

УДК 531.133.1

Е.А. ИГУМЕНЦЕВ, Е.А. ПРОКОПЕНКО

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ГИРОСКОПА

В качестве модели заряженного гироскопа предложен электрон. Доказано, что электрон ведет себя как обычный волчок, если центр его тяжести и жесткости не совпадают. В этом случае возникший резонансный момент импульса равен экспериментальному значению квантовой модели электрон-волна для скоростей вращательного движения меньших скорости света. В модели учтено внутреннее демпфирование колебаний электрона, где гистерезисные потери могут наблюдаться и для магнитного момента. Доказано, что периодический крутящий момент находится в резонансе с механической системой модели электрона-гироскопа и создает резонансный момент импульса для линейных скоростей вращательного движения, меньших скорости света, соответствующий моменту импульса электрона.

Ключевые слова: гироскоп, идеальная и неидеальная сфера, момент импульса, вектор, проекция, частота.

Введение

В системах навигации, стабилизации и наведения всех движущихся объектов основными датчиками первичной информации об угловых, а иногда и о линейных перемещениях объекта являются различные гироскопы и гироскопические приборы. Современный уровень технических достижений в области гироскопического приборостроения и инерциальной навигации обусловлен развитием и широким применением прикладной теории гироскопов. Расширение традиционных областей применения гироскопов и появление новых обуславливает внимание к их исследованию и, в частности, моделированию процессов, происходящих при их движении. Одной из моделей заряженного гироскопа является электрон [1].

Рассматривая квантовую модель электрон-волна, обратим внимание на ее уязвимые места. Представление о вращающемся вокруг своей оси электроны используется в современной физике лишь для наглядности, но не имеет буквального смысла. Если предположить, что вращение действительно имеет место, и принять для электрона разумные размеры (радиус порядка $1,3 \div 2,5 \cdot 10^{-15}$ м), то для получения известного значения собственного механического момента импульса электрона пришлось бы допустить существование линейных скоростей вращательного движения, превосходящих скорость света.

Результаты исследований

Чтобы устранить указанное противоречие и увеличить момент импульса (L) электрона при линейных скоростях вращения меньше скорости света до величин равных

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar,$$

где \hbar – постоянная Дирака, как это утверждает эксперимент, необходимо вернуться к гипотезе о том, что электрон является волчком. Идеальный шар при вращении ведет себя как обычный волчок, если обладает незначительным эксцентриситетом центра тяжести (т.е. центр жесткости и центр тяжести не совпадают). При вращении волчка вокруг своей оси возникают прецессия и нутация с постоянными и периодическими частотами вращения вокруг различных главных осей. Такие вращения и приводят к постоянным и периодическим механическим моментам импульсов электрона. В сочетании с магнитными моментами, обусловленными электрическим движением в представлении электрона как диполя, механические моменты импульсов создают резонансные режимы вращений. На резонансных режимах при линейных скоростях вращения электрона уже возможны значения момента импульса порядка (L).

Предположим, что оси координат во вращающейся системе отсчета волчка расположены вдоль главных осей ξ, η, ζ (рис. 1), а неподвижные оси есть x, y, z . Если I_ξ, I_η, I_ζ – моменты инерции относительно подвижных осей, то для симметричного волчка ($I_\xi = I_\eta \neq I_\zeta$) из динамических уравнений Эйлера [1] следует, что при свободном вращении волчка, когда не действует внешний момент вращения $N_i = 0$, ω_ξ (и только ω_ζ) постоянна.

Уравнения Эйлера приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{\omega}_\xi + \frac{I_0 - I}{I} \omega_\zeta \omega_\eta = 0; \\ \dot{\omega}_\eta - \frac{I_0 - I}{I} \omega_\zeta \omega_\xi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

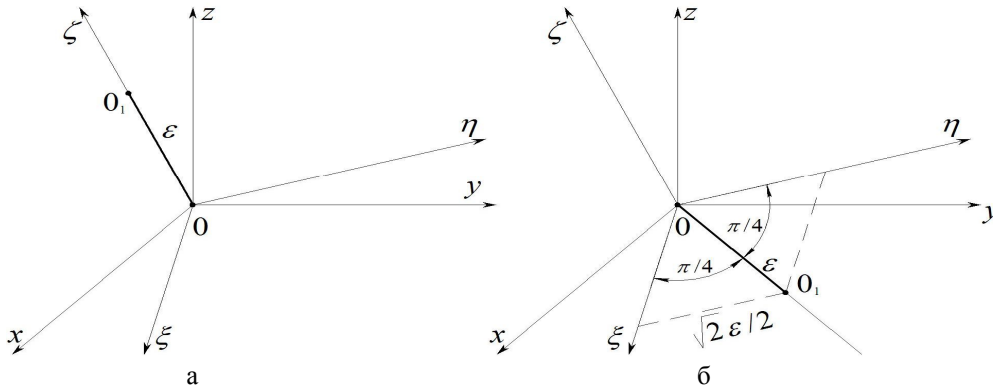


Рис. 1. Расположение подвижных и неподвижных осей неидеального шара (O – центр жесткости; O₁ – центр тяжести): а – вытянутый волчок, б – сплюснутый волчок

где $I_\xi = I_\eta = I$; $I_\zeta = I_0$;

ω_ζ – частота вращения вдоль оси симметрии ζ .

Рассмотрим вытянутое вдоль оси симметрии тело, когда $I > I_0$. Обозначим частоту вращения тела вокруг оси симметрии (собственную частоту)

$$\omega_0 \equiv \frac{I - I_0}{I} \omega_\zeta, \quad (2)$$

а уравнение (1) перепишем в другом виде

$$\begin{cases} \dot{\omega}_\xi - \omega_0 \omega_\eta = 0; \\ \dot{\omega}_\eta + \omega_0 \omega_\xi = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение уравнений (3) имеет вид

$$\omega_\xi = \omega_u \cos \omega_0 t, \quad \omega_\eta = -\omega_u \sin \omega_0 t, \quad (4)$$

где ω_u – постоянная амплитуда колебаний, являющаяся компонентой угловой скорости

$\omega_u = \sqrt{\omega_\eta^2 + \omega_\xi^2}$, ортогональной к оси симметрии волчка и направленная по оси u (рис. 2).

Компонента ω_u вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 в противоположном (по часовой стрелке, отрицательном) направлении относительно подвижных осей ξ и η (рис. 2).

Подвижные оси координат вместе с телом вращаются с частотой ω_ζ вокруг оси ζ . Следовательно, компонента ω_u вращается в положительном (против

часовой стрелки) направлении вокруг оси ζ с частотой, равной $\Omega_\zeta = \omega_\zeta - \omega_0$ относительно неподвижных осей. Компонента ω_ζ угловой скорости вдоль оси симметрии ζ волчка постоянна. Поэтому вектор ω равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 относительно оси волчка. Другими словами, волчок, вращающийся относительно своей геометрической оси ζ с угловой скоростью ω_ζ в пространстве, в котором не действуют силы, будет раскачиваться из стороны в сторону с собственной частотой ω_0 .

Рассматривая, как и ранее, вытянутое вдоль оси тело (т.е. тело с моментами инерции $I > I_0$), проведем из конца вектора ω_ζ отрезок $(\omega_\zeta - C)$, параллельный отрезку $(\Omega - \omega_0)$ (рис. 2). Затем соединим точку C с концом вектора Ω_ζ . Несложно доказать, что отрезок $(\omega_\zeta - C)$ параллелен вектору Ω , а следовательно, отрезок $(\omega_\zeta - C)$ равен вектору Ω_ζ . Итак, с учетом соотношения (2), получим выражение для соответствующей угловой скорости ω_ζ в виде

$$\omega_\zeta = \Omega_\zeta + \omega_\zeta [(I - I_0)/I]. \quad (5)$$

Из (5) следует, что $\Omega_\zeta = \Omega \cos \theta_\Omega = \omega_\zeta (I_0/I)$ (рис. 2), а соотношения (5) и (2) принимают вид:

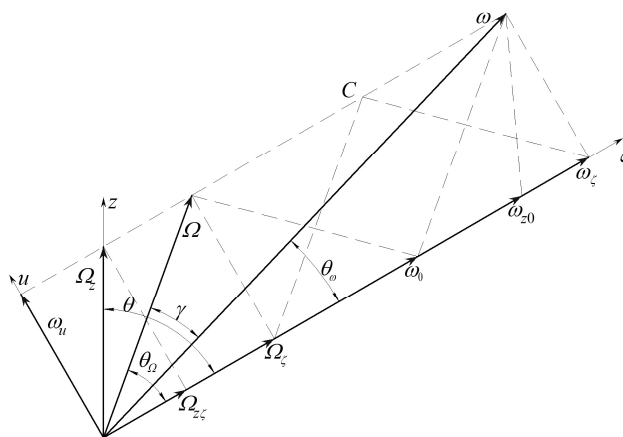


Рис. 2. Разложение вектора мгновенной угловой скорости ω на сумму двух составляющих векторов ω_0 и Ω и сумму взаимортогональных компонент ω_u и ω_ζ

$$\begin{cases} \omega_{\zeta} = (I/I_0)\Omega_{\zeta}; \\ \omega_0 = (I/I_0 - 1)\Omega_{\zeta}. \end{cases} \quad (6)$$

Учитывая, что $\omega_u = \Omega \sin \theta_{\Omega}$ является проекцией вектора ω , из теоремы Пифагора (рис. 2) получим

$$\omega^2 = \Omega^2 \left\{ 1 + \left[(I/I_0)^2 - 1 \right] \cos^2 \theta_{\Omega} \right\}.$$

С учетом (6) выражение для частоты вращения компоненты угловой скорости ω_u в положительном направлении вокруг оси ζ примет вид:

$$\Omega_{\zeta} = (\omega_{\zeta} - \omega_0) = \Omega \cos \theta_{\Omega}, \quad (7)$$

а проекция частоты вращения ω на ось ζ состоит из двух частот: $\omega_{\zeta} = \Omega_{\zeta} + \omega_0$.

Для нахождения угла γ между векторами Ω и ω необходимо применить теорему косинусов: $\omega_0^2 = \omega^2 + \Omega^2 + 2\Omega\omega \cos \gamma$ и подставить в полученное соотношение равенство $\omega_0 = \omega_{\zeta} - \Omega_{\zeta}$ из (7). Вычисляя $\cos \gamma$ путем преобразования последнего уравнения с учетом (6), представим выражение для угла (γ) в виде [1, 2]:

$$\cos \gamma = \frac{1 + (I/I_0 - 1) \cos^2 \theta_{\Omega}}{\sqrt{1 + \left[(I/I_0)^2 - 1 \right] \cos^2 \theta_{\Omega}}}. \quad (8)$$

Для идеального шара $I/I_0 = 1$, $\cos \gamma = 1$, вектора Ω и ω совпадают, а углы θ_{Ω} и θ_{ω} равны: $\theta_{\omega} = \theta_{\Omega}$.

Для сплюснутого вдоль оси ξ тела (т.е. тела с моментами инерции $I < I_0$) соотношения (7) сохраняются, однако, собственные частоты ω_0 , $\omega_{\omega 0}$ положительны и их вектора вращаются против часовой стрелки [1].

Известно [3], что свободное движение идеального шара (вращение) вокруг любой главной оси происходит с постоянной частотой вращения, и прецессия не возникает. Для применения гироскопической модели и возникновения прецессии необходимо условие $I_{\xi} = I_{\eta} \neq I_{\zeta}$ относительно главных осей, связанных с телом во вращающейся системе отсчета.

Для Земли I_{ζ} не равно в точности I_{ξ} , потому что Земля не является точным шаром. Прецессия в этом случае очень хорошо наблюдается на опыте и приводит к возникновению эффекта, называемого вариацией широты.

Кроме того, при вращении идеального шара вектор магнитной индукции B , совпадающий с вектором частоты вращения ω и момента импульса L соосны (направлены в одну сторону) и крутящий момент не возникает.

Допустим, что электрон не является идеальным шаром. В этом случае центр жесткости шара и центр тяжести (массы) электрона не совпадают и шар имеет некоторый эксцентриситет (ε). Тогда при вращении электрона возникает момент силы тяжести. Рассмотрим случай, когда шар имеет незначительные отклонения от идеального $I_{\xi} = I_{\eta} \approx I_{\zeta}$ ($\varepsilon \approx 0$). Такое допущение позволяет одновременно учесть особенности вращения шара и волчка.

Под неидеальным шаром будем понимать такой шар, у которого центр жесткости (геометрический центр) образует идеальный шар, моменты инерции которого относительно любых осей, проходящих через центр жесткости, равны $I_{\xi} = I_{\eta} = I_{\zeta} = I_0$. Центр тяжести его не совпадает с центром жесткости и имеет незначительный эксцентриситет ε . Если ось ζ провести через центр жесткости и центр тяжести (отрезок ε), то моменты инерции относительно осей ζ , ξ , η будут равны $I_{\zeta} = I_0$; $I_{\xi} = I_{\eta} = I = I_0 + m\varepsilon^2$, отношение I/I_0 равно $I/I_0 = 1 + 5\varepsilon^2 / (2R^2)$, где m , R – масса и радиус шара.

В этом случае неидеальный шар можно рассматривать как вытянутый вдоль оси ζ волчок ($I > I_0$). Проведем ось ζ перпендикулярно прямой, соединяющей центр жесткости и центр тяжести (отрезок ε) и перпендикулярно плоскости, в которой находятся отрезок ε и оси ξ , η . Оси ξ и η проведем под углом $\pi/4$ к отрезку ε . Тогда момент инерции относительно оси ζ будет равен $I_{\zeta} = \bar{I}_0 = I_0 + m\varepsilon^2$, а моменты инерции относительно осей ξ и η соответственно равны $I_{\xi} = I_{\eta} = \bar{I} = I_0 + m\varepsilon^2/2$. В этом случае неидеальный шар можно рассматривать как сплюснутый (рис. 1, б) вдоль оси ζ волчок ($\bar{I} < \bar{I}_0$).

При малом значении ε , когда $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$, как у шара, угол γ мал, вектора Ω и ω «почти» совпадают, а $\cos \gamma = 1 - \left[5\varepsilon^2 / (2R^2) \right]^2$. Аналогично и для любых значений θ в интервале $0 < \theta < \pi/2$, при малом ε вектора Ω и ω «почти» совпадают, а угол γ мал (рис. 2).

Таким образом, волчок в виде неидеального шара с малым значением ε обладает всеми динамическими свойствами гироскопа (вытянутого и сжатого волчка) и «почти» всеми свойствами идеального шара.

У шарового волчка (идеального шара) направления главных осей инерции могут быть выбраны произвольно: любую тройку взаимно перпендикулярных осей с началом в центре масс можно рассматривать в качестве главных. В частности, для

кубика эти оси совершенно необязательно направлять параллельно ребрам. Это значит, что любая ось, проходящая через центр масс, будет осью свободного вращения – при любом направлении вектора угловой скорости ω вектор момента импульса L будет совпадать с ним по направлению. Для шарового волчка вращение по инерции вокруг любой оси представляет собой равномерное вращение с сохранением направления оси вращения в пространстве.

Представим электрон в виде неидеального шара. Направим ось ζ по прямой, соединяющей центр тяжести и центр жесткости. Тогда электрон вращается с постоянной скоростью ω_0 вокруг оси ζ (рис. 2) и представляет собой вытянутый вдоль оси ζ волчок ($I > I_0$).

Для свободно вращающегося симметричного волчка все вектора угловых скоростей сосредоточены в одной плоскости $\omega, \Omega, \Omega_B, \Omega_z, \omega_\zeta, \Omega_\zeta, \omega_0$ (назовем ее «I»), а $\omega_k = 0$. Если неидеальный шар в виде симметричного волчка вращается под действием возмущающего момента, то $\theta \neq \text{const}$ и появляется составляющая угловой скорости $\omega_k \neq 0$ (см. рис. 3).

Движение электрона происходит под действием возмущающего момента M , при наличии собственной магнитной индукции [4, 5]. При возникновении угловой скорости ω_k вектора $\omega^0, \Omega^0, \omega_u^0, \Omega_B^0, \omega_\zeta, \Omega_\zeta, \omega_0$ лежат в одной плоскости (назовем ее «O»), отклоненной от вертикальной плоскости на угол $-\varphi_1$ (см. рис. 3), где φ_1 – угол между векторами ω_u и ω_u^0 . Здесь всем векторам угловых скоростей присвоен индекс «0» в показателе степени обозначения.

По мгновенной оси вращения электрона ω^0 направлен суммарный вектор магнитной индукции B . Вектор момента импульса (L) постоянен (не меняет направления) и не совпадает с вектором магнитной индукции B . Вектор L образует с вектором B угол

γ_0 . Вектор магнитной индукции B вращается вокруг вектора момента импульса L , описывая круговой конус. Частота вращения ω^0 наклонена под углом $\theta_\omega = \theta_\Omega - \gamma^0$ к оси ζ (рис. 3) и вращается вокруг неё. Угол γ^0 между векторами B и L для неидеального шара при $\varepsilon \approx 0$, как было показано ранее, мал.

Вектора $\omega_k, \omega_u^0, \omega_u$ и вектор крутящего момента M лежат в одной плоскости (назовем ее «II»), перпендикулярной двум рассматриваемым плоскостям, где сосредоточены векторы угловых скоростей. Вектор электромагнитного момента перпендикулярен плоскости «O» и лежит в плоскости «II». Вектор частоты Лармора направлен по оси B . Вектора угловых скоростей $\Omega_B, \Omega_B^0, \Omega, \Omega^0$ имеют одинаковую проекцию на ось $O_\zeta - \Omega_\zeta$.

Введем обозначения $\omega_k = \omega_u^0 \sin \varphi_1, \omega_u = \omega_u^0 \cos \varphi_1$, где ось симметрии перпендикулярна к плоскости угла φ_1 ; ω_u^0 – проекция мгновенной частоты ω^0 на ось u^0 . С учетом обозначений для угла φ_1 имеет место равенство: $\text{tg } \varphi_1 = \omega_k / \omega_u$, а кинематические уравнения Эйлера [1] приобретают несколько другой вид:

$$\begin{cases} \omega_\zeta^0 = \omega_u^0 \cos(\omega_0 t + \varphi_1); \\ \omega_\eta^0 = \omega_u^0 \sin(\omega_0 t + \varphi_1); \\ \omega_\zeta^0 = \Omega \cos \omega_k t + \omega_0. \end{cases} \quad (9)$$

На рис. 4 приведены проекции моментов и проекции угловых скоростей при вращении несимметричного тела или симметричного тела, вращающегося под действием моментов. Соотношения между проекциями угловых скоростей подобны свободно вращающемуся симметричному телу, но лежат в другой плоскости «O».

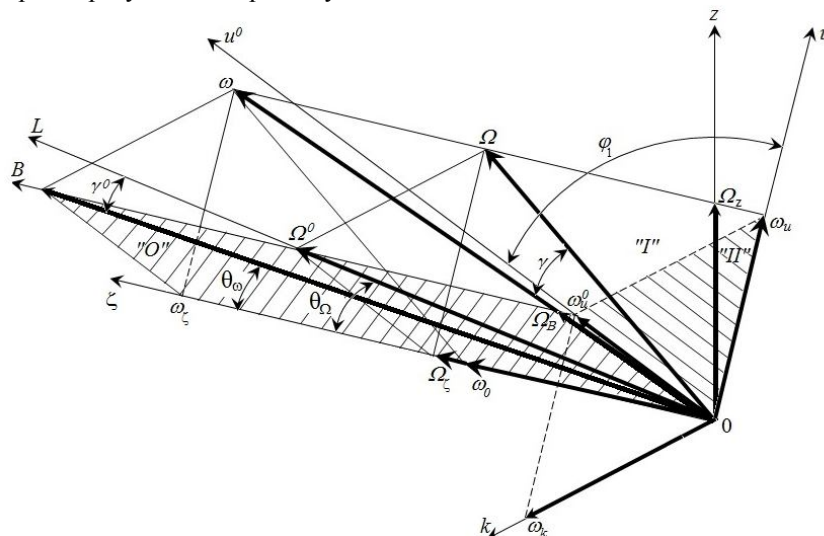


Рис. 3. Соотношение между угловыми скоростями модели электрона в форме неидеального шара при свободном и вынужденном вращениях электрона

Модуль частоты вращения и частота Лармора соответственно равны $\omega^0 = \sqrt{\omega^2 + \omega_k^2}$; $\Omega^0 = \sqrt{\Omega^2 + \omega_k^2}$ (рис. 4).

Крутящий момент электрона при условии, что вектора L и B несоосны, представлен в виде векторного произведения [1, 2]:

$$M = \gamma_S L \times B = -\frac{e}{m} L \times B = -I\Omega^0 \times \Omega_B^0 = I\Omega_B^0 \times \Omega^0.$$

Вектор крутящего момента (см. рис. 3) перпендикулярен плоскости «O» и вектору ω_u^0 (рис. 4). Модуль вектора равен:

$$|M| = I\Omega_B^0 \Omega^0 \sin \gamma^0. \quad (10)$$

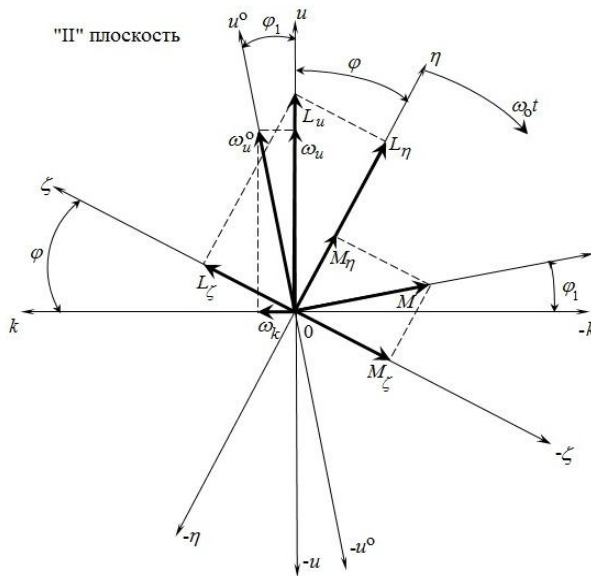


Рис. 4. Проекция угловых скоростей и крутящего момента модели электрона в плоскостях подвижных $O\xi\eta$ осей и осей Резаля Ouk.

Плоскость «II» перпендикулярна Ω_ζ ($\bar{M} \perp \omega_u^0$)

Спроектируем крутящий момент на подвижные оси $O\xi\eta$ ($O\xi \perp O\eta$) (рис. 4), связанные с электроном:

$$M_\xi = -M \cos(\omega_0 t + \phi_1); \quad M_\eta = M \sin(\omega_0 t + \phi_1).$$

По теореме синусов из треугольника, образованного векторами ω^0 , Ω^0 , ω_0 получим $\omega_0 / \sin \gamma^0 = \omega / \sin \theta_\Omega$ (рис. 5). Из подобия треугольников, образованных векторами Ω_B^0 , ω_0 и Ω_ζ , ω_ζ , имеем равенство $\Omega_B^0 / \omega^0 = \Omega_\zeta / \omega_\zeta = I_0 / I$. С учетом этого соотношения, запишем (10) в виде $|M| = I\omega_u^0 \omega_0 \cdot I_0 / I$.

Введем обозначения

$$\tilde{k} = \omega_0 \frac{I_0}{I} = (\omega_\zeta - \Omega_\zeta) \frac{I_0}{I} = \Omega_\zeta \left(1 - \frac{I_0}{I}\right) = \Omega_\zeta \frac{m\epsilon^2}{I_0 + m\epsilon^2};$$

$$\bar{k} = \frac{m\epsilon^2}{I_0} = \frac{5m\epsilon^2}{2mR^2} = \frac{5}{2} \bar{\epsilon}^2,$$

где $\bar{\epsilon}$ – относительный (отнесенный к радиусу электрона) эксцентриситет.

Тогда \tilde{k} и $|M|$ представим в другом виде

$$|M| = I\omega_u^0 \tilde{k}; \quad \tilde{k} = \Omega_\zeta \frac{\bar{k}}{1 + \bar{k}}.$$

Подставим полученные соотношения в выражение проекций момента с учетом равенств $\cos \phi_1 = \omega_k / \omega_u^0$; $\sin \phi_1 = \omega_u / \omega_u^0$:

$$\begin{cases} M_\xi = -I\omega_u^0 \tilde{k} \cos(\omega_0 t + \phi_1); \\ M_\eta = I\omega_u^0 \tilde{k} \sin(\omega_0 t + \phi_1). \end{cases} \quad (11)$$

Перейдем к исследованию движения электрона, представляющего собой суперпозицию вынужденной регулярной прецессии под действием магнитного крутящего момента и момента от сил тяжести. Уравнение движения учитывает все моменты заряженного волчка:

$$d\bar{L}/dt + \bar{\omega} \times \bar{L} = \bar{\omega}_{пр} \times \bar{L} - \bar{\Omega}_B \times \bar{L}. \quad (12)$$

Здесь следует заметить, что гиромангнитное орбитальное отношение равно $\gamma_1 = -e/(2m)$ и вдвое меньше, чем гиромангнитное отношение для спина электрона. Для единообразия в выражении для частоты прецессии Лармора Ω_B обозначим $\gamma_S = k_S \gamma_1$, где $k_S = 2,0023$, а не $k_S = 2$, как это следует из релятивистского уравнения Шредингера. Рассмотрим общий случай, когда $\omega_k \neq 0$, с учетом внутреннего демпфирования колебаний электрона, где гистерезисные потери могут наблюдаться и для магнитного момента. Удовольствуемся приближенной схемой, следуя указаниям Клейна и Зоммерфельда, и предполагая, что внутреннее сопротивление может быть представлено аналогично [6] двумя парами, моменты которых пропорциональны экваториальной и осевой составляющим ω_u^0 , ω_ζ мгновенной угловой скорости ω^0 и направлены противоположно им. Если I и I_0 обозначают, как и ранее, моменты инерции электрона относительно оси фигуры, то коэффициенты пропорциональности удобно взять в виде Ia^2 , I_0c^2 , где a и c – постоянные. Тогда момент сопротивления

$$\bar{M}_c = -Ia^2 \bar{\omega}_u - I_0c^2 \bar{\omega}_\zeta, \quad (13)$$

а уравнения Эйлера принимают вид:

$$\begin{cases} I d\omega_\xi/dt - (I - I_0) \omega_\zeta \omega_\eta + Ia^2 \omega_\xi = M_\xi; \\ I d\omega_\eta/dt + (I - I_0) \omega_\zeta \omega_\xi + Ia^2 \omega_\eta = M_\eta; \\ I d\omega_\zeta/dt = -Ic^2 \omega_\zeta. \end{cases} \quad (14)$$

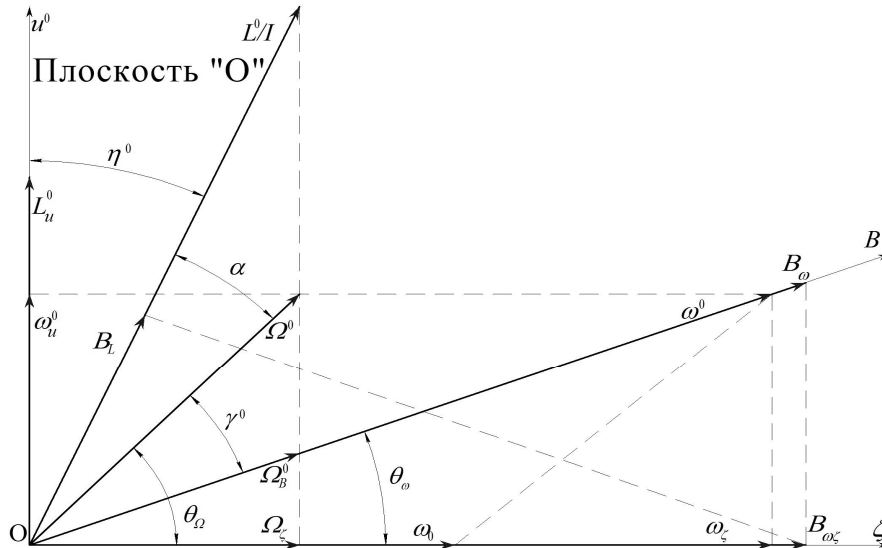


Рис. 5. Соотношение векторов магнитной индукции и угловых скоростей модели электрона

Если коэффициенты сопротивления равны между собой, так что $Ia^2 = I_0c^2$ или $a^2/c^2 = I_0/I$, то величины a и c обратно пропорциональны главным моментам инерции I, I_0 .

Последнее уравнение (14) дает:

$$\omega_\zeta = \omega_\zeta^H \exp(-c^2t), \quad (15)$$

где $\theta_\omega^H, \omega_\zeta^H$ – начальное значение угла θ_ω и угловой скорости ω_ζ ($t = 0$).

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ угловая скорость вращения вдоль оси ζ стремится к нулю. Такое движение будет происходить в отсутствие возмущающих моментов $M_\zeta = M_\eta = 0$, т.е. при вращении свободного волчка-гироскопа в сопротивляющейся среде. Это движение подробно изучено [6], где приведена зависимость для угла θ_ω :

$$\text{tg}\theta_\omega = \text{tg}\theta_\omega^H \exp\left[-(a^2 - c^2)t\right]. \quad (16)$$

Из (16) следует, что угол θ_ω при $t \rightarrow \infty$ стремится к $\pi/2$ в случае вытянутого тела ($a > c$); к нулю или π в случае сплюснутого тела ($a < c$). Иными словами, вектор мгновенной угловой скорости ω_0 при $t \rightarrow \infty$ стремится совпасть с малой осью инерции; в первом случае это есть одна из экваториальных осей ($I = I_\eta = I_\xi$); во втором – ось симметрии волчка ($I_0 = I_\zeta$ и $\omega = \omega_\zeta$), т.к. они совпадают. Из последнего уравнения (14) следует $\omega_\zeta = \text{const}$ и $\omega_0 \neq 0$ [1].

Оставшиеся два уравнения будем решать с учетом сопротивления, т.к. здесь наблюдается резонансный режим частоты ω_0 . Запишем первые два уравнения (14) в комплексном виде относительно моментов импульсов, как одно уравнение:

$$\begin{aligned} d(L_\xi + jL_\eta)/dt + \omega_0(-L_\eta + jL_\xi) + a^2(L_\xi + jL_\eta) = \\ = I\omega_u^0 \tilde{k} [\cos(\omega_0 t + \varphi_1) - j \sin(\omega_0 t + \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Так как $L_u = L_\xi + jL_\eta$ и

$$\begin{aligned} [\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + j \sin(\omega_0 t + \varphi_1)] = \exp[j(\omega_0 t + \varphi_1)], \\ \text{то } dL_u/dt + \omega_0 jL_u + a^2 L_u = I\omega_u^0 \tilde{k} \cdot \exp[-j(\omega_0 t + \varphi_1)]. \end{aligned}$$

Отыскивая решение последнего уравнения в виде $L_u = \bar{A} \exp(-j\omega_0 t)$, получим

$$\bar{A} = \frac{I\omega_u^0 \tilde{k} \exp(-\varphi_1)}{j(-\omega_0 + \omega_0) + a^2}.$$

Выразив комплексную амплитуду через амплитуду A_u и фазу φ_u , получим:

$$A_u = I\omega_u^0 \tilde{k} / a^2; \quad \varphi_u = -\varphi_1.$$

Введем добротность колебаний электрона [1] $Q = \omega_0 / a^2$, подставим значение добротности в соотношение A_u и запишем окончательное выражение для амплитуды момента импульса

$$A_u = I\omega_u^0 Q \tilde{k} / \omega_0 = I_0 \omega_u^0 Q. \quad (17)$$

Таким образом, магнитный момент, образованный при вращении электрона как диполя, создает крутящий момент совместно с индукцией «внешнего» магнитного поля электрона и магнитную частоту прецессии (частоту Лармора).

Периодический крутящий момент находится в резонансе с механической системой модели электрона-гироскопа и возбуждает резонансный момент импульса для линейных скоростей вращательного движения, меньших скорости света.

Выводы

Представление электрона в виде неидеального (деформированного) шара обусловило использова-

ние теории гироскопа (волчка) и определение при его вращении частоты прецессионного вращения. Вращение заряженного электричеством шара порождает индукцию магнитного поля, а прецессионное вращение позволяет считать ее для момента импульса «внешней».

Вращение электрона-волчка вокруг оси симметрии с меньшим и большим моментами инерции относительно экваториальных осей создает условие для образования противоположно направленных собственных частот и моментов импульса, что может быть классифицировано, как спин «вверх» и спин «вниз» у электрона.

Литература

1. Игуменцев, Е.А. Гироскопическая модель спина электрона [Текст]: моногр. / Е.А. Игуменцев. - Х.: ХУПС, 2012. - 224 с.

2. Игуменцев, Е.А. Момент импульса заряженного гироскопа [Текст] / Е.А. Игуменцев, Е.А. Прокопенко // *Авиационно-космическая техника и технология*. - 2011. - № 8 (85). - С. 117 - 121.

3. Игуменцев, Е.А. Устойчивость вращения заряженного гироскопа [Текст] / Е.А. Игуменцев, Е.А. Прокопенко // *Авиационно-космическая техника и технология*. - 2012. - № 7(94). - С. 171 - 176.

4. Игуменцев, Е.А. Электромагнитная диагностика напряженно-деформированного состояния бесконтактным методом [Текст] / Е.А. Игуменцев, Е.А. Прокопенко // *Електротехнічні та комп'ютерні системи*. - 2011. - № 03 (79). - С. 429 - 432.

5. Игуменцев, Е.А. Диагностика напряженно-деформированного состояния [Текст] / Е.А. Игуменцев, Е.А. Прокопенко // *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. - 2012. - № 3(19). - С. 566 - 568.

6. Булгаков, Б.В. Две задачи из теории волчка [Текст] / Б.В. Булгаков // *Математический сборник*. - 1934. - Т.4, № 1. - С. 73 - 91.

Поступила в редакцию 31.05.2013, рассмотрена на редколлегии 17.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.И. Кузнецов, Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины, Харьков.

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ СКЛАДОВІ ЧАСТОТИ ОБЕРТАННЯ ЗАРЯДЖЕНОГО ГІРОСКОПУ

Є.О. Игуменцев, О.О. Прокопенко

Як модель зарядженого гіроскопу запропонований електрон. Доведено, що електрон поводиться як звичайний дзига, якщо центри його ваги і жорсткості не збігаються. У цьому випадку виникає резонансний момент імпульсу дорівнює експериментальному значенню квантової моделі електрон-хвиля для швидкостей обертового руху менших швидкості світла. У моделі враховано внутрішнє демпфування коливань електрона, де гістерезисні втрати можуть спостерігатися і для магнітного моменту. Доведено, що періодичний момент, що крутить, знаходиться в резонансі з механічною системою моделі електрона-гіроскопа і для лінійних швидкостей обертального руху, які є меншими швидкості світла, створює резонансний момент імпульсу, відповідний моменту імпульсу електрона.

Ключові слова: гіроскоп, ідеальна та неідеальна куля, момент імпульсу, вектор, проекція, частота.

ELECTROMAGNETIC COMPONENTS OF THE CHARGED GYROSCOPE ROTATIONAL FREQUENCY

Y.O. Igumentsev, O.O. Prokopenko

Electron is used in this paper as a model of the charged gyroscope. It is proven that electron behaves like a ordinary spinning top if its centres of gravity and stiffness do not match. In this case, the resonant angular momentum created. It is equal to the value of experimental quantum model of electron-wave if its rotational speed is less than the speed of light. During the designing of the model the internal cushioning fluctuations of electron where taken into account, minor hysteresis losses can also be observed for magnetic moment. It proved that the periodic torque is in resonance with the mechanical system model of electron-gyro. This periodic torque is in a resonant moment of momentum. It creates the moment of momentum of the electron for linear speeds rotary motion lower the speed of light.

Key words: gyroscope, ideal and non-perfect sphere, moment of impulse, vector, projection, frequency.

Игуменцев Евгений Александрович – д-р техн. наук, проф., проф. каф. систем управления технологических процессов и объектов Украинской инженерно-педагогической академии, Харьков, Украина, e-mail: izumea@i.ua.

Прокопенко Елена Александровна – канд. техн. наук, доц., доц. каф. систем управления технологических процессов и объектов Украинской инженерно-педагогической академии, Харьков, Украина, e-mail: Heenna@i.ua.