

УДК 539.3

А.Г. НИКОЛАЕВ, Е.А. ТАНЧИК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## РАЗВИТИЕ ЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

Предложена локальная модель напряженно-деформированного состояния пористого материала, основанная на обобщенном методе Фурье. Поры моделируются вытянутыми сфероидальными полостями. Рассматривается случай параллельного расположения пор в упругом пространстве, которое находится под действием одноосного и двухосного растяжения. Аппарат обобщенного метода Фурье позволяет точно удовлетворить граничным условиям на поверхностях пор и на бесконечности. Для определения параметров модели получена разрешающая бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Проведено численное моделирование, на основании которого дан анализ распределения напряжений в зоне между порами.

**Ключевые слова:** локальная модель, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции, пористый материал.

### Введение

Композиционные материалы широко применяются в авиационно-космической технике, поэтому очень актуальной задачей является изучение их прочностных характеристик. В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] предложен метод расчета эффективных упругих модулей зернистых композитов, основанный на модели упругого деформирования пористых материалов. Отличительная особенность метода заключается в осреднении микроскопических напряжений и деформаций не по полному, а по эффективному объему фаз. Получены расчетные зависимости эффективных объемов осреднения от упругих модулей и объемного содержания фаз. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными при различном сочетании упругих модулей и произвольной объемной концентрации фаз. В работе [2] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри пор. В работе [3] разработана локальная математическая модель напряженно-деформированного состояния зернистого композиционного материала, основанная на обобщенном методе Фурье. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением методом конечных элементов.

В данной работе предложена локальная модель напряженно-деформированного состояния пористо-

го материала, основанная на обобщенном методе Фурье. Поры моделируются вытянутыми сфероидальными полостями, расположенными в упругом пространстве. Рассматривается случай параллельного расположения пор в упругом пространстве, которое находится под действием одноосного и двухосного растяжения.

### Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство  $\Omega$  с двумя непересекающимися сфероидальными полостями сдвинутыми друг относительно друга на  $a$  вдоль оси  $\rho$ , как показано на рис. 1. Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические  $(\rho_i, \varphi_i, z_i)$  и вытянутые сфероидальные системы координат  $(\xi_i, \eta_i, \varphi_i)$ , начала которых отнесены к центрам пор  $O_i$ ,  $i = 1, 2$ . Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия  $\sigma_z^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$  (одноосное растяжение) или  $\sigma_\rho^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$  (двухосное растяжение), а границы полостей свободны от усилий.

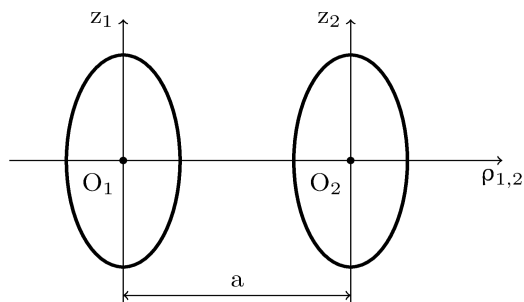


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Уравнения поверхностей полостей  $\Gamma_i$  в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\Gamma_i: \frac{z^2}{d_{1i}^2} + \frac{\rho_i^2}{d_{2i}^2} = 1, \quad (1)$$

где  $d_{1i}$  и  $d_{2i}$  - большая и малая полуоси сфероидов соответственно,  $\rho_1 = \rho_2 + a$ . В сфероидальных координатах уравнения поверхностей полостей имеют простой вид  $\xi = \xi_{0i}$ . Координаты в двух сфероидальных системах координат связаны между собой следующим образом:

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{sh} \xi_1 \sin \eta_1 = a + c_2 \operatorname{sh} \xi_2 \sin \eta_2, \\ c_1 \operatorname{ch} \xi_1 \cos \eta_1 = c_2 \operatorname{ch} \xi_2 \cos \eta_2; \end{cases} \quad (2)$$

где  $z_i = c_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i$ ,  $\rho_i = c_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i$ ,  $c_i$  - параметры сфероидальных систем координат.

Общее решение краевой задачи для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

в упругом пространстве  $\Omega$  ищется в виде суперпозиции линейно независимых внешних частных решений уравнения Ламе:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^3 \sum_{m=-n}^{\infty} \sum_{s=1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j),$$

где  $\mathbf{U}$  - в общем случае функция перемещений,  $\sigma$  - коэффициент Пуассона. Перемещение  $\mathbf{U}_0$  соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двухосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (6)$$

где  $T$  - усилие на бесконечности,  $G$  - модуль сдвига,  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  - орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для вытянутого сфероида [4]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \frac{c}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[ \mathbf{u}_{n-1,m}^{\pm(5)} - \mathbf{u}_{n+1,m}^{\pm(5)} \right], \quad s=1,3 \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{D}_2 \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(5)} - c q_0^2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{D}_1 = \nabla$ ,  $\mathbf{D}_2 = z \nabla - \chi \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$  (здесь  $i$  - мнимая единица),  $\chi = 3 - 4\sigma$ ,  $q = \operatorname{ch} \xi$ ,  $q_0 = \operatorname{ch} \xi_0$ ,  $\mathbf{u}_{n,m}^{\pm(5)}$  - полный набор частных решений уравнения Лапласа в вытянутых сфероидальных координатах.

В развернутой координатной форме формулы

(7) - (8) имеют вид:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{u}_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - \mathbf{u}_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -\mathbf{u}_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - \mathbf{u}_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & q \mathbf{u}_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - q \mathbf{u}_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \\ & - \left[ q \mathbf{u}_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 + c \left( q^2 - q_0^2 \right) \nabla \mathbf{u}_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{u}_{n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{u}_{n,m}^{\pm} S_n^m$ ,  $\mathbf{u}_{n,m}^+ = Q_n^{-m}(q)$ ,  $\mathbf{u}_{n,m}^- = P_n^{-m}(q)$ ,  $\mathbf{u}_{1,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{u}_{1,n,m}^{\pm} S_n^m$ ,  $\mathbf{u}_{1,n,m}^+ = (n+m+1) Q_{n+1}^{-m}(q)$ ,  $\mathbf{u}_{1,n,m}^- = -(n-m) P_{n-1}^{-m}(q)$ ,  $S_n^m = P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}$ ,  $P_n^m$  и  $Q_n^m$  - присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно. Базис  $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$  связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_\rho + i \mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi}, \\ \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_\rho - i \mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \end{cases} \quad (12)$$

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  имеет вид:

$$\mathbf{F}\mathbf{U} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (13)$$

Применив к формулам (9) - (11) оператор (13) на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$  получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = & 2G \frac{h}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u}_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u}_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & 2G \frac{h}{c} \left\{ \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q^{-1} \mathbf{u}_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \right) - 2\sigma \mathbf{u}_{2,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ & - \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q^{-1} \mathbf{u}_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \right) - 2\sigma \mathbf{u}_{3,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_1 - \\ & \left. - \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q^{-1} \mathbf{u}_{1,n,m}^{\pm(5)} \right) + (1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = & 2G \frac{h}{c} \left[ - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u}_{n,m-1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{2,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u}_{n,m+1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{3,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{m}{2} \frac{q}{q} \mathbf{u}_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\mathbf{u}_{2,n,m}^+(5) = \omega^- Q_n^{-m}(q) S_n^{m-1}$ ,  $\mathbf{u}_{3,n,m}^+(5) = Q_n^{-m}(q) S_n^{m+1}$ ,  $\mathbf{u}_{3,n,m}^-(5) = P_n^{-m}(q) S_n^{m+1}$ ,  $\mathbf{u}_{2,n,m}^-(5) = \omega^- P_n^{-m}(q) S_n^{m-1}$ ,  $\omega^- = (n+m)(n-m+1)$ ,  $h = (q^2 - p^2)^{-1/2}$ ,  $\bar{q} = \operatorname{sh} \xi$ .

### Теоремы сложения

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сфероидов. Справедливы следующие теоремы сложения [5]:

$$U_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_i, \eta_i, \varphi_i) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m}^{t,k,l} U_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (17)$$

где  $i, j = 1, 2, i \neq j$ .

$$T_{s,n,m}^{t,k,l} = \left\{ \delta_{st} - \delta_{t1} \delta_{s2} \left[ q_{10}^2 \left( c_1 \frac{\partial}{\partial c_1} - n - 1 \right) + q_{20}^2 \left( c_2 \frac{\partial}{\partial c_2} - k \right) + z_{12} \frac{\partial}{\partial z_{12}} \right] \right\} f_{1,n,m}^{\pm(55)k,l}, \quad (18)$$

$$f_{1,n,m}^{+(55)k,l} = \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pk} \left( \frac{c_2}{2} \right)^p \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-1} \beta_{rm} \left( \frac{c_1}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-1}^{+(4)}(\tau_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}), \quad (19)$$

$$f_{1,n,m}^{-(55)k,l} = \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_2}{c_1} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pn} \left( \frac{c_2}{2} \right)^p \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-1} \beta_{rk} \left( \frac{c_1}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-1}^{+(4)}(\tau_{12}, \theta_{12}, \varphi_{12}), \quad (20)$$

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} \left[ \Gamma \left( \frac{i-j}{2} + 1 \right) \Gamma \left( \frac{i+j}{2} + \frac{3}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (21)$$

где  $\delta_{ij}$  - дельта-символ Кронекера,  $\Gamma$  - гамма-функция Эйлера;  $\varepsilon_{ij} = 1$ , если  $i$  и  $j$  одной четности, и  $\varepsilon_{ij} = 0$  в противном случае;  $(r, \theta, \varphi)$  - сферические координаты;  $u_{n,m}^{+(4)} = (n-m)! \Gamma^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$  - внешнее базисное частное решение уравнения Лапласа для сферы. Для расположения полостей представленного на рис. 1  $z_{12} = 0, \theta_{12} = \pi/2, \tau_{12} = a$  и для сдвига вдоль оси  $x \varphi_{12} = 0$ . В формулах (17) - (18) берем  $f_{1,n,m}^{+(55)k,l}$  при переходе от  $O_1$  к  $O_2$ , т.е. для  $i = 1$  и  $j = 2$ , а при обратном переходе ( $i = 2$  и  $j = 1$ ) берем  $f_{1,n,m}^{-(55)k,l}$ .

### Разрешающая система уравнений

Относительно перемещения  $\tilde{U}$  получаем краевую задачу для уравнения (3) с граничными условиями  $\tilde{F}\tilde{U}|_{\Gamma_i} = -F\mathbf{U}_0|_{\Gamma_i}$ . Применив оператор (13) к

формулам (5) - (6), на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$  для одноосного и двухосного растяжения получим соответственно:

$$F\mathbf{U}_0 = Th \operatorname{sh} \xi \cos \eta \mathbf{e}_z,$$

$$F\mathbf{U}_0 = Th \operatorname{ch} \xi \sin \eta \mathbf{e}_\rho.$$

Используя теоремы сложения (17) - (18), представим вектор перемещения  $\tilde{U}$  в системе координат с началом в точке  $O_1$ :

$$\tilde{U} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(1)} U_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) + U_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \varphi_1) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(2)} T_{s,n,m}^{t,k,l} \quad (22)$$

и с началом в точке  $O_2$ :

$$\tilde{U} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(2)} U_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) + U_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \varphi_2) \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(1)} T_{s,n,m}^{t,k,l} \quad (23)$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_{s,n,m}^{(j)}$ :

$$\sum_{s=1}^3 A_{s,n,m}^{(1)} F_{s,n,m}^{+(r)} + F_{s,n,m}^{-(r)} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(2)} T_{s,n,m}^{t,k,l} + F_{0,n,m}^{(r)} = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{s=1}^3 A_{s,n,m}^{(2)} F_{s,n,m}^{+(r)} + F_{s,n,m}^{-(r)} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(1)} T_{s,n,m}^{t,k,l} + F_{0,n,m}^{(r)} = 0, \quad (25)$$

$$r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n - 1 + n + 1,$$

где  $F_{0,n,m}^{(0)} = \frac{Td_{2i}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$ ,  $F_{0,n,m}^{(-1)} = F_{0,n,m}^{(1)} = 0$  (для одноосного растяжения) и  $F_{0,n,m}^{(0)} = 0$ ,

$F_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{Td_{1i}}{G} \delta_{n1} \delta_{m0}$ ,  $F_{0,n,m}^{(-1)} = -\frac{Td_{1i}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$  (для двухосного растяжения).

$$F_{1,n,m}^{\pm(-1)} = \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(1)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(0)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}, \quad F_{2,n,m}^{\pm(-1)} = q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm} \right) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(1)} = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm} \right) + 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(0)} = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm} \right) + (2\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}.$$

Оператор системы уравнений (24) - (25) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей.

### Анализ результатов

Система уравнений решена методом редукции. Анализ сходимости метода редукции показал, что высокая точность достигается уже при  $N = 5$ , т.е. в бесконечных суммах по  $n$  и  $k$  удерживаем шесть слагаемых. Численный анализ решения задачи проведен для двух одинаковых сфероидальных полостей с соотношением полуосей  $d_{1i} / d_{2i} = 2 : 1$ , коэффициент Пуассона  $\sigma = 0,3$ . Под относительным показателем близости полостей понимаем величину  $(d_{21} + d_{22}) / a$ , принимаем ее значение равным  $0,4$ ;  $\lambda$  - относительное расстояние между полостями,  $\lambda \in [0; 1]$ .

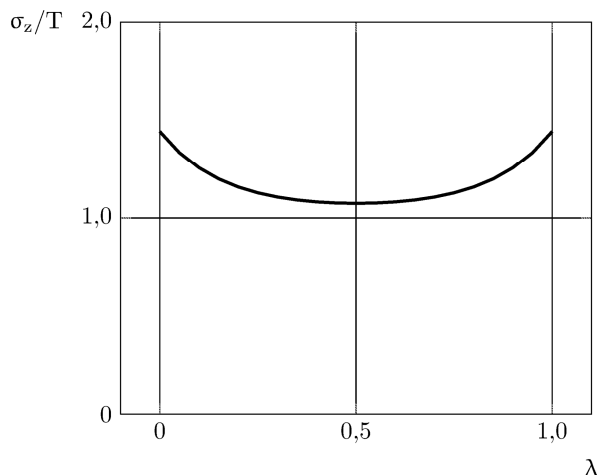


Рис. 2. Напряжения  $\sigma_z / T$  на оси между полостями при одноосном растяжении

На рис. 2 - 3 представлены графики напряжений на оси между полостями для случая одноосного растяжения упругого пространства. Из анализа графиков видно, что при одноосном растяжении основной вклад в напряженно-деформированное состояние вносят напряжения  $\sigma_z$ , при этом их концентрация наблюдается у смежных полюсов сфероидов.

На рис. 4 - 5 представлены графики напряжений на оси между полостями для случая двухосного растяжения упругого пространства. Из анализа графиков видно, что при двухосном растяжении напряжения  $\sigma_p > 0$  и достигают максимума в средней точке на оси; напряжения  $\sigma_z < 0$  и их концентрация наблюдается у смежных полюсов сфероидов. Представленные графики имеют симметричный вид, как и должно быть при симметричных граничных усло-

виях на бесконечности, что может служить косвенной проверкой расчетов.

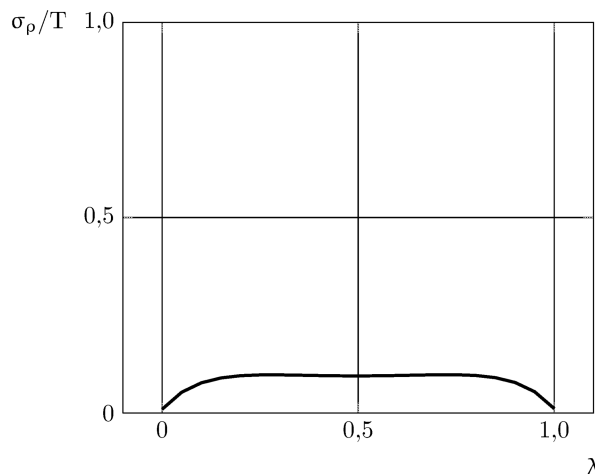


Рис. 3. Напряжения  $\sigma_p / T$  на оси между полостями при одноосном растяжении

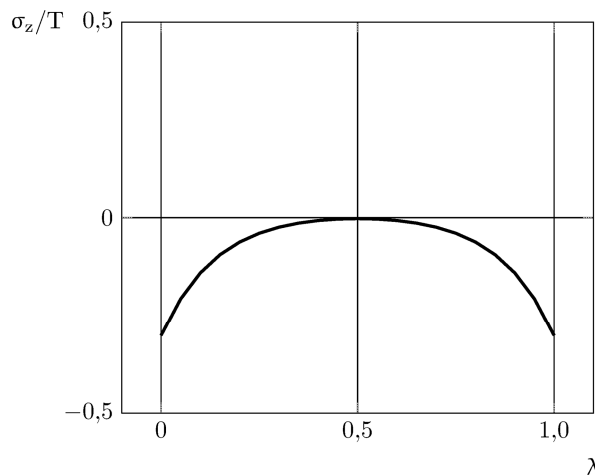


Рис. 4. Напряжения  $\sigma_z / T$  на оси между полостями при двухосном растяжении

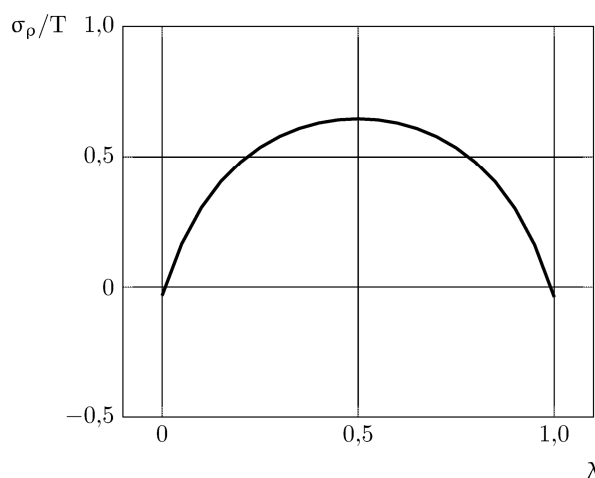


Рис. 5. Напряжения  $\sigma_p / T$  на оси между полостями при двухосном растяжении

## Заключение

Исследовано напряженно-деформированное состояние существенно неосесимметричного упругого тела. В отличие от сугубо численных моделей предложенный, в настоящей работе, подход позволяет строить приближенные аналитические модели, степень точности которых можно неограниченно улучшать. Приведенные выше результаты позволяют судить о его высокой эффективности. Разработанная, в настоящей работе, локальная модель напряженно-деформированного состояния пористого материала может использоваться для определения интегральных упругих модулей композиционных материалов с различными зернистыми неоднородностями. Модель допускает обобщение на случай регулярной периодической структуры материала.

## Литература

1. Федотов, А.Ф. Приложение модели деформирования пористых материалов к расчёту эффективных упругих модулей зернистых композитов [Текст] / А.Ф. Федотов // *Механика композиционных*

*ных материалов и конструкций*. – 2011. – Т. 17. – С. 3–18.

2. Николаев, А.Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*. – 2009. – Т. 2 (58). – С. 48–58.

3. Николаев, А.Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // *Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В.Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика*. – 2010. – Т. 922. – С. 4–19.

4. Николаев, А.Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А.Г. Николаев // *Доповіди НАН України*. – 1998. – № 2. – С. 78–83.

5. Николаев, А.Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе [Текст] / А.Г. Николаев. – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 - Ук 93.

*Поступила в редакцию 17.12.2012, рассмотрена на редколлегии 26.12.2012*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр. В.А. Ванин, ИПМаш НАН Украины, Харьков.

## РОЗВИТОК ЛОКАЛЬНОЇ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ

*О.Г. Ніколаєв, Є.А. Танчик*

Запропоновано локальну модель напружено-деформованого стану пористого матеріалу, яка ґрунтується на узагальненому методі Фур'є. Пори моделюються витягнутими сфероїдальними порожнинами. Розглядається випадок паралельного розташування пор у пружному просторі, який перебуває під дією одновісного і двовісного розтягу. Апарат узагальненого методу Фур'є дозволяє точно задовольнити граничним умовам на поверхнях пор і на нескінченності. Для визначення параметрів моделі отримано розв'язну нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Проведено чисельне моделювання, на підставі якого дано аналіз розподілу напружень в зоні між порами.

**Ключові слова:** локальна модель, граничні умови, напружено-деформований стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції, пористий матеріал.

## DEVELOPMENT OF A LOCAL STRESS STATE MODEL OF POROUS MATERIAL

*A.G. Nikolaev, E.A. Tanchik*

A local model of the stress-strain state of a porous material, based on the generalized Fourier method, is proposed. The pores are modeled as prolate spheroidal cavities. Consider the case of a parallel arrangement of pores in elastic space, which is under uniaxial and biaxial tension. The apparatus of generalized Fourier method accurately satisfy the boundary conditions on the surfaces of pores and at infinity. To determine the model parameters obtained a resolution infinite system of linear algebraic equations. A numerical simulation is held, based on which the analysis of stress distribution in the area between pores is given.

**Key words:** local model, boundary conditions, stress-strain state, generalized Fourier method, method of reduction, porous material.

**Николаев Алексей Георгиевич** – д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

**Танчик Евгений Андреевич** – аспирант каф. высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина; e-mail: eug.tanchik@yandex.ru.