УДК 681.518.54

В.Ф. МИРГОРОД[1], И.М. ГВОЗДЕВА[2], В.В. ДАНИЛОВ[1], А.Г. БУРЯЧЕНКО[1], Д.И. ВОЛКОВ[1]

[1]АО «Элемент», Одесса, Украина
[2] Одесский национальный политехнический университет, Украина

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе предлагается класс математических моделей процессов в линейных системах с фиксированными состояниями. Такие математические модели являются дискретными аналогами интегральных уравнений Вольтерры II-го рода. Рассмотрены методы аналитического решения предложенных уравнений на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту. Рассмотрена и доказана теорема, устанавливающая аналитический вид резольвенты по заданному ядру для ряда важных частных случаев, а именно при сепарабельном виде ядра. Рассмотрены эквивалентные преобразования предложенных математических моделей к линейным разностным уравнениям.

Ключевые слова: *математическая модель, интегральное уравнение, ядро, резольвента.*

Введение

Проблема исследования изменения состояния сложных динамических систем в настоящее время решается путем построения их математических моделей (ММ), как правило, в виде моделей пространства состоянии как отвечающих в наибольшей степени методам и средствам современной теории управления. Однако далеко не все процессы в реальных объектах управления могут быть описаны указанными математическими моделями пространства состояния (ММПС), что требует отыскания новых форм их математического описания. Важная научно-прикладная задача состоит в отыскании таких форм ММ, которые при сохранении адекватности реальным процессам позволили бы осуществить их численную реализацию.

Известные преимущества моделей в виде интегральных уравнений, в частности, уравнений Вольтерры II-го рода, определяют необходимость и практическую значимость рассмотрения методов отыскания различных форм их численной реализации на основе решения соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

1. Постановка проблемы и цель исследования

Теоретические основы решения интегральных уравнений рассмотрены в ряде фундаментальных работ [1 – 3].

Методы и алгоритмы их численного решения предложены в справочной литературе [3, 4].

Особенности интегро-дифференциальных уравнений изложены в [5, 6]. Для отдельных частных случаев интегральных уравнений в [1 – 3] предлагаются также некоторые аналитические решения. В [7, 8] предложены такие решения для ряда задач.

В то же время необходимость численной реализации ММ непосредственно в составе систем управления требует рассмотрения вопросов отыскания решений интегральных уравнений и их дискретных аналогов, применяемых в качестве математических моделей исследуемых объектов. В первую очередь это касается интегральных уравнений Вольтерры II-го рода, имеющих широкую область применения в прикладных задачах и для которых разработаны эффективные методы численного решения [3].

Целью настоящей работы является разработка методов аналитического решения дискретных аналогов интегральных уравнений Вольтерры II-го рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

2. Основные результаты исследований

Интегральное уравнение Вольтерры II-го рода

$$y(x) = f(x) + \int_a^x k(x,s)y(s)ds\,, \tag{1}$$

где $y(x)$ – неизвестная, $f(x)$ – функция, удовлетворяющая ограничению

$$\left|\int_a^x f(x)dx\right| \langle C_1\,,\; C_1 = \mathrm{const}\,;$$

$k(x,s)$ – ядро, непрерывное в пределах треугольника $x \ge a, s \le b, x = s, b \rangle a$, ;

x, s – независимые переменные, $a = const$, имеет следующее решение в аналитическом виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x r(x,s) f(s) ds\,, \qquad (2)$$

где $r(x,s)$ – резольвента, удовлетворяющая уравнению

$$r(x,s) = k(x,s) + \int_a^x k(x,t) r(t,s) dt\,. \qquad (3)$$

Решение уравнения для резольвенты (3) имеет важное значение как для теории интегральных уравнений, так и для прикладных задач, поскольку отыскание резольвенты по известному ядру из (3) дает возможность решить целый класс интегральных уравнений Вольтерры II-го рода с различными правыми частями в виде функций $f(x)$.

Рассмотрим дискретный аналог уравнения (1)

$$y(x_n) = f(x_n) + \sum_{j=x_1}^{x_n} k(x_n, s_j) y(s_j), \qquad (4)$$

где $n, j \in N, j \le n$.

Уравнение (4) может рассматриваться, с одной стороны, как приближенная квадратурная реализация уравнения (1).

С другой стороны, (4) может использоваться как математическая модель процессов в системах с дискретными состояниями, например, цифровых системах управления, моделирования потока отказов, отражения сигнала от дискретных рассеивателей и др. В первом случае нахождение аналитического решения (4) позволяет избежать известных проблем численного решения уравнений с переменным верхним пределом. Во втором случае нахождение решений уравнений вида (4) имеет важное самостоятельное значение, поскольку дает возможность построить алгоритмы нерекурсивного типа, соответствующие требованиям реального времени.

В последующем (4) будет определяться как Σ - уравнение.

Будем полагать, что справедливы следующие условия;

$$\left| \sum_{x_j=x_1}^{x_n} f(x_i) \right| \le C_2, \ \ C_2 = const\,; \qquad .(5)$$

$$r(x_n, s_j) - r(x_{n-1}, s_j) \le C_3, \ \ C_3 = const\,; \qquad (6)$$

$$r(x_n, s_j) - r(x_n, s_{j-1}) \le C_4, \ \ C_4 = const\,. \qquad (7)$$

В дальнейшем переменные-аргументы опускаются и используются следующие обозначения:

$$r(x_n, s_j) = r_{nj}, \ \ y(x_n) = y_n, \ \ f(x_n) = f_n.$$

Решение уравнения (1) будем искать по аналогии с (2) в форме

$$y_n = f_n + \sum_{j=1}^{n} r_{nj} f_j \qquad (8)$$

Из (4) и (8) следует уравнение для резольвенты:

$$r_{nj} = k_{nj} + \sum_{i=j-1}^{n} k_{ki} r_{ij}\,. \qquad (9)$$

Вывод уравнения (9) может быть получен следующим образом

$$\sum_{s_j=x_1}^{x_n} r(x_n, s_j) f(s_j) = \sum_{s_j=x_1}^{x_n} k(x_n, s_j) y(s_j) =$$

$$= \sum_{s_j=x_1}^{x_n} k(x_n, s_j) f(s_j) + \sum_{v_i=x_1}^{x_n} f(v_i) \sum_{s_j=v_2}^{x_n} k(x_n, s_j) r(s_j, v_i) =$$

$$= \sum_{s_j=x_1}^{x_n} k(x_n, s_j) f(s_j) + \sum_{s_j=x_1}^{x_n} f(s_j) \left[\sum_{v_i=s_j}^{x_n} k(x_n, v_i) r(v_i, s_j) \right]$$

С учетом (5) из последнего соотношения следует (9).

Для исследования свойств и нахождения решений Σ -уравнения типа Вольтерры рассмотрим первоначально следующую лемму.

Лемма:

Для однородного Σ -уравнения Вольтерры II-го рода решением является 0-последовательность.

Действительно, для уравнения

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} k_{nj} y_j$$

есть решение

$$y_n = 0\,, \ \forall_n \in N,$$

что непосредственно следует из (8) при $f_n = 0$, $\forall_n \in N$.

Решения уравнения для резольвенты (9) устанавливает следующая теорема.

Теорема. Если ядро является разделяющимся (сепарабельным) и имеет вид

$$k_{nj} = \vec{\alpha}_n^T \vec{\beta}_j\,, \qquad (10)$$

где $\vec{\alpha}_n = col(\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, ..., \alpha_{nm})$,

$\vec{\beta}_j = col(\beta_{j1}, \beta_{j2}, ..., \beta_{jm})$

и справедливы условия (5…7), то решением уравнения для резольвенты является решетчатая функция

$$r_{nj} = \vec{\alpha}_n^T F_{nj} \vec{\beta}_j \qquad (11)$$

где матрица F_{nj} определяется из соотношения

$$F_{nj} = \prod_{i=j}^{n} (E - \vec{\beta}_j \vec{\alpha}_i^T)^{-1} \qquad (12)$$

Рассмотрим далее возможность эквивалентного представления Σ-уравнение Вольтерры II-го рода с разделяющимся ядром:

$$y_n = f_n + \alpha_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j . \quad (13)$$

Обозначая

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j , \quad (14)$$

получаем следующее разностное уравнение, эквивалентное (13) при нулевых начальных условиях

$$v_n = \beta_n(\alpha_n v_n + f_n) + v_{n-1} . \quad (15)$$

Из (13) и (15) следует дискретная математическая модель

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{1}{1-\alpha_n\beta_n} v_{n-1} + \dfrac{\beta_1}{1-\alpha_n\beta_n} f_n \\ y_n = \alpha_n v_n + f_n \end{cases} \quad (16)$$

с решением

$$y_n = f_n + \alpha_n \sum_{j=1}^{n} F_{nj}\beta_j f_j , \quad (17)$$

где $$F_{nj} = \prod_{i=j}^{n} (1-\alpha_i\beta_j)^{-1} . \quad (18)$$

Рассмотрим более сложное, по сравнению с (13), Σ-уравнение Вольтерры II-го рода с разделяющимся ядром

$$y_n = f_n + \vec{\alpha}_n^T \sum_{j=1}^{n} \vec{\beta}_j y_j . \quad (19)$$

Обозначим

$$\vec{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \vec{\beta}_j y_j$$

отсюда следует дискретная математическая модель пространства состояний в виде

$$\begin{cases} \vec{v}_n = (E - \vec{\beta}_n\vec{\alpha}_n^T)^{-1}\vec{v}_{n-1} + (E - \vec{\beta}_n\vec{\alpha}_n^T)^{-1}\vec{\beta}_n f_n ; \\ \vec{y}_n = \vec{\alpha}_n^T \vec{v}_n + f_n , \end{cases} \quad (20)$$

фундаментальная матрица которой имеет вид

$$\Phi_{nj} = (E - \vec{\beta}_j\vec{\alpha}_i^T)^{-1} , \ F_{nj} = \prod_{i=j}^{n} \Phi_{ii}$$

Решение системы (20) определяется соотношением

$$y_n = f_n + \vec{\alpha}_n^T \sum_{j=1}^{n} F_{nj}\vec{\beta}_j f_j$$

В силу эквивалентности (19) и (20), это решение одновременно является решением Σ-уравнения Вольтерры II-го рода с разделяющимся ядром.

Возможности предлагаемого подхода иллюстрируют следующие примеры.

Пример 1. Пусть ядро в уравнении (4) задано в виде

$$k_{nj} = \frac{a-1}{a} a^{-n} a^{j} .$$

Используя результат доказанной теоремы, получаем резольвенту

$$r_{nj} = a - 1 .$$

При задании “правой части” следующей решетчатой функцией

$$f_n = k \cdot r^{-n}$$

получаем решение в виде: $y_n = 1, \ \forall k \in N$.

Приведенный пример является дискретным аналогом уравнения, рассмотренного в [3] с тем же решением, полученным методом квадратур.

Пример 2. Пусть ядро в уравнении (4) задано в виде

$$k_{nj} = -(a-1)a^{-n}a^{j} = (1-a)a^{-(n-j)} .$$

На основе установленных аналитических результатов, получаем резольвенту

$$F_{nj} = a^{-n+j-1} = a^{-(n-j)} \cdot a^{-1} ;$$

$$r_{nj} = (1-a)a^{-2n}a^{2i} / a = ((1-a)/a)a^{-2(n-j)} .$$

При задании “правой части” следующей решетчатой функцией

$$f_n = k \cdot a^{-n} ,$$

получаем следующее решение:

$$y_n = a^{-2nk} .$$

Пример 3. В условиях примера 2 зададим другой вид “правой части”: $f_n = 1$. В этом случае решение имеет вид:

$$y_n = 1 - \frac{a}{a+1}(1 - a^{-2n}).$$

Последний пример иллюстрирует важное достоинство резольвентного решения: могут быть получены решения классов Σ-интегральных уравнений с различными “правыми частями”.

На рис. 1 представлена резольвента для $a = 2$.

Если $k_{nj} = k_{n-j}$ – разностное ядро, то в силу линейности Σ-интегрального уравнения $r_{nj} = r_{n-j}$ – резольвента также является разностной. Отсюда уравнение для резольвенты имеет вид

$$r_{n-j} = k_{n-j} + \sum_{i=j-1}^{n} k_{n-i} r_{i-j} \quad (21)$$

Полагая, что r_s и k_s удовлетворяют условиям существования их z-преобразований, где $s = n - j$, из (21) следует операторное уравнение:

$$R(z)_{n-j} = K(z) + K(z)R(z) , \quad (22)$$

где $R(z), K(z)$ – z-изображения ядра и резольвенты соответственно.

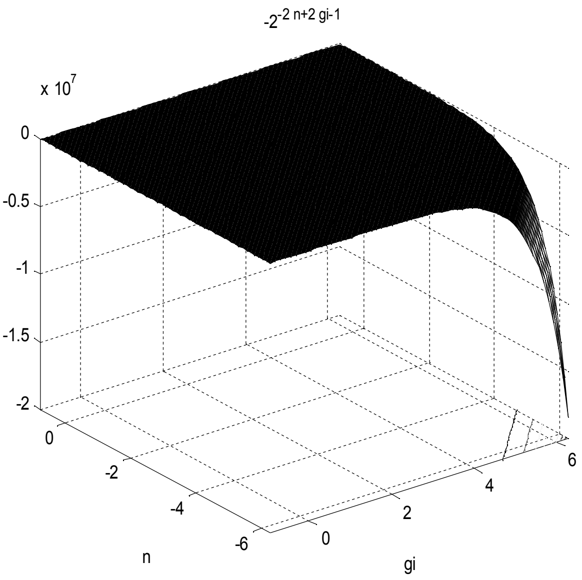

Рис. 1. Резольвента для примера 3

Отсюда следует аналитическое решение уравнения для резольвенты в виде

$$r_s = Z^{-1}\{R(z)\}, \tag{23}$$

где

$$R(z) = \frac{K(z)}{1-K(z)}. \tag{24}$$

Решение (24) обобщает операционный метод решения интегрального уравнения Вольтерраы II-го рода с разностным ядром на соответствующие Σ -уравнения.

Пример 4. Пусть

$$k_{nj} = k_{n-j} = a,\ \ r_{nj} = n(1-a)^{-n+j-1}. \tag{25}$$

Определим изображение ядра

$$K(z) = a\frac{z}{z-1}.$$

Согласно (24) получим изображение резольвенты

$$R(z) = \frac{az-1}{(1-a)z-1} = \frac{a}{1-a}\cdot\frac{z}{z-\dfrac{1}{1-a}}.$$

Используя обратное преобразование, получим окончательный результат

$$Z^{-1}\{R(z)\} = \frac{a}{1-a}\cdot\left(\frac{1}{1-a}\right)^s =$$

$$= \frac{a}{1-a}\cdot(1-a)^s = a(1-a)^{s-1},$$

который полностью соответствует (25) при $s = n - j$.

Для оценки полученных результатов по обобщению решений указанных типов дискретных аналогов интегральных уравнений Вольтерры II-го рода и исследованию новых их решений использованы программные средства пакета Symbolic Math Toolbox системы MATLAB 6.5, который базируется на применении ядра символьной математики системы компьютерной алгебры Maple V R4 [9]. Приведенные выше утверждения и примеры проверены при компьютерном моделировании и полностью подтверждены.

Заключение

Предлагаемый подход к установлению решений дискретных аналогов некоторых типов интегральных уравнений Вольтерры II-го рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту, дает возможность исследовать новые классы решений таких уравнений и упростить алгоритмы численной реализации при таблично заданных исходных данных, что определяет существенные преимущества предлагаемых моделей.

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением круга возможных типов интегральных уравнений Вольтерры II-го рода и их дискретных аналогов, для которых могут быть получены аналитические решения.

Литература

1. *Смирнов, В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 336 с.*

2. *Забрейко, П.П. Интегральные уравнения [Текст] / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1968. – 448 с.*

3. *Верлань, А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям [Текст] / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Техника, 1986. – 700 с.*

4. *Иванов, В.В Методы вычислений на ЭВМ [Текст] / В.В. Иванов. – К.: Наук. думка, 1986. – 584 с.*

5. *Верлань, А.Ф. Моделирование систем автоматического управления с реальными обратными связями на основе интегро-дифференциальных уравнений Вольтера [Текст] / А.Ф. Верлань, В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас // Тр. Одесск. Гос. политехн. ин-та. – 2000. – Вып. 3 (12). – С. 120 – 123.*

6. *Миргород, В.Ф. Квадратурно-разностные алгоритмы моделирования нелинейных динамических объектов [Текст] / В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас, А.Б. Волощенко // Моделирование и информационные технологии. – 2000. – Вып. 6. – С. 152 – 156.*

7. *Миргород В.Ф. Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода[Текст] / В.Ф. Миргород // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 68–80.*

8. *Миргород В.Ф. Эквивалентные преобразования интегральных и дифференциальных математических моделей [Текст]/В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // Матер. междунар. научн. конф. "Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы*

вычислительного интеллекта", 18-22 мая 2009 г. – Евпатория, 2009. – Т. 1. – С. 88–91.

9. Дьяконов В.П. Matlab 6.0: Учебный курс [Текст]/ В.П. Дьяконов. – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.

Поступила в редакцию 30.05.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.В. Дрозд, Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина.

МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ФОРМІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В.Ф. Миргород, І.М. Гвоздева, В.В. Данилов, А.Г. Буряченко, Д.І. Волков

У роботі пропонується клас математичних моделей процесів у лінійних системах з фіксованими станами. Такі математичні моделі є дискретними аналогами інтегральних рівнянь Вольтерри Іі-го роду. Розглянуті методи аналітичного рішення запропонованих рівнянь на основі відшукання рішень відповідних рівнянь, що зв'язують ядро й резольвенту. Розглянуто й доведена теорема, що встановлює аналітичний вид резольвенти по заданому ядру для ряду важливих окремих випадків, а саме при сепарабельному виді ядра. Розглянуто еквівалентні перетворення запропонованих математичних моделей до лінійних різницевих рівнянь.

Ключові слова: математична модель, интегральне рівняння,ядро, резольвента.

METHODS OF NUMERICAL REALIZATION OF MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMICAL PROCESSES IN THE FORM OF INTEGRAL EQUATION

V.F. Mirgorod, I.M. Gvozdeva, V.V. Danilov, A.G. Buryachenko, D.I. Volkov

The class of mathematical models of processes in the linear systems with the fixed states is offered in the paper. Such mathematical models are the discrete analogues of Volterra integral equations of the second kind. The methods of analytical solutions of the offered equations on the basis of finding of solutions of corresponding equations binding the kernel and resolvent are considered. The theorem, defining the analytical kind of resolvent on the given kernel for some important special cases, namely: at the separable type of kernel, is considered and proved. Equivalent transformations of the offered mathematical models to the linear difference equations are considered.

Key words: diagnostics, statistical mode, technical state, trend control

Миргород Владимир Федорович – канд. техн. наук, доцент, ведущий научный сотрудник АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua,

Гвоздева Ирина Маратовна – д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Одесского национального политехнического университета, Одесса, Украина, e-mail: onophenko@mail.ru,

Данилов Всеволод Владимирович – ведущий программист ОАО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: Odessa@element.od.ua,

Буряченко Анна Григорьевна – главный метролог АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: annaodessa2007@rambler.ru.

Волков Дмитрий Иванович - канд. техн. наук, старший научный сотрудник, зам. главного конструктора АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: DIVolkov@element.od.ua.