УДК 004.942

В.Ф. МИРГОРОД[1], В.Д. ГОГУНСКИЙ[2], А.Г. БУРЯЧЕНКО[1], В.М. ГРУДИНКИН[1]

[1] АО «Элемент», Одесса, Украина
[2] Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГТД

Рассматриваются ошибки кусочно-линейных динамических моделей пространства состояний, применяемых для реализации в стендах-имитаторах газотурбинных двигателей для отладки информационно-измерительных и управляющих систем класса FADEC. Линеаризация выполнена путем разложения правых частей нелинейных векторно-матричных уравнений в ряд Тейлора и найдена оценка отбрасываемой его части. Установлена зависимость точности линеаризованных математических моделей пространства состояний от числа обусловленности матриц градиентов. Выполнена сравнительная оценка точности различных классов кусочно-линейных динамических моделей.

Ключевые слова: *математические модели, аппроксимация, ошибки моделирования.*

Введение

Проблемным вопросом совершенствования систем управления класса FADEC является получение оценок неизмеряемых и косвенно измеряемых выходных переменных управляемых объектов с применением встроенных математических моделей реального времени. Известные точные термогазодинамические математические модели не в полной мере отвечают требованиям бортового применения по сложности и быстродействию. Перспективными являются известные кусочно-линейные динамические модели (КЛДМ) пространства состояния, которые применяются и численно реализуются в стендах-имитаторах (СИ) ГТД авиационного и общепромышленного применения. Отражая в приближенном виде динамику двигателя и силовой установки, такие модели позволяют выполнить отладку и приемо-сдаточные испытания систем управления. Тем не менее, имея в виду перспективу применения КЛДМ в составе бортовых средств, недостаточно внимания уделяется вопросам оценок ошибок применяемых моделей и уроню их адекватности, что составляет предмет настоящего исследования.

1. Формулирование проблемы

Метод линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) изменения состояния ГТД путем разложения правых частей в ряд Тейлора получил широкое распространение при реализации [1,3,5,6] кусочно-линейных динамических моделей (КЛДМ). Однако оценка точности таких линейных ММ сталкивается со значительными трудностями ввиду необходимости оценки влияния отбрасываемых остатков указанного ряда.

Известные феноменологические математические модели силовых и энергетических установок, основанные на линеаризации нелинейных уравнений, позволяют получить решения с достаточным быстродействием, однако для рассматриваемого класса объектов ошибки моделирования при численной реализации таких моделей многократно превышают допустимые ошибки измерительных каналов для непосредственно измеряемых переменных. В современных методах исследования процессов изменения состояния, управления, контроля и диагностирования силовых и энергетических установок широко используются кусочно-линейные математические модели, однако, такие модели:

- не всегда могут быть получены путем регрессионного анализа, поскольку требуют данных экспериментов в области значений параметров, где проведение эксперимента либо невозможно, либо опасно;

- обладают недостаточной точностью (в самом принципе линеаризации предполагается малость отклонений в окрестности некоторого установившегося режима, как по переменным состояния, так и по управляющим воздействиям, хотя такая малость отклонений для управляющих воздействий в силовых и энергетических установках на практике не имеет места, что и обуславливает значительные ошибки моделирования).

Целью настоящего исследования является оценка ошибок кусочно-линейной аппроксимации математических моделей ГТД, предназначенных для реализации в стендах-имитаторах и в составе бортовых и наземных средств управления, контроля состояния и диагностирования.

2. Решение проблемы

Ввиду сложности численной реализации математических моделей в виде нелинейных дифференциальных уравнений, широкое распространение при моделировании динамики ГТД и силовых установок на их основе получил подход, основанный на кусочно-линейной аппроксимации нелинейных математических моделей. Сопоставление результатов моделирования с данными стендовых и натурных испытаний в динамических режимах (приемистость и встречная приемистость) подтверждает возможность такого преобразования математических моделей при достаточном числе участков аппроксимации. Однако оценка точности аппроксимированных моделей в аналитическом виде практически не рассматривается в публикациях по ММ ГТД. Такие оценки необходимы при рассмотрении задач компьютерной реализации ММ непосредственно в составе бортовых средств. Известные результаты оценки точности кусочно-линейной аппроксимации нелинейных математических моделей динамических систем и объектов опираются на следующую теорему [2].

Если имеется система ДУ

$$\frac{dx}{dt} = \vec{f}(\vec{x},\vec{u}), \tag{1}$$

где $\vec{f}(\vec{x},\vec{u})$ – ограниченная непрерывная функция своих аргументов, удовлетворяющая в области определения условию Липшица с константой L, и выполнена ее кусочно-линейная аппроксимация в некотором заданном выпуклом многогранном множестве D:

$$\frac{d\vec{x}_m}{dt} = A_k\vec{x}_m + B_k\vec{u} = f_m(\vec{x}_m,\vec{u}), \tag{2}$$

то при условии, что вектор-функция управления $\vec{u}(t)$ не выводит решение (1) из области *D*, справедлива следующая оценка

$$\|\vec{x}-\vec{x}_n\| \le \frac{n}{L}\left[\exp L(t-t_0)-1\right] = \xi(t) \le \xi(T),\ t\in[t_0,T], \tag{3}$$

где

$$\eta = \max_{(\vec{x},\vec{u})\in D}\left\|\vec{f}(\vec{x},\vec{u}) - \vec{f}_m(\vec{x},\vec{u})\right\|. \tag{4}$$

Оценка (3) справедлива для одинаковых начальных условий (1) и (2).

Так как

$$\vec{f}(\vec{x},\vec{u}) = \vec{f}_m(\vec{x},\vec{u}) + \vec{r}(\vec{x},\vec{u}), \tag{5}$$

где $\vec{r}(\vec{x},\vec{u})$ – остаток разложения в ряд Тейлора, то имеем следующую оценку

$$\|\vec{x}-\vec{x}_m\| \le \max_{(\vec{x},\vec{u})\in D}\|\vec{r}(\vec{x},\vec{u})\| \cdot \int_{t_0}^{t}\exp L\tau d\tau. \tag{6}$$

Следует отметить, что если $\vec{f}$ имеет ограниченные частные производные в некоторой выпуклой области G, то

$$L = \max_{\vec{x}\in G}\left\|\frac{\partial\vec{s}}{\partial\vec{x}}\right\| = \max\|A_n\|.$$

Оценка (3) основана на общих свойствах нелинейных дифференциальных уравнений и является достаточно грубой, так как содержит в правой части экспоненциально растущий множитель.

Иной подход к оценке точности линеаризованных моделей, отражающий специфику моделей процессов управляемого изменения состояния нелинейных систем, предложен Я.З. Цыпкиным [4].

Следуя этому подходу, составляющая $\vec{r}(\vec{x},\vec{u})$, которая характеризует отличие линеаризованной модели от нелинейной системы, приводится к ее входу и рассматривается как дополнительное воздействие, что дает основание утверждать следующее [4]:

“Максимальное отклонение процессов в нелинейной системе от процессов в линеаризованной системе определяется величиной наибольшего отличия Δ нелинейной характеристики от линейной, коэффициентом усиления линейного элемента k и площадью абсолютной величины временной характеристики в линеаризованной системе”.

Цитируемый тезис относится, очевидно, к скалярным системам, но может быть обобщен на системы, описываемые векторно-матричными дифференциальными уравнениями.

Действительно, следуя (5), может быть записана цепочка неравенств в виде

$$\begin{aligned}\|\vec{x}-\vec{x}\ \| &\le \left\|\int_{t_0}^{t} e^{A_k(t-\tau)}\vec{r}[\vec{x}(\tau),\vec{u}(\tau)]dt\right\| \le \\ &\le \|\vec{r}(\vec{x},\vec{u})\|\cdot\left\|e^{A_k\tau}d\tau\right\| \le \eta\left\|\int_{t_0}^{t} e^{A_k\tau}d\tau\right\|,\end{aligned} \tag{7}$$

где η определяется (4).

Следуя [4], оценка (7) может быть усилена, если распространить пределы интегрирования на бесконечность

$$\|\vec{x}-\vec{x}_m\| \le \eta\left\|\int_0^{\infty} e^{A_k\tau}dt\right\|.$$

В силу свойства преобразования Лапласа

$$\left\|\int_0^{\infty} e^{A_k\tau}dt\right\| = \left\|W_k(p)_{p=0}\right\| = \left\|(pE-A_k)^{-1}\big|_{p=0}\right\| = \left\|A_k^{-1}\right\|,$$

откуда следует усиленная оценка

$$\left\|\vec{x}-\vec{x}_m\right\| \le \eta \left\|A_k^{-1}\right\|,$$

которая остается справедливой при переходе системы из одного установившегося режима в другой установившийся режим при равных начальных условиях.

Так как для любой невырожденной матрицы

$$\mathrm{cond}A = \left\|A\right\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \le 1,$$

то справедлива следующая оценка нормы ошибки линеаризованной системы

$$\left\|\vec{x}-\vec{x}_m\right\| \le \eta \left\|A_k\right\|^{-1} \cdot \mathrm{cond}A_k,$$

Последняя формула отражает важное обстоятельство зависимости ошибки линеаризации от числа обусловленности матрицы градиентов A_k.

Ошибки КЛДМ имеют две составляющие: статическая часть, вызванная несовпадением установившихся режимов с рабочими точками линеаризации, и динамическая часть, вызванная разрывами в матрицах градиентов при переходе от одной рабочей точки к другой. Статическая часть ошибки может быть уменьшена подходящей аппроксимацией (кусочно-линейной, полиномиальной) статических характеристик. Для динамической части ошибки установлена ее пропорциональность норме разницы матриц градиентов на сопрягаемых участках. Для крейсерских режимов такая разница невелика. Напротив, на участках маневрирования, динамическая ошибка является превалирующей.

В [5] предложен новый класс ММ динамики ГТД в форме Гаммерштейна и в виде следящих систем (ММСС). Для таких ММ статические характеристики (СХ) относительно режимной переменной $\vec{x}_{st}(s)$ предлагаются непрерывными, а линеаризация осуществляется лишь по координатам состояния. Сравнительная оценка ошибок моделирования для указанных ММ имеет следующий вид.

В установившихся режимах ошибки ММ имеют следующий характер:

1) КЛДМ:

$$\Delta_{st} = \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k - A_k^{-1}\vec{B}_k s_k;$$

2) ММСС1 (с кусочно-линейной интерполяцией СХ):

$$\Delta_{st} = \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k - \left.\frac{d\vec{x}_{st}}{ds}\right|_k \Delta s_k;$$

3) ММСС2 (с полиномиальной аппроксимацией СХ): теоретически ошибка равна нулю, практически она совпадает с ошибками задания СХ.

Таким образом, КЛДМ и ММСС1 в отношении статической точности эквивалентны, а преимущества ММСС1 заключаются в в исключении матриц градиентов по управлению, более удобном виде задания и возможности повышения точности путем подходящей аппроксимации СХ. Наилучшими по оцениваемому показателю являются ММСС2.

Рассмотрим сравнение динамических ошибок моделирования. Базовое выражение для динамических ошибок является общим для сравниваемых ММ, их различие заключается в слагаемом, которое имеет вид:

1) КЛДМ:

$$\Delta_{dm2} = \left(\vec{B}_{k+1} - \vec{B}_k\right)s\left(t_{k+1}\right);$$

2) ММСС1:

$$\Delta_{dm2} = \left(A_{k+1}\left.\frac{d\vec{x}_{st}}{ds}\right|_{k+1} - A_k\left.\frac{d\vec{x}_{st}}{ds}\right|_k\right)s\left(t_{k+1}\right);$$

3) ММСС2:

$$\Delta_{dm2} = \left(A_k - A_{k+1}\right)\vec{x}_{st}\left(t_{k+1}\right).$$

Сопоставление указанных выражений указывает на тот факт, что динамические ошибки КЛДМ и ММСС1 одинаковы, если только выполняются условия залегания [6]. Различие может возникнуть из-за ошибок идентификации матриц градиентов правой части (2).

ММСС2 на участках рабочих крейсерских режимов, где СХ близки к линейным зависимостям, не имеет существенных преимуществ по ошибкам моделирования. Действительно, поскольку в предположении, что динамические ошибки в основном вызваны разрывом производной координат состояния ММ, на этих участках имеется разрыв только в матрицах A_k для сопоставляемых ММ, то значения ошибок сопоставимы. Если же матрицы A_k параметризированы по режимной переменной S, то ММСС2 имеет меньшие ошибки моделирования относительно сравниваемых моделей. На участках маневрирования основной вклад в динамическую ошибку вносит составляющая, связанная с точностью воспроизведения управляющего воздействия. На таких участках ММСС2 имеет существенные преимущества.

Заключение

Кусочно-линейные динамические модели, ввиду простоты численной реализации и накопленного опыта применения в стендах-имитаторах, имеют наилучшие перспективы для применения в качестве бортовых математических моделей.

Требования к таким моделям:

- ошибки моделирования должны быть сопоставимы с ошибками измерительных каналов (ИК) для непосредственно измеряемых переменных (параметров);
- временной такт выдачи данных (время моделирования) не должен превышать временной такт указанных цифровых ИК.

Состояние силовых и энергетических установок определяется по их выходным переменным, наиболее важные из которых недоступны для непосредственного измерения в эксплуатационных условиях. Оценки таких переменных могут быть получены только методами математического моделирования. Такие бортовые модели должны обеспечить возможность получения оценок неизмеряемых выходных переменных (тяга, располагаемая мощность, запас газодинамической устойчивости и др.) в реальном масштабе времени и с приемлемой для практики точностью. Перспективы дальнейших исследований заключаются в разработке методов повышения точности КЛДМ.

Литература

1. ОАО «Элемент» 2001-2007. Основные результаты научно-технической деятельности [Текст] / сб. науч. тр. ОАО «Элемент»; под ред. Г.С. Ранченко, В.Ф. Миргород. – Одесса, 2008. – 333 с.

2. Барбашин, Е.А. Введение в теорию устойчивости [Текст] / Е.А. Барбашин. – М.: Наука, 1967. – 223 с.

3. Павлов, А.А. Линейные модели в нелинейных системах управления [Текст] / А.А. Павлов. – К.: Техника, 1982. – 167 с.

4. Цыпкин, Я.З. Основы теории автоматических систем [Текст] / Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

5. Миргород, В.Ф. Новые формы математических моделей изменения состояния нелинейных динамических объектов [Текст] / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева, А.Ю. Кузьменко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2011. – № 7 (84). – С. 208 – 211.

6. Грудинкин, В.М. Средства модельной поддержки процессов проектирования электронных систем и программно-технических комплексов для испытаний газотурбинных двигателей [Текст] / В.М. Грудинкин, В.Ф. Миргород, В.А. Качура // Авиационно-космическая техника и технология. – 2011. – № 9 (86). – С. 120–123.

Поступила в редакцию 31.05.2013, рассмотрена на редколлегии 17.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.Н. Паулин, Одесский национальный политехнический университет, Одесса.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ГТД

В.Ф. Миргород, В.Д. Гогунський, Г.Г. Буряченко, В.М. Грудинкін

Розглядаються помилки кусочно-лінійних динамічних моделей простору стану, застосовуваних для реалізації в стендах-імітаторах газотурбінних двигунів для налагодження інформаційно-вимірювальних і керуючих систем класу FADEC. Лінеаризація виконана шляхом розкладання правих частин нелінійних векторно-матричних рівнянь у ряд Тейлора й знайдена оцінка його частини, що відкидається. Установлено залежність точності лінеаризованих математичних моделей простору станів від числа обумовленості матриць градієнтів. Виконана порівняльна оцінка точності різних класів кусочно-лінійних динамічних моделей.

Ключові слова: математичні моделі, апроксимація, помилки моделювання.

ACCURACY EVALUATION OF GTE PIECE WISE-LINEAR DYNAMIC MODELS

V.F. Mirgorod, V.D. Gogunski, A.G. Buriachenko, V.M. Grudinkin

Error of piecewise linear dynamic models of state space which used for implementation in the stands – simulators of gas turbine engines for debugging of information-measuring and control systems class FADEC is considered. Linearization by expanding the right sides of the nonlinear vector-matrix equations in a Taylor series is executed. Evaluation of its cutting part is obtained. Relationship between accuracy of linearized mathematical model of the of the state space and condition number of the matrix gradient is established. Comparative a accuracy estimation of the various classes of piecewise-linear dynamic models is executed.

Key words: mathematic model, approximation, error of modeling.

Миргород Владимир Федорович – д-р техн. наук, доцент, вед. науч. сотр. АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.

Гогунский Виктор Дмитриевич – канд. техн. наук, зав. каф. Одесского национального политехнического университета, Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.

Буряченко Анна Григорьевна – Главный метролог АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.

Грудинкин Вячеслав Михайлович – зам. Главного конструктора АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.