УДК 519.6:533.6

М.Н. ГРИЗУН[1], С.В. ЕРШОВ[2]

[1] ***Национальный технический университет «ХПИ», Украина***
[2] ***ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАНУ, Украина***

РАСЧЕТ ДВУМЕРНЫХ НЕВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НЬЮТОНА

Для двумерных уравнений газовой динамики в форме Эйлера построена неявная итерационная разностная схема на основе метода Ньютона. В предложенной схеме исходные уравнения аппроксимируются полностью неявно без использования приближенных методов линеаризации и факторизации. Пространственные производные приближаются явными схемами повышенной точности: TVD, ENO, TVD-ISNAS. Для аппроксимации производных по времени используется переменный шаблон, включающий двух- и трехточечные формулы. Исследованы порядок аппроксимации и устойчивость построенной схемы. Проведено численное исследование, которое показало согласование результатов, полученных по новой неявной схеме, с физическими представлениями о течениях в решетках и с решениями, построенными в CFD решателе F.

Ключевые слова: *уравнения Эйлера, неявная схема, метод Ньютона, TVD, ENO, TVD-ISNAS, порядок аппроксимации, устойчивость.*

Введение

Сегодня важную роль в развитии современной науки и промышленности играет математическое моделирование физических процессов в решетках турбомашин. Разработка высокоэффективных и более точных численных методов решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса, описывающих течение жидкости и газа, является необходимой в свете существования большого количества различных классов задач гидроаэродинамики. В последнее время при решении таких задач часто использовались неявные разностные схемы, построенные на основе методов переменных направлений [1], LU-разложения [2], итерационных методов Гаусса-Зейделя [3], однако их применение сопряжено с возникновением дополнительных погрешностей, которые влияют на устойчивость схемы, на точность аппроксимации, или же имеют низкое быстродействие. Вышеприведенные факты определяют актуальность построения устойчивых, более точных и эффективных неявных схем, которые позволяют проводить вычисления с большими шагами по времени.

1. Постановка задачи

В предложенной работе рассматривается дозвуковое течение невязкого нетеплопроводного газа в решетке профилей, которое может быть описано системой уравнений в форме Эйлера. Введена криволинейная система координат:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y); \\ \eta = \eta(x, y); \end{cases}$$

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi ,$$

где ξ, η – криволинейные координаты;

x, y – декартовы координаты;

J – Якобиан преобразования координат;

x_ξ, x_η, y_ξ, y_η – метрические коэффициенты.

Система уравнений Эйлера записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial QJ}{\partial t} + \frac{\partial F^\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial F^\eta}{\partial \eta} = 0, \qquad (1)$$

где t – время;

$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}$ – вектор консервативных переменных;

ρ – плотность;

u, v – декартовы компоненты скорости;

$e = \dfrac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \dfrac{u^2 + v^2}{2}$ – полная энергия единицы массы;

p – давление;

γ – показатель адиабаты;

$U^\xi = \left(u y_\eta - v x_\eta\right) / J$, $\quad U^\eta = \left(-u y_\xi + v x_\xi\right) / J$ – контравариантные компоненты вектора скорости;

$$F^{\xi} = J\begin{pmatrix} \rho U^{\xi} \\ \rho u U^{\xi} + p\,y_{\eta}/J \\ \rho v U^{\xi} - p\,x_{\eta}/J \\ (\rho e + p)U^{\xi} \end{pmatrix}, \quad F^{\eta} = J\begin{pmatrix} \rho U^{\eta} \\ \rho u U^{\eta} - p\,y_{\xi}/J \\ \rho v U^{\eta} + p\,x_{\xi}/J \\ (\rho e + p)U^{\eta} \end{pmatrix}$$

– векторы потоков.

В уравнениях (1) потоки F^{ξ} и F^{η} являются функциями консервативных переменных Q: $F^{\xi} = F^{\xi}(Q)$, $F^{\eta} = F^{\eta}(Q)$. Следовательно, для системы уравнений (1) можно получить матрицы Якоби размерностью 4×4 вида

$$A^{\xi} = \frac{\partial F^{\xi}}{\partial Q} = Ay_{\eta} - Bx_{\eta},$$

$$A^{\eta} = \frac{\partial F^{\eta}}{\partial Q} = -Ay_{\xi} + Bx_{\xi}.$$

Собственные значения матриц Якоби являются вещественными, а сами матрицы Якоби имеют левые и правые собственные векторы (система уравнений Эйлера является гиперболической по времени). Поэтому матрицы Якоби системы уравнений (1) могут быть диагонализированы следующим преобразованием

$$L^{\xi}A^{\xi}\left(L^{\xi}\right)^{-1} = \Lambda^{\xi}, \; L^{\eta}A^{\eta}\left(L^{\eta}\right)^{-1} = \Lambda^{\eta},$$

где L^{ξ}, L^{η} – матрицы, строки которых являются линейно-независимыми левыми собственными векторами матриц Якоби A^{ξ} и A^{η} соответственно;

$\left(L^{\xi}\right)^{-1}$, $\left(L^{\eta}\right)^{-1}$ – матрицы, в качестве столбцов которых выбраны линейно-независимые правые собственные вектора матриц Якоби A^{ξ} и A^{η} соответственно.

В качестве расчетной области рассматривается один межлопаточный канал решетки профилей. На входной границе расчетной области заданы параметры заторможенного потока: полное давление, полная температура; и угол, определяющий направление потока. На выходной границе фиксируется статическое давление. На линиях, отделяющих рассматриваемый межлопаточный канал от соседних каналов, предполагается выполнение условия периодичности потока. На твердых стенках выставляется условие непротекания. Во всей расчетной области начальные газодинамические параметры заданы постоянными и равными соответствующим величинам в заторможенном потоке.

2. Построение итерационной схемы

Введем следующее обозначение для левой части системы уравнений (1):

$$R(Q) = \frac{\partial QJ}{\partial t} + \frac{\partial F^{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial F^{\eta}}{\partial \eta}.$$

К нелинейной системе (1) можно применить метод Ньютона в такой форме

$$\frac{\partial R\left(Q^{k}\right)}{\partial Q}\left(Q^{k+1} - Q^{k}\right) = -R\left(Q^{k}\right), \qquad (2)$$

где k – номер итерации.

Производная $\dfrac{\partial R\left(Q^{k}\right)}{\partial Q}$ вычисляется приближенно, с учетом введенных ранее обозначений для матриц Якоби. Итерационная формула Ньютона (2) для системы (1) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\delta Q)^{k+1} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\left(A^{\xi}\right)^{k}\delta Q^{k+1}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(A^{\eta}\right)^{k}\delta Q^{k+1}\right) = -\left(\frac{\partial QJ}{\partial t} + \frac{\partial F^{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial F^{\eta}}{\partial \eta}\right)^{k}, \qquad (3)$$

где $\delta Q^{k+1} = Q^{k+1} - Q^{k}$ – приращение параметров на одной итерации.

При дискретизации производных по времени используется переменный шаблон аппроксимации: выбирается трехслойная или двухслойная обратная разностная формула. Производные по пространству в правой части итерационной формулы (3) аппроксимируются полностью неявно. Конкретный вид аппроксимации пространственных производных будет рассмотрен ниже. После интегрирования равенства (3) по объему двухмерной ячейки и выполнения ряда преобразований можно получить следующую неявную итерационную разностную схему:

$$\left[I + \frac{1}{1+\theta}\frac{\Delta t_{ij}}{J_{ij}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}A^{\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}A^{\eta}\right)_{ij}^{n+1,k}\right]\delta Q_{ij}^{n+1,k+1} = -\Delta Q_{ij}^{n+1,k} + \frac{\theta}{1+\theta}\Delta Q_{ij}^{n} - \frac{1}{1+\theta}\frac{\Delta t_{ij}}{S_{ij}} \times \left\{\Delta F^{\xi} + \Delta F^{\eta}\right\}_{ij}^{n+1,k}, \qquad (4)$$

где $\theta = \begin{cases} 1/2 \\ 0 \end{cases}$ – параметр, определяющий способ аппроксимации временных производных;

Δt_{ij} – шаг по времени;

S_{ij} – площадь ячейки;

n – номер временного слоя;

$\Delta Q_{ij}^{n} = Q_{ij}^{n} - Q_{ij}^{n-1}$ – приращение параметров на одном шаге по времени;

$\Delta Q_{ij}^{n+1,k} = Q_{ij}^{n+1,k} - Q_{ij}^{n}$ – суммарное приращение в итерационном процессе на одном шаге по времени;

ij – индекс, обозначающий привязку к некоторой ячейке разностной сетки.

Потоковые члены в правой части схемы (4) вычисляются по такой формуле:

$$\left\{\Delta F^{\xi}+\Delta F^{\eta}\right\}_{ij}^{n+1,k}=$$

$$=\left(F^{\xi}\right)_{i+1/2j}^{n+1,k}\Delta\eta_{i+1/2j}-\left(F^{\xi}\right)_{i-1/2j}^{n+1,k}\Delta\eta_{i-1/2j}+$$

$$+\left(F^{\eta}\right)_{ij+1/2}^{n+1,k}\Delta\xi_{ij+1/2}-\left(F^{\eta}\right)_{ij-1/2}^{n+1,k}\Delta\xi_{ij-1/2},$$

где $i\pm1/2j$, $ij\pm1/2$ – индексы, обозначающие привязку к середине стороны сеточной ячейки ij;

$\Delta\xi_{ij\pm1/2}$, $\Delta\eta_{i\pm1/2j}$ – длины сторон сеточной ячейки.

Необходимо отметить, что на первой итерации построенная итерационная разностная неявная схема совпадает с классической неявной схемой Бима-Уорминга [4]. Это приводит к тому, что уже на первой итерации схема (4) имеет формально второй порядок аппроксимации по пространству, и добиваться полной сходимости итерационного процесса не нужно.

Для минимизации нефизических осцилляций решения, возникающих при больших шагах по времени используется алгоритм переключения с трехслойной аппроксимации производной по времени на двухслойную, подробно описанный в работе [5].

3. Аппроксимация пространственных производных

Потоковые слагаемые в правой части схемы (4) определяются с помощью решения задачи одномерного распада произвольного разрыва [6] на стороне ячейки в соответствующем пространственном направлении:

$$\left(F^{\xi,\eta}\right)_{m\pm1/2}^{n+1,k}=H\left(Q_{m\pm1/2}^{-},Q_{m\pm1/2}^{+}\right).$$

Здесь $m\pm1/2=\begin{cases}i\pm1/2j\\ ij\pm1/2\end{cases}$ – соответствует номеру середины стороны сеточной ячейки.

Выбор начальных условий $Q_{m\pm1/2}^{-}$, $Q_{m\pm1/2}^{+}$ для задачи распада разрыва определяет способ разностной аппроксимации. Начальные условия вычисляются по формуле

$$Q_{m\pm1/2}^{\mp}=Q_m\pm\frac{\Delta h_m}{2}\left(Q'_m\right)^{\mp},$$

где $\Delta h_m=\begin{cases}\Delta\xi_m^h\\ \Delta\eta_m^v\end{cases}$ – размер сеточного шага в соответствующем криволинейном направлении;

$\left(Q'_m\right)^{\mp}$ – производные восполнения параметров по пространству внутри сеточной ячейки, способ нахождения которых определяет следующие разностные схемы:

$$\left(Q'_m\right)^{\mp}=2\mathrm{minmod}\left(\hat{\Delta}Q_m,\hat{\Delta}Q_{m+1}\right)-$$

TVD схема Годунова-Колгана [7] второго порядка точности;

$$\left(Q'_m\right)^{\mp}=2\mathrm{minmod}\Big(\hat{\Delta}Q_m+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\nabla Q_{m-1},\nabla Q_m\right),\qquad(5)$$

$$\hat{\Delta}Q_{m+1}-\frac{1}{2}\mathrm{minmod}\left(\nabla Q_m,\nabla Q_{m+1}\right)\Big)-$$

ENO схема [8] второго порядка точности;

$$\left(Q'_m\right)^{\mp}=\mathrm{ISNAS}\left(Q\right)^{\mp}=$$

$$=\begin{cases}\Delta Q_0^{\mp}\dfrac{\left(\Delta Q_1^{\mp}\right)^2+3\Delta Q_0^{\mp}\Delta Q_1^{\mp}}{\left(\Delta Q_0^{\mp}+\Delta Q_1^{\mp}\right)^2}, & \Delta Q_0^{\mp}\cdot\Delta Q_0^{\mp}>0-\\ 0, & \Delta Q_0^{\mp}\cdot\Delta Q_0^{\mp}\le0\end{cases}$$

ISNAS схема [9] третьего порядка точности;

где $\min\mathrm{mod}(a,b)=\begin{cases}a,\ |a|<|b| \text{ и } a\cdot b>0\\ b,\ |b|\le|a| \text{ и } a\cdot b>0\\ 0,\ a\cdot b\le0\end{cases}$;

$\hat{\Delta}Q_m=\dfrac{Q_m-Q_{m-1}}{\Delta h_m+\Delta h_{m-1}}$ – приращения по пространству;

$\nabla Q_m=\hat{\Delta}Q_{m+1}-\hat{\Delta}Q_m$;

$\Delta Q_0^{\mp}=2\hat{\Delta}Q_{m+1/2\pm1/2}$;

$\Delta Q_1^{\mp}=2\hat{\Delta}Q_{m+1/2\mp1/2}$.

4. Свойства схем

Установлено, что на гладких решениях неявная итерационная схема (4) при выборе трехточечного шаблона для приближения производной по времени и аппроксимации пространственных производных со вторым или третьим порядком будет аппроксимировать систему уравнений Эйлера (1) со вторым и третьим порядком по пространству соответственно и со вторым порядком по времени. Исследование устойчивости рассмотренной схемы показало возможность проведения расчетов с повышенными шагами по времени.

5. Численное исследование

Выполнены численные исследования предложенной неявной итерационной схемы с различными пространственными аппроксимациями повышенной точности в правой части на решетке профилей Ходсона [10].

На рис. 1 и 2 приведены изолинии числа Маха на тангенциальной поверхности и распределение адиабатического числа Маха вдоль хорды профиля соответственно.

Параметры построены по неявной итерационной схеме (4) данной работы с ENO аппроксимацией (5) потоковых элементов в правой части при числе Куранта, равном 18 на сетке с количеством ячеек 92×120.

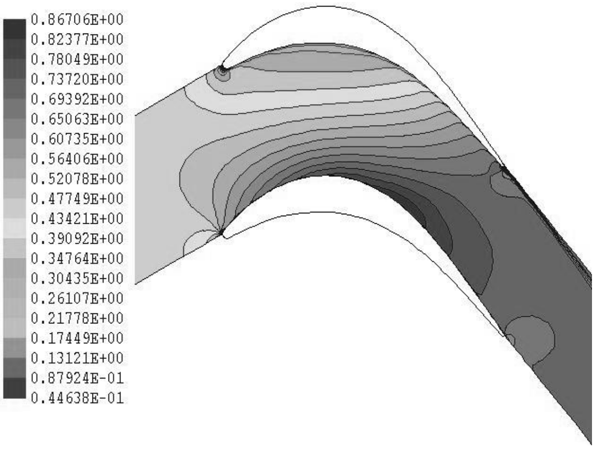

Рис. 1. Изолинии числа Маха на тангенциальной поверхности по схеме данной работы (4) с явной ENO аппроксимацией (5)

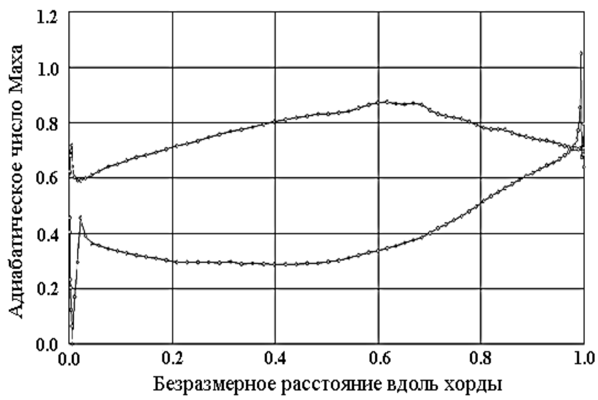

Рис. 2. Распределение адиабатического числа Маха вдоль хорды профиля по схеме данной работы (4) с явной ENO аппроксимацией (5)

Проведенное численное исследование позволяет сделать вывод о согласовании численных результатов с физическими представлениями о процессах течения газа в решетках профилей. С точностью до построения графиков решение, рассчитанное по схеме данной работы, совпадает с решением, полученным в CFD решателе F [11] по известной неявной схеме Бима-Уорминга [4].

Заключение

В настоящей работе на основе метода Ньютона построена неявная итерационная схема на основе явных схем повышенной точности: TVD, ENO, ISNAS – для решения системы уравнений Эйлера. Предложенная схема лишена погрешностей, возникающих с случае применения приближенных методов линеаризации, факторизации и т.д. Приведенный подход построения схемы позволяет добиться второго порядка аппроксимации по времени и второго и выше по пространству на гладких решениях. Добиться уменьшения нефизических осцилляций решения можно за счет использования алгоритма переключения между двух- и трехслойной схемой. Численное исследование показало, что построенная схема имеет более высокое быстродействие и является устойчивой при больших шагах по времени по сравнению с классической схемой Бима-Уорминга. Численные решения по схеме данной работы согласуются с физическими представлениями о процессах, протекающих в решетках профилей. Получено соответствие решений по предложенной схеме с результатами расчета CFD решателем F [11].

Литература

1. *Ковеня, В.М. Метод расщепления в задачах газовой динамики [Текст] / В.М. Ковеня, Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1981. – 304 с.*

2. *Jameson, A. Implicit schemes and LU decompositions [Text] / A. Jameson, E. Turkel // Math. Comp. – V.37, No. 2. – 1981. – P. 385-397.*

3. *Jameson, A. Transonic flow calculations for aircraft [Text] // Lecture Notes in Mathematics, Numerical Methods in Fluid Dynamics / F. Brezzi, ed. – Springer Verlag. – 1985. – P. 156-242.*

4. *Beam, R.M. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations [Text] / R.M. Beam, R.F. Warming // Proc. AIAA 3rd Comput. Fluid Dyn. Conf. – Albuquerque, 1977. – P. 645-649.*

5. *Ершов, С.В. Применение метода Ньютона в неявной схеме для уравнений газовой динамики [Текст] / С.В. Ершов, А.И. Деревянко, М.Н. Гризун // Аэрогидродинамика и аэроакустика: проблемы и перспективы: сб. науч. тр. НАКУ им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2009. – Вып. 3. – С. 72-79.*

6. *Годунов, С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики [Текст] / С.К. Годунов // Математический сборник. –1959. – Т. 47, Вып. 3. – С. 276-306.*

7. *Колган, В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики [Текст] / В.П. Колган // Уч. зап. ЦАГИ. – 1972. – Т. 3, Вып. 6. – С. 68-77.*

8. Harten, A. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes [Text] / A. Harten, S. Osher // SIAM J. Num. Analysis. – 1987. – V. 24, No. 2. – P. 279-309.

9. Zijlema, M. On the construction of a third-order accurate TVD scheme using Leonard's normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains [Text] / M. Zijlema // Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-94-104. – 1994. – 25 p.

10. Hodson, H.P. Three Dimensional Flow in a Low·Pressure Turbine Cascade at Its Design Condition [Text] / H.P. Hodson, R.G. Dominy // Transactions of the ASME, J. of Turbomachinery, ISSN 0889-504X. – V. 109, No. 2. – 1987. – P. 177-185.

11. Ершов, С.В. Развитие программного комплекса расчета пространственных течений в турбомашинах [Текст] / С.В. Ершов // Вестник двигателестроения. – 2011. – Вып. 2. – С. 25-30.

Поступила в редакцию 25.05.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.И. Гнесин, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков.

РОЗРАХУНОК ДВОВИМІРНИХ НЕВ'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДА НЬЮТОНА

М.М. Гризун, С.В. Єршов

Для двовимірних рівнянь газової динаміки у формі Ейлера побудовано неявну ітераційну різницеву схему на основі метода Ньютона. У запропонованій схемі вихідні рівняння апроксимуються повністю неявно без використання наближених методів лінеаризації, факторизації тощо. Просторові похідні наближаються явними схемами підвищеної точності: TVD, ENO, TVD-ISNAS. Для апроксимації похідних по часу використано змінний шаблон, що включає двох- та трьохточкові формули. Досліджено порядок апроксимації та стійкість побудованої схеми. Проведено чисельне дослідження, яке показало узгодження результатів, що отримано за допомогою нової неявної схеми, із фізичними уявленнями про течії у решітках та розв'язками, що побудовані у CFD розв'язувачі F.

Ключові слова: рівняння Ейлера, неявна схема, метод Ньютона, TVD, ENO, TVD-ISNAS, порядок апроксимації, стійкість.

CALCULATION OF TWO-DIMENSIONAL INVISCID FLOWS WITH NEWTON METHOD

M.N. Grizun, S.V. Yershov

The implicit iterative difference scheme based on the Newton method was built for two-dimensional equations of gas dynamics in Euler form. For the proposed scheme the governing equations are approximated fully implicitly without approximate methods of linearization or factorization. Spatial derivatives are approximated with explicit high resolution schemes such as TVD, ENO, TVD-ISNAS. An alternating stencil including two- and three-point formulas are being used for time-derivatives approximation. An order of approximation and stability were investigated for the constructed scheme. Numerical investigation was made, and showed an accordance of the results obtained by the new implicit scheme with physical ideas of cascade flows and solutions calculated with the CFD solver F.

Key words: Euler equations, implicit scheme, Newton method, TVD, ENO, TVD-ISNAS, order of approximation, stability.

Гризун Мария Николаевна – аспирант кафедры газогидромеханики и тепломассобомена Национального технического университета «ХПИ», Харьков, Украина, e-mail: masha.grizun@gmail.com, masha_grizun@ukr.net.

Ершов Сергей Владимирович – д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина, e-mail: yershov@ipmach.kharkov.ua, sergiy.v.yershov@gmail.com.