорь Тимофеевич – д-р физ.-мат наук, проф., зав. отделом гидродинамики волновых процессов, Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина, e-mail: selezov@uninet.kiev.ua.