

УДК 631.7.04-197:631:7.019.13

**В.О. ПОВГОРОДНИЙ***Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина***ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ**

*Экспериментально – теоретическое исследование термоупругих характеристик материалов приборов, а также элементов турбостроения осуществляется исходя из решения обратной задачи термоупругости. Обратная задача термоупругости решается с использованием уравнения Фредгольма и гранично-элементный аналог ядра интегрального оператора позволяет заменить эксперимент. В качестве примера рассмотрим неметаллические материалы, используемые для изготовления элементов турбин. Результаты расчета можно использовать как неотъемлемую часть проектирования объектов приборостроения и энергетического машиностроения (материалов паровых и газовых турбин), а также расчета их ресурса и выбора системы охлаждения.*

**Ключевые слова:** температура, обратная задача, термоупругость, материал.

**Введение**

При исследовании тепловых процессов в энергетике, металлургии и других областях техники часто возникает проблема идентификации внутренних параметров тепловых систем. Для идентификации характеристик материалов могут быть применены как экспериментальные методы [1, 2], так и теоретические, основанные на решении коэффициентных обратных задач механики деформируемого твердого тела [3 – 6].

Аппарат обратных задач, в соответствии с общей стратегией экстремальных методов, позволяет осуществлять идентификацию параметров в результате численного моделирования рассматриваемого процесса и поиска минимума функционала-невязки. Главной проблемой применения такого подхода является необходимость формулирования операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов и измеряемыми величинами.

В работе [4] получены явные выражения градиентов функционалов–невязок для широкого множества многокомпонентных распределенных систем различных параметров и параметров различных внешних воздействий, используемые в градиентных методах идентификации. Между тем, известные решения коэффициентных обратных задач [5, 6] включают, как правило, малое число определяемых параметров и базируются на решении стационарных задач теплопроводности при однородном нагреве. Однако известно, что диаграммы  $\sigma - \varepsilon$ , полученные при однородном и неоднородном нагружениях, существенно отличаются друг от друга. Можно пред-

положить, что теплофизические и механические свойства материала в нестационарных неоднородных задачах являются не параметрами, а функциями температуры, что не позволяет определять их с помощью итерационных процессов [4] в силу их плохой обусловленности.

В настоящей работе предлагается подход, позволяющий идентифицировать изменение термомеханических и физических свойств материала в зависимости от температуры в задачах термоупругости, когда поле температур существенно неоднородно по объему материала.

**Постановка задачи.** Пусть в трехмерной области

$$\Omega = \{X | X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, 0 \leq x_1 \leq a; 0 \leq x_2 \leq b; 0 \leq x_3 \leq h\}$$

определена система термоупругого деформирования:

$$\sigma_{ij,j}(\alpha(T), T, u_i) = F_i, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad (1)$$

связь между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  задается в виде:

$$\sigma_{ij}(\alpha(T), T, u_i) = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T)(T - T_0)]\delta_{ij}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3k} + 3\alpha(T)(T - T_0); \quad \lambda = \frac{\nu E(T)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)};$$

$$\mu = \frac{E(T)}{2(1 + \nu)}; \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu,$$

связь между деформациями  $\varepsilon_{ij}$  и перемещениями задается в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

здесь  $F_i$ ,  $u_i$  – проекции внешних сил и перемещений на оси  $Ox_i$ ;  $\alpha(T)$  – коэффициент температурного расширения;  $\lambda$ ,  $\mu$  – коэффициенты Ляме;  $k$  – модуль объемного расширения,  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E(T)$  – модуль Юнга;  $T$ ,  $T_0$  – конечная и начальная температура тела.

В области  $\Omega$  изменение температуры  $T$  удовлетворяет уравнению:

$$(\lambda_T(T)T)_{,i} + q = C(T)\dot{T}, \quad (3)$$

где  $\lambda_T(T)$  – коэффициент теплопроводности;  $q$  – мощность теплового источника;  $C(T)$  – удельная теплоемкость.

В начальный момент тело не нагрето и не деформировано. На поверхностях  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$  заданы условия закрепления. На поверхностях  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$  сформулированы граничные условия 2-го и 3-го рода:

$$\left. \frac{\partial T(x_1, x_2, t)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0; \quad \lambda_T(T) \left. \frac{\partial T(\bar{\Omega}, t)}{\partial x_3} \right|_{x_3=h} = q(t), \quad (4)$$

где  $\bar{\Omega}$  – область воздействия теплового потока.

Будем предполагать, что тело нагрето настолько, что физические  $E(T)$  и теплофизические характеристики материала  $\alpha(T)$ ,  $\lambda_T(T)$ ,  $C(T)$  изменяются существенно, но при этом процесс деформирования остается упругим.

Считаем, что на поверхности  $x_3 = 0$  в точках  $X_n$ ,  $n = \overline{1, N}$  известны (измеряются) значения нормальных перемещений и температур:

$$\begin{aligned} u_3(X_n) &= u_3^*, \\ T(X_n) &= T^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение обратной задачи предполагает восстановление вектор-функции параметров

$$H = \{E(T), \alpha(T), \lambda_T(T), C(T)\},$$

компонентами которого являются функции, характеризующие физические и теплофизические характеристики материала по известным следам (5), (6) решения прямой задачи.

Функционал-невязка будет иметь вид аналогично [4]:

$$\begin{aligned} J = \sum_{n=1}^N \left( u_3(X_n, H) - u_3^*(X_n) \right)^2 + \\ + \sum_{n=1}^N \left( T(X_n, H) - T^*(X_n) \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

## Метод решения

Для определения компонент вектора нормальных перемещений  $u_3(X_n, H)$  и температур  $T(X_n, H)$  необходимо построить решение прямой задачи (1) – (4). Совместно с заданными (измеренными) векторами  $u_3^*(X_n)$ ,  $T^*(X_n)$  это позволяет сформировать вектора невязок

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_{3_{in}}, H) &= \left( u_3(X_n, H) - u_3^*(X_n) \right), \\ \varepsilon(T_n, H) &= \left( T(X_n, H) - T^*(X_n) \right), \end{aligned}$$

необходимые для формирования функционала невязки (6).

Параметризация всех неизвестных функций задачи осуществляется путем их аппроксимации с помощью метода граничных элементов (МГЭ).

## Результаты вычислительного эксперимента

Предложенный подход был применен для восстановления теплофизических  $\alpha(T)$ ,  $\lambda_T(T)$ ,  $C(T)$  и физических  $E(T)$  характеристик деформируемой тонкостенной системы из решения обратной задачи термоупругости.

В качестве объекта исследования рассматривалась пластина толщины  $h = 0.2$  м, изготовленная из стали 65С2ВА. Для описания материала использовались таблично представленные зависимости значений физических и теплофизических характеристик от температуры [7], для выполнения идентификации эти зависимости аппроксимированы полиномами:

$$\begin{aligned} E(T) &= 211.2091 - 0.0301 \cdot T - 0.0001 \cdot T^2 \quad (\text{ГПа}); \\ \lambda_T(T) &= 26.7264 + 0.0052 \cdot T \left( \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right); \\ \alpha(T) &= 12.1335 + 0.0034 \cdot T \left( 10^{-6} \cdot \frac{1}{\text{К}} \right); \\ C(T) &= 484.5748 + 0.0326 \cdot T + 0.0003 \cdot T^2 \left( \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Для формирования полей заданных перемещений  $u_3^*(X_n)$  и температур  $T^*(X_n)$  использовались решения прямых задач термоупругости при заданных в виде (28) значениях искомых параметров.

Пластина испытывает неоднородный нагрев, на поверхности  $x_3 = h$  задан тепловой поток  $q$ , действующий на некоторую ограниченную область  $\bar{\Omega}$ :

$$\lambda_T(T) \left. \frac{\partial T(\bar{\Omega})}{\partial x_3} \right|_{x_3=h} = q; \quad \text{поверхность } x_3 = 0 \text{ тепло-}$$

изолирована. Рассматривались варианты нагрева пластины, когда тепловой поток воздействует на область в центре пластины и область, расположенную ближе к верхнему краю пластины.

Аппроксимация неизвестных характеристик материала выполнялась на сетке так, что компонентами вектора искомым параметров обратной задачи являются значения параметров в зафиксированных областях  $\Omega_p$ , а, следовательно, вектор параметров может быть представлен в виде

$$H = \{E_1, \alpha_1, \lambda_{T_1}, C_1, \dots, E_p, \alpha_p, \lambda_{T_p}, C_p\}, p = \overline{1, P}.$$

Для каждой выделенной области можно вычислить значение температуры  $T_p$  из решения задачи теплопроводности.

Далее проводилась идентификация вектора неизвестных параметров. В качестве начального приближения были выбраны постоянные значения теплофизических характеристик:

$$E = 210 \text{ ГПа}; \lambda_T = 27 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}};$$

$$C = 475 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \alpha = 11.7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{К}}.$$

Анализируя полученные результаты, видим, что в вектор  $H^2$  помещены параметры, значения которых практически совпадают с постоянными характеристикам материала, определенными для не нагретого тела.

Аналогичные результаты были получены для случая, когда нагреваемая область была расположена ближе к краю пластины (рис. 2), здесь процесс декомпозиции был выполнен за 11 итераций.

Далее предложенный подход был применен для идентификации теплофизических  $\alpha(T)$ ,  $\lambda_T(T)$ ,  $C(T)$  и физических  $E(T)$  характеристик этой же пластины с использованием общепринятой методи-

ки аппроксимации неизвестных функций, описанной в монографии [8]. Для выполнения процедуры идентификации все неизвестные функции задачи были представлены полиномами 2-й степени:

$$\varphi(T) = a \cdot T^2 + b \cdot T + c,$$

а вектор параметров составлен из полиномиальных коэффициентов:

$$H = \{a_E; b_E; c_E; a_C; b_C; c_C; a_{\lambda_T}; b_{\lambda_T}; c_{\lambda_T}; a_\alpha; b_\alpha; c_\alpha\}.$$

В качестве начального приближения были выбраны постоянные значения теплофизических характеристик.

Анализируя полученные результаты, видим, что в вектор  $H^2$  помещены параметры, которые не присутствуют в аппроксимации зависимостей характеристик материала от температуры [7].

Результаты идентификации характеристик материала в зависимости от температуры для разных способов параметризации неизвестных функций представлены на рис. 1 – 4 (для случая идентификации с использованием аппроксимации по областям  $\Omega_p$  зависимости были построены с использованием интерполяционных полиномов).

Для апробации предложенного подхода проводилось сравнение результатов с известными решениями. Рассматривалась задача идентификации теплофизических характеристик  $\lambda_T(T)$ ,  $C(T)$  стальной пластины из решения задачи обратной задачи теплопроводности, представленная в монографии [8]. На поверхностях  $x_3 = 0$  и  $x_3 = h$  сформулированы граничные условия 2-го и 3-го рода:

$$\left. \frac{\partial T(x_3, t)}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0; \lambda_T(T) \left. \frac{\partial T}{\partial x_3} \right|_{x_3=h} = \alpha(T - T_c),$$

где  $\alpha = 11.7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{К}}; T_c = 1673 \text{ К}.$

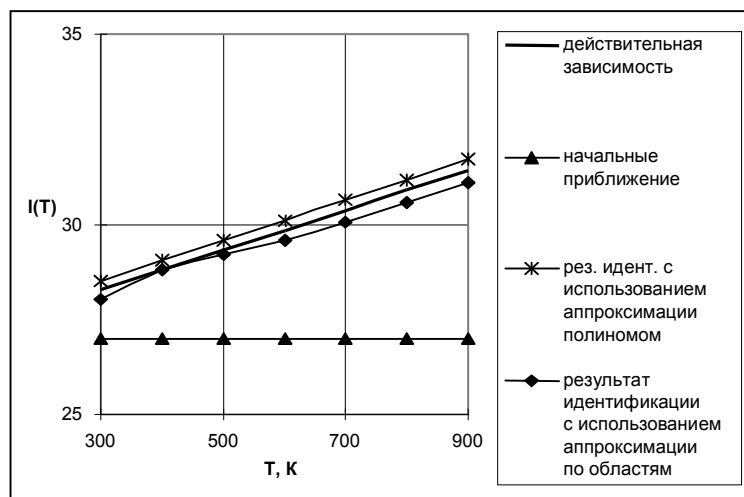


Рис. 1. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры

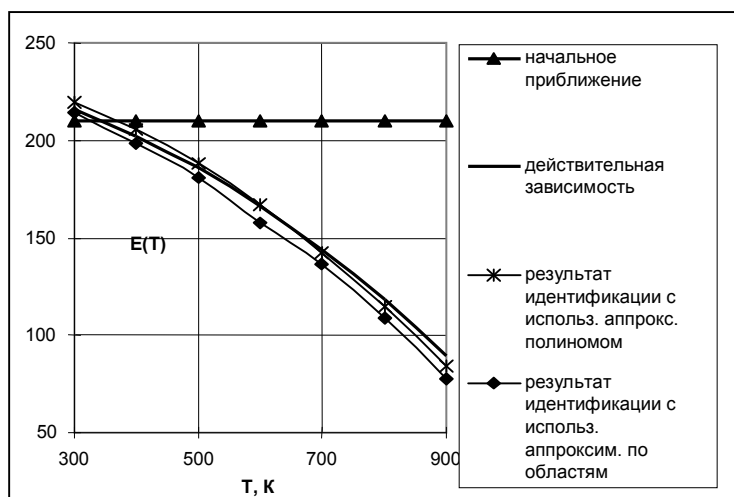


Рис. 2. Зависимость модуля упругости от температуры

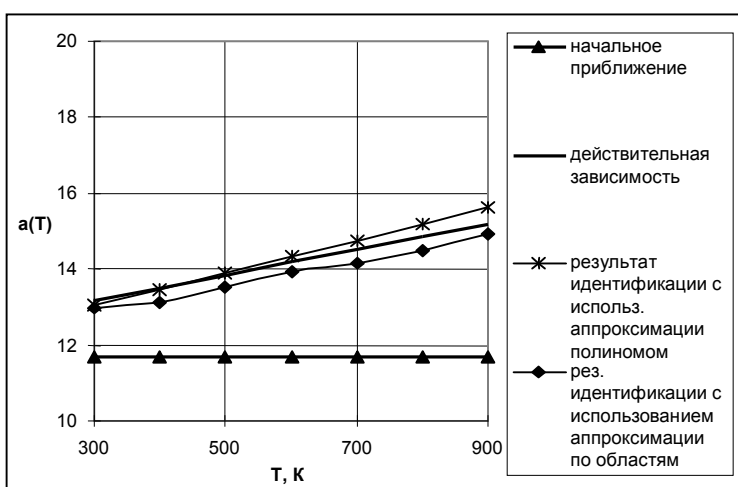


Рис. 3. Зависимость коэффициента линейного расширения от температуры

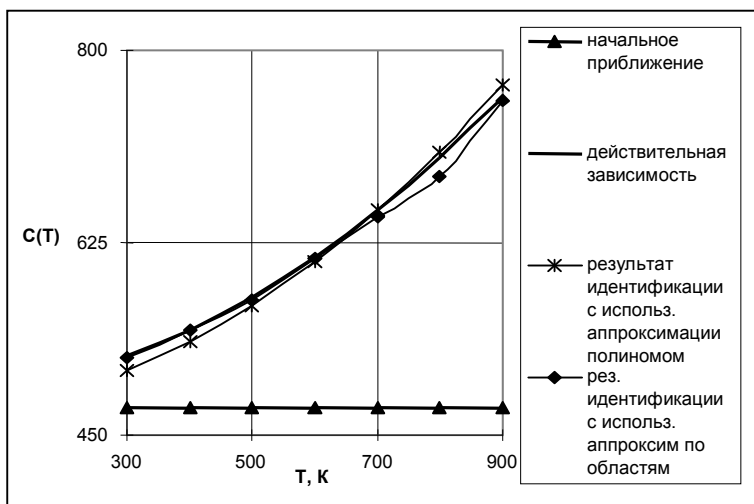


Рис. 4. Зависимость удельной теплоемкости от температуры

Теплофизические характеристики  $\lambda_T(T)$ ,  $c(T)$  заданы в виде полиномов вида  $a + bT$ . Действительные значения коэффициентов  $a_c = 1.5 \cdot 10^6$ ;  $b_c = 8 \cdot 10^3$ ;  $a_{\lambda_T} = 45$ ;  $b_{\lambda_T} = 0.02$  использовались

при решении прямых задач теплопроводности и термоупругости и получения поля температур  $T^*(X_i)$  и поля перемещений  $u_1^*(X_i)$  соответственно. В дальнейшем эти значения использовались при построении функционала-невязки.

Компонентами вектора восстанавливаемых параметров выбраны коэффициенты полиномов  $\{a_C; b_C; a_{\lambda_T}; b_{\lambda_T}\}$ , которые впоследствии определялись в результате выполнения итерационной процедуры декомпозиции. В качестве начального приближения были выбраны постоянные значения теплофизических характеристик  $\lambda_T = 45 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ;  
 $C = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$ , вектор параметров представлялся в виде  $H^0 = \{3 \cdot 10^6; 0; 45; 0\}$ .

Декомпозиция вектора параметров на первом

шаге выполнялась произвольно, в табл. 1 представлены результаты выполнения итерационной процедуры декомпозиции и процедуры идентификации вектора параметров из решения обратной задачи теплопроводности.

Аналогичные результаты были получены, когда значения этих коэффициентов восстанавливались из решения обратной задачи термоупругости и для формирования функционала-невязки выбирались значения перемещений. На рис. 5 и 6 представлены результаты восстановления теплофизических характеристик  $\lambda_T(T)$ ,  $C(T)$  полученные из решения обратных задач теплопроводности и соответствующей задачи термоупругости.

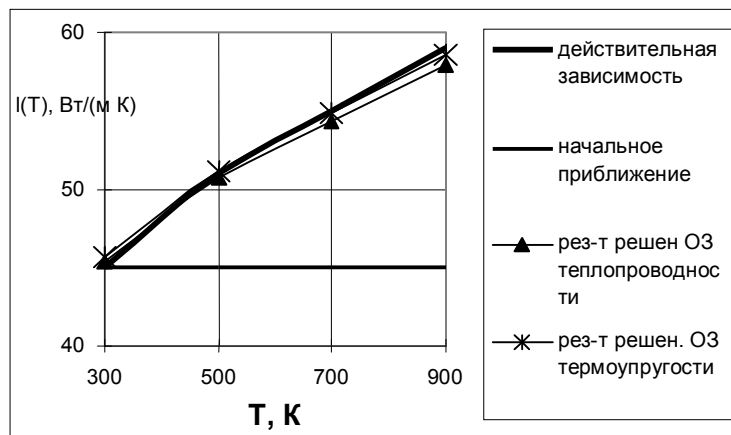


Рис. 5. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры

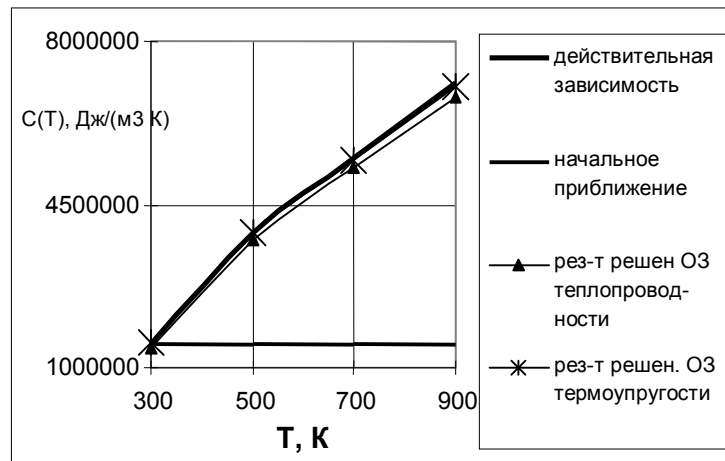


Рис. 6. Зависимость коэффициента удельной теплоемкости от температуры

**Выводы**

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- 1) применение декомпозиционного подхода позволяет восстановить вектор параметров системы с использованием различных способов аппроксимации;
- 2) разработанный метод и алгоритм идентификации параметров, характеризующих теплофизиче-

ские и механические свойства тонкостенных систем, позволяет определять указанные параметры в условиях их существенной неоднородности;

- 3) предложенный подход декомпозиции с выбором наиболее информативных компонент вектора параметров позволяет понижать порядок разрешающих соотношений;

- 4) сравнительный анализ полученных с использованием различных аппроксимаций числен-

ных результатов восстановления вектора параметров с действительными значениями параметров реальной системы свидетельствует об их достоверности.

В перспективе предложенный подход может быть применен для идентификации характеристик материала из решения обратной задачи термопластичности.

### Литература

1. Измерение импульсным методом теплофизических характеристик материалов с открытой поверхности [Текст]/ Л.Д. Загребин, В.А. Сипайлов, М.Г. Камашев, Е.А. Иванова // Тез. докл. 8 Всесоюз. конф. по теплофизическим св-вам веществ. – 1988. – Ч. 2. – С. 85.
2. Талуц, С.Г. Измерение температуропроводности и теплоемкости динамическим методом плоских температурных волн с использованием электронного нагрева [Текст]/ С.Г. Талуц, Б.В. Власов, В.Ф. Полев // Тез докл. 8 Всесоюз. конф. по теплофизическим св-вам веществ. – 1988. – Ч. 2. – С. 114-115.

3. Мацевитый, Ю.М. Обратные задачи теплопроводности [Текст]: в 2-х т. / Ю.М. Мацевитый. – К.: Наукова думка, 2003. – Т. 1: Методология. – 341 с. – Т. 2: Приложения. – 392 с.

4. Сергиенко, И.В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем [Текст]/ И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – К.: Наукова думка, 2009. – 639 с.

5. Тихонов, А.Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении [Текст]/ А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 263 с.

6. Ватульян, А.О. обратные задачи в механике деформируемого твердого тела [Текст]/ А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 222 с.

7. Безухов, Н.И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур [Текст]/ Н.И. Безухов, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.

8. Мацевитый, Ю.М. Идентификация теплофизических свойств твердых тел [Текст]/ Ю.М. Мацевитый, С.Ф. Лушпенко. – К.: Наукова думка, 1990. – 213 с.

Поступила в редакцию 30.05.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, профессор А.Л. Шубенко, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного, Украина.

### ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОМЕХАНИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРІАЛІВ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

*В.О. Повгородній*

Експериментально-теоретичне дослідження термомеханічних характеристик матеріалів приладів, а також елементів турбобудування здійснюється виходячи з розв'язків оберненої задачі термопружності. Обернена задача термопружності вирішується за допомогою рівняння Фредгольма та методу гранично-елементний аналог (МГЕ) ядра інтегрального оператора дозволяє замінити експеримент. В якості приклада розглянемо неметалічні матеріали, які використовуються для виготовлення печатних плат. Результати розрахунку можна використовувати, як невід'ємну частину проектування об'єктів приладобудування та енергетичного машинобудування (матеріалу парових та газових турбін).

**Ключові слова:** температура, обернена задача, термопружність, термомеханічні характеристики.

### THE DETERMINATION OF THE THERMOMECHANICAL CHARACTERISTICS INCLUDING SOLUTION INVERSE PROBLEM OF THERMOELASTICITY

*V.O. Povgorodny*

The experimental and theoretical investigation of thermal and elastical characteristics of the material's considered by discussed inverse problem of the thermoelasticity. An inverse quotients thermoelasticity problem is discussed by Fredholm's equation without experiment of the method of boundary element's/. The proposed solution is based on the assumption that thermo-mechanical processes in the material's of the electronic plates.. Assuming thermomechanical oscillation frequency small enough a solving equation was produced.. Obtained results can be used to simulate the process of experimental determination of physical-mechanical properties of the materials used in aero- and spacecraft manufacturing and of the energetic machinebuildings.

**Key words:** temperature, inverse problem, thermoelasticity, thermomechanical characteristics.

**Повгородній Владимир Олегович** – кандидат технических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина.