

УДК 539.3:534.1:629.7.02:539.4

В.Б. МИНТЮК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЫКНОВЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В РАЗВЕТВЛЕННЫХ ОБЛАСТЯХ**

*Предложенная ранее автором идея построения систем координатных функций на отрезке использована для построения функций, применяемых в проекционных методах при решении краевых задач в областях, состоящих из системы отрезков. Построение таких функций проиллюстрировано на простом примере, а качество решений, доставляемых этими функциями с помощью метода Рэлея-Ритца, – на примере трех типов задач для гибкой рамы: линейного статического деформирования, потери устойчивости и геометрически нелинейного деформирования. Решение геометрически нелинейной задачи представлено в виде диаграммы равновесных состояний, где получены все ветви устойчивого равновесия. Относительная погрешность получаемых решений, оцениваемая как невязка в уравнениях равновесия узла, составляет сотые доли процента.*

**Ключевые слова:** система координатных функций, проекционный метод, геометрически нелинейная задача, гибкая рама.

**Введение**

Определение полей перемещений и напряжений, возникающих в силовых конструкциях от действия на них внешних силовых, инерционных, температурных и иных факторов, является одной из важнейших задач проектировщиков новой техники. Функции, описывающие искомые поля, находят в результате решения некоторых краевых задач, а точность их определения особенно актуальна при прочностных расчетах аэрокосмической техники. Именно здесь наиболее остро стоит проблема разрешения противоречивых требований – эффективности и безопасности.

В настоящее время в арсенале специалистов, занимающихся вопросами прочности, имеется достаточное количество методов решения краевых задач (за исключением аналитических): проекционные, проекционно-сеточные, конечно-разностные и другие. Самое широкое распространение в настоящее время благодаря своей простоте, алгоритмичности и универсальности получил метод конечного элемента.

Результаты, полученные в данной работе, направлены на развитие вариационного метода Рэлея-Ритца, а именно решение отмечаемой многими авторами проблемы построения координатной системы (базиса), отвечающей всем требованиям, к ней предъявляемым. Эта проблема для ряда краевых задач с классическими граничными условиями достаточно подробно рассмотрена в работе [1]. В работе [2] автором предложено семейство базисов, ортогональных на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  в метрике, поро-

даемой положительно определенным оператором

$$(-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В данной работе строится базис для решения проекционными методами краевых задач, описываемых нелинейным матричным оператором в обыкновенных производных в области, состоящей из системы соединенных между собой отрезков.

**1. Постановка задачи**

Рассматривается краевая задача в области, состоящей из  $K$  отрезков  $-1 < x < 1$ , имеющих смежные границы. Такая краевая задача описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений и набором граничных условий. Пусть для  $i$ -го отрезка дифференциальный оператор  $A$  имеет порядок  $2k$

$$A_i u_i = f_i, \quad (1)$$

т. е. на каждой границе отрезка  $x = \pm 1$  ставятся по  $k$  условий. Это могут быть или классические краевые условия (возможно, неоднородные), или условия сопряжения

$$B_m u_i = g_m, \quad m = 1 \dots M; \quad (2)$$

$$C_n u_i = D_n u_j, \quad n = 1 \dots N, \quad (3)$$

где  $f_i$  – известная функция;

$g_m$  – заданное значение на границе;

$u_i$  – решение данной краевой задачи, а  $u_j$  – решения на соседних участках;

$B_m, C_n, D_n$  – дифференциальные операторы,

порядок которых не превышает  $2k - 1$ . Диапазоны изменения индексов  $m$  и  $n$  таковы, что  $M+N=2k$ .

В краевой задаче (1) – (3) условия (2) представляют собой классические неоднородные краевые условия, а (3) – условия сопряжения. Кроме того, должны быть выполнены условия разрешимости задачи (условия согласования данных).

Если свойства дифференциальных операторов и известных функций, входящих в (1) – (3), таковы, что удастся построить энергетическое пространство  $H_A$ , порожаемое операторами  $A_i$ , то становится возможной вариационная постановка этой задачи: определение такого элемента пространства  $H_A$ , который доставлял бы стационарное значение некоторому функционалу

$$W = \sum_{i=1}^K F_i u_i \quad (4)$$

при дополнительных условиях (2), (3). Причем, основываясь на концепции слабого решения, из этих условий можно опустить естественные, т.е. те, которые содержат дифференциальный оператор порядка  $k$  и выше.

Применение метода Рэлея-Ритца подразумевает использование плотной последовательности (ее существование гарантируется сепарабельностью пространства  $H_A$ ) координатных функций, которые, естественно, должны принадлежать  $H_A$  и обязательно должны быть линейно независимыми. Не обязательные требования пока опустим. Принадлежность функций к пространству  $H_A$  кроме ограничений на гладкость этих функций требует от них выполнения как минимум главных граничных условий (2), (3), что ввиду многообразия последних является основной проблемой построения базисных функций.

## 2. Способ построения базиса

Построение базиса, используемого для решения вариационной задачи (4), (2), (3), как и в работе [2], основывается на идее, предложенной в работе [3], которая заключается в том, что задача отыскания стационарных точек функционала (4) с дополнительными условиями (2), (3) решается путем предварительного непосредственного удовлетворения этих условий.

Пусть имеется система линейно независимых, полных в пространстве  $H_A$  функций  $\varphi_i$ , но не принадлежащих ему по причине неудовлетворения ими условий (2), (3). Потребовав выполнения этих условий, аппроксимируя искомые функции рядами

$$u_i = \sum_{s=0} a_{is} \varphi_s; \quad u_j = \sum_{s=0} a_{js} \varphi_s, \quad (5)$$

приходим к системе  $M + N$  алгебраических уравнений. Если дифференциальные операторы  $B_m$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  линейные, то – к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} \sum_{s=0} a_{is} B_m \varphi_s|_{x=\pm 1} = g_m, \quad m = 1 \dots M; \\ \sum_{s=0} a_{is} C_n \varphi_s|_{x=\pm 1} = \sum_{s=0} a_{js} D_n \varphi_s|_{x=\pm 1}, \quad n = 1 \dots N. \end{cases} \quad (6)$$

Определяя из этой системы  $M + N$  неизвестных коэффициентов из  $a_{is}$ , которые необходимо выбрать таким образом, чтобы система (6) стала однозначно разрешимой, и, подставляя эти значения в исходные ряды (5), приходим к определению:

а)  $M$  функций  $\omega_M$ , удовлетворяющих неоднородным граничным условиям (2) и  $N$  функций  $\omega_N$ , удовлетворяющих условиям сопряжения (3);

б) новых базисных функций  $\psi_{is}$ , которые удовлетворяют однородным граничным условиям, следующим из (2) и (3).

Структура полученной функции имеет вид

$$u_i = \sum_{s=1}^N \omega_{Ns}(x) + \sum_{s=1}^M \omega_{Ms}(x, a_{j1}, a_{j2}, \dots) + \sum_{s=0} a_{i(s+M+N)} \psi_{is}(x, a_{j1}, a_{j2}, \dots). \quad (7)$$

Заметим, что к такому же виду приводятся функции с помощью широко используемого приема избавления от неоднородных граничных условий.

## 3. Иллюстративный пример

Рассмотрим краевую задачу, описываемую дифференциальным оператором  $\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \equiv f'' \right)$  в области, состоящей из двух отрезков  $-1 \leq x_{1,2} \leq 1$ :

$$\begin{cases} u_1''(x) = 2; \\ u_2''(x) = 4 \end{cases} \quad (8)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} u_1(-1) = 4; \quad u_1(+1) = u_2(-1); \\ u_2(+1) = 0; \quad u_1'(+1) = u_2'(-1). \end{cases} \quad (9)$$

Решение краевой задачи (8), (9) минимизирует функционал

$$F = \int_{-1}^1 (u_1')^2 dx + \int_{-1}^1 (u_2')^2 dx + 4 \int_{-1}^1 u_1 dx + 8 \int_{-1}^1 u_2 dx \quad (10)$$

с дополнительными условиями (9).

Данная несложная краевая задача допускает точное решение

$$\begin{cases} u_1(x) = x^2 - 4x - 1; \\ u_2(x) = 2x^2 + 2x - 4, \end{cases} \quad (11)$$

но, тем не менее, решим ее численно, используя метод Рэлея-Ритца. Для построения аппроксимации функций  $u_1$  и  $u_2$  воспользуемся исходными степенными рядами

$$u_1(x) = \sum_{i=0} a_i x^i; \quad u_2(x) = \sum_{i=0} b_i x^i. \quad (12)$$

Устраним в данном случае дополнительные условия (9) путем их непосредственного выполнения суммами (12)

$$\begin{cases} \sum_{i=0} a_i (-1)^i = 4; & \sum_{i=0} a_i = \sum_{i=0} b_i (-1)^i; \\ \sum_{i=0} b_i = 0; & \sum_{i=0} a_i i = \sum_{i=0} b_i i (-1)^{i+1}. \end{cases} \quad (13)$$

Если в качестве неизвестных выбрать, например,  $a_0, a_1, b_0, b_1$ , то по отношению к ним придем к следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 = 4 - \sum_{i=2} a_i (-1)^i; \\ b_0 + b_1 = -\sum_{i=2} b_i; \\ a_0 + a_1 - b_0 + b_1 = \sum_{i=2} b_i (-1)^i - \sum_{i=2} a_i; \\ a_1 - b_1 = \sum_{i=2} b_i i (-1)^{i+1} - \sum_{i=2} a_i i. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 + \frac{1}{4} \sum_{i=2} \left\{ a_i \left( 3(-1)^{i+1} - 1 - 2i \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_i \left( (-1)^i (1 - 2i) - 1 \right) \right\}; \\ a_1 &= -1 + \frac{1}{4} \sum_{i=2} \left\{ a_i \left( (-1)^i - 1 - 2i \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_i \left( (-1)^i (1 - 2i) - 1 \right) \right\}; \\ b_0 &= 1 + \frac{1}{4} \sum_{i=2} \left\{ a_i \left( (-1)^{i+1} + 1 - 2i \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_i \left( (-1)^{i+1} (1 + 2i) - 3 \right) \right\}; \\ b_1 &= -1 + \frac{1}{4} \sum_{i=2} \left\{ a_i \left( (-1)^i - 1 + 2i \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_i \left( (-1)^i (1 + 2i) - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (2.14), после перегруппировки слагаемых будем иметь

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \omega_1 + \sum_{i=2} b_i \psi_i^b + \sum_{i=2} a_i (\varphi_i^a + x^i); \\ u_2(x) &= \omega_2 + \sum_{i=2} a_i \psi_i^a + \sum_{i=2} b_i (\varphi_i^b + x^i), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\omega_1 = 3 - x$ ,  $\omega_2 = 1 - x$ ;

$$\psi_i^b = \left[ (-1)^i (1 - 2i) - 1 \right] \frac{1-x}{4};$$

$$\psi_i^a = \left[ (-1)^{i+1} + 1 - 2i \right] \frac{1-x}{4};$$

$$\varphi_i^a = (-1)^{i+1} + \left[ (-1)^i - 1 - 2i \right] \frac{1-x}{4};$$

$$\varphi_i^b = -4 + \left[ (-1)^{i+1} (1 + 2i) + 1 \right] \frac{1-x}{4}.$$

Функции (14) удовлетворяют всем условиям (9) при любых значениях  $a_i$  и  $b_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ). Дальнейшее использование процедуры Рэлея-Ритца приводит к двум ненулевым значениям коэффициентов  $a_2 = 1$  и  $b_2 = 2$ , которые определяют решение, полностью совпадающее с точным (11).

Аналогичная процедура построения функций  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  без удовлетворения четвертого условия в (9) (оно естественное) приводит к следующему их виду:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \omega_1 + \sum_{i=1} b_i \psi_i^b + \sum_{i=2} a_i (\varphi_i^a + x^i); \\ u_2(x) &= \sum_{i=1} b_i (x^i - 1). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\omega_1 = 2(1-x)$ ;

$$\psi_i^b = \left[ (-1)^i - 1 \right] \frac{1+x}{2};$$

$$\varphi_i^a = \frac{1}{2} \left( (-1)^{i+1} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left( (-1)^i - 1 \right) x.$$

Минимизация функционала  $F$  (10) на функциях (15) приводит к решению  $a_2 = 1$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 2$ , и остальные коэффициенты равны нулю. Эти коэффициенты определяют функции (15), совпадающие с точным их значением (11).

Недостатком функций, построенных таким образом, является то, что функция, аппроксимирующая решение в данной области, зависит от неизвестных коэффициентов в аппроксимации решения соседней области. От этого недостатка можно избавиться, если ввести некоторые дополнительные неизвестные. Так, будем считать, что искомые функции на смежной границе принимают значение  $U$ , а их производные —  $N$ , тогда граничные условия (9) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} u_1(-1) = 4; & u_2(+1) = 0; \\ u_1(+1) = U; & u_2(-1) = U; \\ u_1'(+1) = N; & u_2'(-1) = N. \end{cases} \quad (16)$$

Если теперь применить описанную выше процедуру, то, исключив неизвестные  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  и  $b_2$ , придем к двум СЛАУ. После их решения, подстановки найденных значений в ряды (5) и перегруппировки придем в итоге к следующему виду функций:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \omega_1 + U\omega_{U1} + N\omega_{N1} + \sum_{i=3} a_i \varphi_i^a; \\ u_2(x) &= U\omega_{U2} + N\omega_{N2} + \sum_{i=1} b_i \varphi_i^b. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь, как можно видеть, функции

$$\omega_1 = (1-x)^2;$$

$$U\omega_{U1} = U \frac{1}{4}(1+x)(3-x);$$

$$N\omega_{N1} = N \frac{1}{2}(1-x^2);$$

$$U\omega_{U2} = U \frac{1}{4}(1-x)(3+x);$$

$$N\omega_{N1} = N \frac{1}{2}(1-x^2)$$

удовлетворяют соответствующим неоднородным граничным условиям (16), а функции  $\varphi_i^a$  и  $\varphi_i^b$  в рядах (17) – всем граничным условиям (16) как однородным.

Точное решение, доставляемое методом Рэлея-Ритца, определяется ненулевыми значениями неизвестных  $U = -4$ ,  $N = -2$ .

Если не выполнять естественное граничное условие, то аналогичная процедура приведет к следующему виду функций:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \omega_1 + U\omega_{U1} + \sum_{i=3} a_i \varphi_i^a; \\ u_2(x) &= U\omega_{U2} + \sum_{i=1} b_i \varphi_i^b. \end{aligned} \quad (18)$$

Функции  $\omega_1 = 2(1-x)$ ,  $U\omega_{U1} = U \frac{(1+x)}{2}$ ,

$U\omega_{U2} = U \frac{(1-x)}{2}$  удовлетворяют неоднородным

главным граничным условиям (16), а  $\varphi_i^a$  и  $\varphi_i^b$  – им же, как однородным. Некоторые из полученных функций изображены на рис. 1.

Здесь решение, полученное методом Рэлея-Ритца и также совпадающее с точным (11), дается ненулевыми неизвестными  $U = -4$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 2$ .

Необходимо отметить, что функции  $\frac{\omega_1}{4}$ ,  $\omega_{U1}$ ,  $\omega_{U2}$ , являются не чем иным, как функциями формы метода конечного элемента.

Таким образом, анализируя структуру функций (17) или (18), заключаем, что использованная здесь процедура построения базиса приводит к финитному базису МКЭ, который уточняется рядом аналитических функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям. Эта идея не нова. Так, в работах [4 – 6] Т. Н. Н. Рипан для аппроксимации перемещений конечного элемента использовал функции,

имеющие большее количество неопределенных коэффициентов, чем число обобщенных перемещений. Функции перемещений выбирались в виде степенных рядов. В работе [7] эти функции задавались в виде степенных рядов и рядов Фурье. Неизвестные  $a_i$  и  $b_i$  (в наших обозначениях) доопределялись из условия минимума потенциальной энергии элемента. С. А. Халилов [8, 9] уточнил известный конечный элемент Богнера-Фокса-Шмита путем введения четырех дополнительных функций, которые определялись как решение задачи Дирихле для бигармонического оператора.

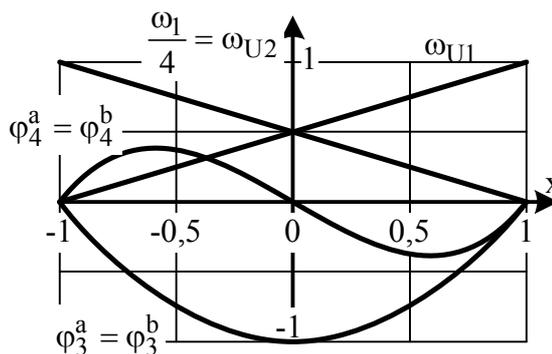


Рис. 1. Координатные функции

Принципиальное различие такого подхода и подхода, изложенного здесь, заключается в том, что упомянутые выше авторы исключали "внутренние" неизвестные на этапе проектирования конечного элемента. Следовательно, для каждой из конкретных задач, отличающихся выражением потенциальной энергии (уравнений равновесия) и количеством членов, удерживаемых в рядах, необходим свой конечный элемент (в современных вычислительных пакетах, базирующихся на МКЭ, такие конечные элементы не нашли своего применения). Здесь один раз построенные функции, обладая достаточной гладкостью, могут использоваться для решения любых краевых задач, имеющих одинаковые граничные условия, т. е. один раз задав аппроксимацию искомым функций, можно использовать проекционные методы для решения задач определения НДС (линейного, нелинейного), устойчивости и др.

Обратим внимание на то, что в рядах (17) и (18) вид функций  $\varphi_i$  не приведен. Это связано с тем, что в дальнейшем они не используются, поскольку система, составленная из них, является неминимальной. Вместо них используются упомянутые выше семейства функции, предложенные автором [2], или же функции, построенные С. А. Халиловым [8], которые будучи ортогональными в исходной метрике, являются квазиортогональными в метрике бигармонического оператора.

### 4. Исследование нелинейного деформирования гибкой рамы

В качестве приложения описанной методики к решению практических задач рассматривается исследование деформирования гибкой рамы, изображенной на рис. 2.

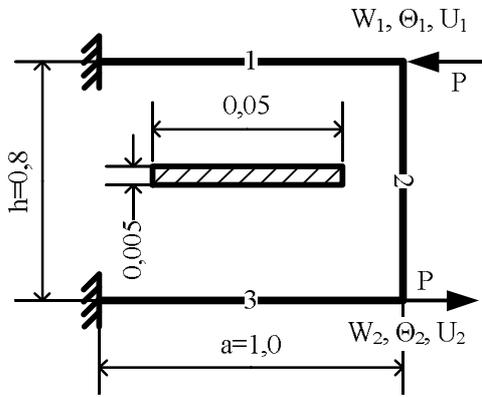


Рис. 2. Гибкая рама

Рама представляет собой три жестко соединенные балки одинакового поперечного сечения, изготовленные из одинакового материала, подчиняющегося закону Гука с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Длины элементов, форма и размеры поперечного сечения указаны в метрах на рис. 2.

Если ввести безразмерную систему координат  $x_i = \frac{x_i \pi}{l_i}$  ( $l_1 = l_3 = \frac{a}{2}$ ,  $l_2 = \frac{h}{2}$ ), как показано на рис. 3, то главные граничные условия для представительного элемента такой конструкции принимают вид [9]

$$\begin{aligned} u|_{-1} &= U_m; & u|_1 &= U_n; \\ w|_{-1} &= W_m; & w|_1 &= W_n; \\ \arctg \frac{w'}{1+u'}|_{-1} &= \theta_m; & \arctg \frac{w'}{1+u'}|_1 &= \theta_n, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $u(x)$ ,  $w(x)$  – безразмерные (отнесенные к половине длины элемента  $l$ ) функции перемещений осевой линии балки соответственно вдоль оси  $x$  и  $z$ ;

$U_m, W_m, \theta_m, U_n, W_n, \theta_n$  – безразмерные перемещения краев балки, положительные направления которых показаны на рис. 3.

Руководствуясь сказанным в пп. 2, 3, построим функции, которые удовлетворяют условиям (19):

$$\begin{aligned} u &= U_m \bar{\varphi}_m + U_n \bar{\varphi}_n + \sum_{k=0}^0 U_k \varphi_k; \\ w &= W_m \bar{\psi}_m + W_n \bar{\psi}_n + \sum_{k=0}^0 W_k \psi_k + \\ &+ \arctg \theta_m (1+u')|_{-1} \bar{\vartheta}_m + \arctg \theta_n (1+u')|_1 \bar{\vartheta}_n, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\bar{\varphi}_m = \frac{1}{2}(1-x)$ ;  $\bar{\varphi}_n = \frac{1}{2}(1+x)$ ;

$\varphi_k = P_{k+2} - P_k$ ;

$\bar{\psi}_m = \frac{1}{4}(x+2)(x-1)^2$ ;  $\bar{\psi}_n = \frac{1}{4}(x-2)(x+1)^2$ ;

$\bar{\vartheta}_m = \frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2$ ;  $\bar{\vartheta}_n = \frac{1}{4}(x-1)(x+1)^2$ ;

$\psi_k = P_{k+4} - \frac{2(2k+5)}{2k+3} P_{k+2} + \frac{2k+7}{2k+3} P_k$ ;

$P_k$  – полиномы Лежандра;

$U_m, U_n, U_k, W_m, W_n, \theta_m, \theta_n, W_k$  – коэффициенты, подлежащие определению.

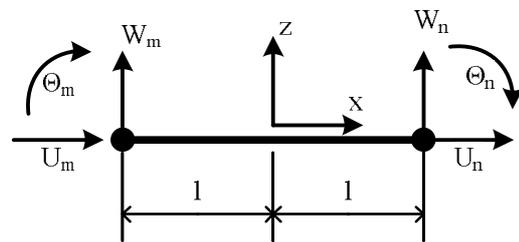


Рис. 3. Система координат и положительные направления перемещений

По структуре функций (20) отметим то, что функция  $w$  зависит от неизвестных констант, входящих в определение функции  $u$ . Это связано с видом граничных условий, присутствующих в геометрически нелинейной задаче (19), а именно обеспечением неразрывности угла поворота на границе (пятое и шестое условия). В случае линейной постановки задачи имеем  $\text{tg } \theta \approx \theta \approx w'$ , и функция  $w$  в (20) принимает вид

$$w = \frac{W_m}{1} \bar{\psi}_m + \frac{W_n}{1} \bar{\psi}_n + \theta_m \bar{\vartheta}_m + \theta_n \bar{\vartheta}_n + \sum_{k=0}^0 \frac{W_k}{1} \psi_k.$$

Если, кроме этого, в формулах (20) убрать суммы, то придем к функциям классического балочного конечного элемента.

Чтобы соединить элементы в единую конструкцию, необходимо в функциях (20) положить:

$- W_m = \theta_m = U_m = 0, \quad W_n = W_1, \quad \theta_n = \theta_1, \quad U_n = U_1$  для первого элемента;

$- W_m = U_1, \theta_m = \theta_1, \quad U_m = -W_1, W_n = U_2, \theta_n = \theta_2, U_n = -W_2$  для второго;

$- W_m = \theta_m = U_m = 0, \quad W_n = W_2, \quad \theta_n = \theta_2, \quad U_n = U_2$  для третьего.

Теперь для получения решений конкретных задач минимизируем на системе функций (20) соответствующий функционал:

– статический линейный расчет

$$W_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{-1}^1 \frac{E_i I_i}{I_i} (w_i'')^2 + \frac{E_i F_i}{I_i^3} (u_i')^2 dx \right] - P(U_2 - U_1); \quad (21)$$

– расчет бифуркационной потери устойчивости

$$W_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{-1}^1 \frac{E_i I_i}{I_i} (w_i'')^2 + \frac{E_i F_i}{I_i^3} (u_i')^2 dx \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{-1}^1 N_0 (w_i')^2 dx \right]; \quad (22)$$

– геометрически нелинейный расчет [9]

$$W_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{-1}^1 \frac{E_i I_i}{I_i} \left( \frac{(1+u_i') w_i'' - w_i' u_i''}{(1+u_i')^2 + (w_i')^2} \right)^2 dx + \int_{-1}^1 \frac{E_i F_i}{I_i^3} \left( \sqrt{(1+u_i')^2 + (w_i')^2} - 1 \right)^2 dx \right] - P_1(U_2 - U_1).$$

Результаты задачи линейного деформирования и задачи устойчивости показаны на рис. 4.

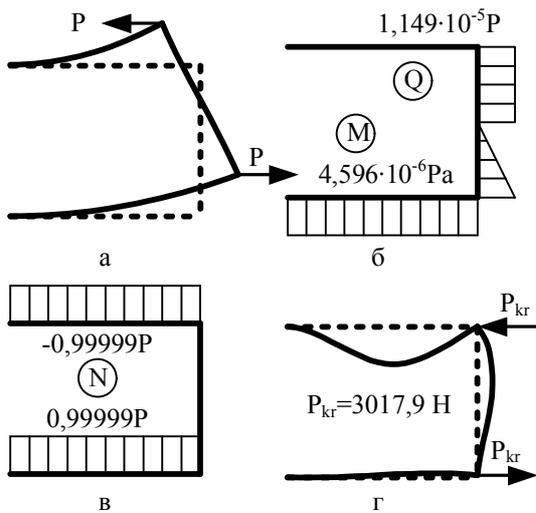


Рис. 4. Результаты линейного расчета и расчета устойчивости

Точное решение статической линейной задачи получается, если в функциях (20) оставить только  $\varphi_m, \varphi_n, \psi_m, \psi_n, \vartheta_m, \vartheta_n$ , т.е. один конечный элемент на одной балке приводит к точному решению. Понятно, что все результаты такого расчета пропорциональны величине силы P.

Перемещения осевой линии рамы от действия единичной силы, увеличенные в десять миллионов раз, изображены на рис. 4, а. На рис. 4, б совмещены эпюры поперечной силы и изгибающего момента, которые на вторую половину рамы необходимо продлить соответственно по симметрии и косой

симметрии относительно оси рамы. Можно показать, что максимум модуля моментных нормальных напряжений пренебрежимо мал в сравнении с напряжениями от действия продольной силы, эпюры распределения которой изображены на рис. 4, в.

Наименьшая положительная величина критической силы составляет  $P_{kr} = 3017,9 \text{ Н}$ , а соответствующая ей форма потери устойчивости показана на рис. 4 г. Отметим, что пять верных знаков в значении  $P_{kr}$  получаются при удержании всего 17 неизвестных, для получения результата с такой же точностью в МКЭ понадобилось введение более 100 неизвестных.

Результаты полностью геометрически нелинейного расчета изображены в виде диаграммы равновесных состояний на рис. 5. По оси ординат отложены значения прикладываемой силы в долях от первой критической  $k = \frac{P}{P_{kr}}$ , по оси абсцисс:

справа – норма вектора, составленного из коэффициентов, входящих в функции (20); слева – значение полной потенциальной энергии. Перечеркнутые ветви диаграммы соответствуют неустойчивым состояниям. Устойчивость состояния определялась по знаку отношения наибольшего собственного значения матрицы Гессе к наименьшему. Здесь также приведены формы деформированных рам в соответствующих точках диаграммы. На выносах указан масштаб увеличения перемещений. Если масштаб не указан, то он равен 1:1.

По приведенным диаграммам можно проследить, как деформируется рама, если в процессе нагружения или разгрузки не вносятся какие-либо дополнительные возмущения.

При увеличении нагрузки от нулевого значения до половины критического ( $k = 0,5$ ) наблюдается линейная зависимость перемещения от нагрузки. Дальнейшее увеличение силы до величины  $k = 0,8$  сопровождается незначительным отклонением от линейного закона. После превышения этого значения силы отклонение от линейного закона становится существенным. Эта часть диаграммы равновесных состояний в увеличенном масштабе изображена на рис. 6, где пунктиром показаны графики изменения полной потенциальной энергии.

Как можно видеть, после превышения значения нагрузки  $P = 0,95 P_{kr}$  перемещения начинают сильно увеличиваться при незначительном росте силы. Наибольшее значение силы достигается в точке А, и оно на 0,7% меньше критического. При этом наблюдается малый прогиб верхней балки выпуклостью вниз, т.е. в ту же сторону, что и в начале нагружения (рис. 4, а).

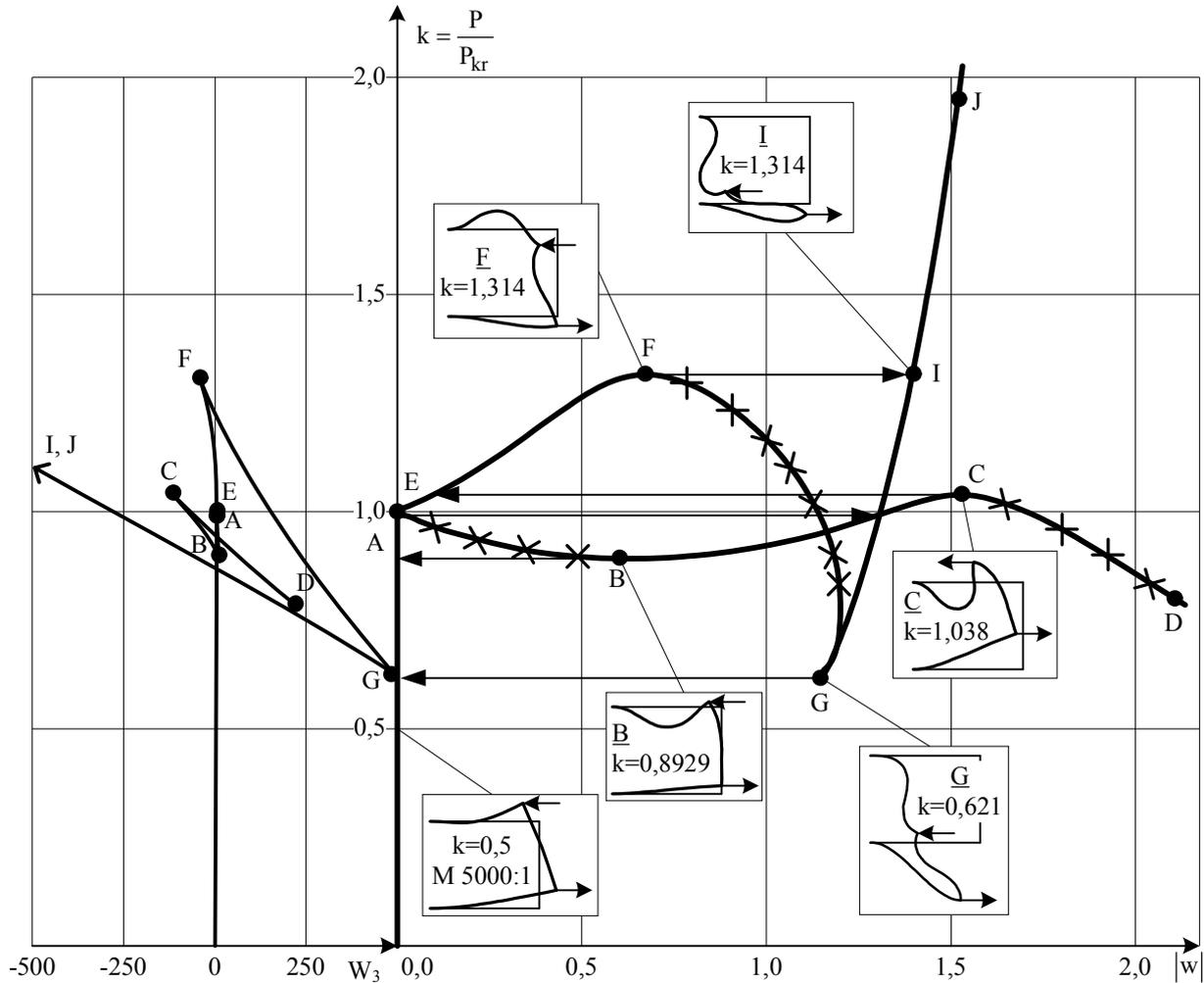


Рис. 5. Диаграмма равновесных состояний и значение полной потенциальной энергии

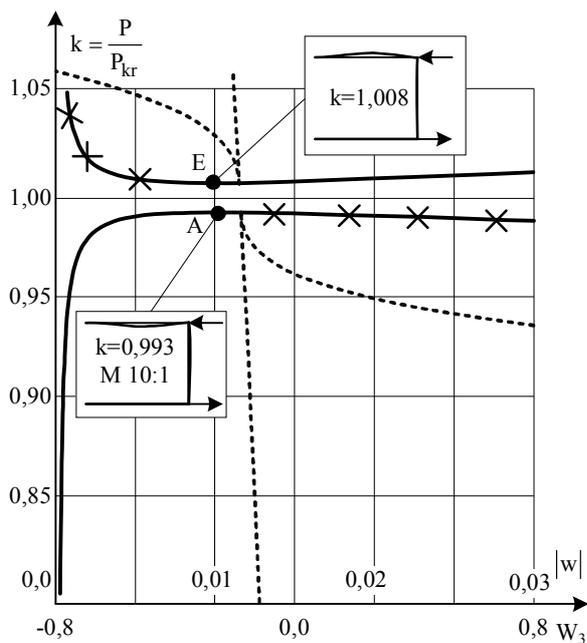


Рис. 6. Диаграмма равновесных состояний и значение полной потенциальной энергии

При дальнейшем увеличении нагрузки возможны два варианта поведения конструкции. Если задать достаточное ее приращение ( $k > 1,008$ ), то возможен перескок на другую ветвь равновесных состояний (из точки А в точку Е, рис. 6), которая характеризуется деформированием сжатого элемента уже выпуклостью вверх. Если приращение силы недостаточное, то перескок произойдет на устойчивую ветвь этой же кривой – ветвь ВС рис. 5, где возможно увеличение силы до значения  $k = 1,038$  в точке С. Дальнейшее увеличение силы по этой ветви невозможно, поэтому, вероятнее всего, произойдет перескок из точки С на ветвь устойчивых состояний EF рис. 5. Если, находясь на ветви ВС, начать разгрузку системы, то возможно уменьшение силы до значения  $k = 0,8929$  (точка В), после чего рама скачкообразно перейдет в состояние, близкое к тому, которое задает линейный закон (ветвь ОА).

На ветви EF возможен рост внешней силы до значения  $k = 1,314$  (точка F), чему сопутствует увеличение стрелы прогиба верхней балки и перемещение верхнего правого узла. Далее происходит пере-

скок на ветвь GJ, которая характеризуется практически горизонтальным расположением изначально вертикальной балки. Дальнейшее продвижение по этой ветви сопровождается тем, что узлы рамы стремятся занять положение на одной горизонтальной прямой. Разгрузка из этого состояния может продолжаться до точки G ( $k=0,621$ ), после чего происходит перескок на ветвь 0A.

Таким образом, в диапазоне изменения внешней силы от 0 до 0,621 возможно только одно равновесное состояние, близкое к тому, что дает линейное решение. При изменении значений силы от 0,621 до 1,314 возможны две или три различные формы равновесия, но наименьшим значением полной потенциальной энергии обладает форма, приведенная на ветви GJ (рис. 5), которая становится единственно возможной при  $k > 1,314$ .

На рис. 7 показаны эпюры распределения внутренних сил и момента в элементах рамы вблизи точки F при  $k=1,313$ . Эти функции определяются формулами [9]:

$$M = -EI \frac{(1+u')w'' - w'u''}{(1+u')^2 + (w')^2};$$

$$N = EF \left( \sqrt{(1+u')^2 + (w')^2} - 1 \right);$$

$$Q = \frac{M'}{\sqrt{(1+u')^2 + (w')^2}},$$

и показаны соответственно на рис. 7, а, б и в. Точность определения этих величин можно оценить по невязке в уравнениях равновесия, например, верхнего узла (рис. 7, г):

$$3089,7 + 228,4 - 3962,5 \cos 33,16^\circ = 0,9;$$

$$837,5 + 1330,4 - 3962,5 \sin 33,16^\circ = 0,5,$$

т.е. относительные погрешности составляют сотые доли процентов. Погрешность определения изгибающих моментов еще меньше.

Хотя в данном конкретном примере наибольшие напряжения, возникающие в элементах рамы, превышают предел пропорциональности большинства существующих конструкционных материалов, это не умаляет значения полученных здесь результатов в том смысле, что всегда можно указать такую величину изгибной податливости балки, чтобы оставаться в пределах действия закона Гука.

### Заключение

1. Предложена регулярная процедура построения аналитических функций, которые позволяют применять метод Рэлея-Ритца для решения краевых задач в разветвленных областях.

2. Процедура получения результата обладает

численной устойчивостью, а сами результаты – высокой точностью. Это обусловлено использованием при построении решения базисных функций, которые отвечают всем предъявляемым к ним требованиям.

3. При величинах нагрузок, близких к критическим, поведение конструкции и отдельных элементов существенно различное. Так, для рассмотренной модели конструкции оказывается возможным устойчивое равновесное состояние, отличное от исходного, уже при  $0,621P_{кр}$ .

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить С. А. Халилова за постоянное внимание к работе и ряд полезных замечаний.

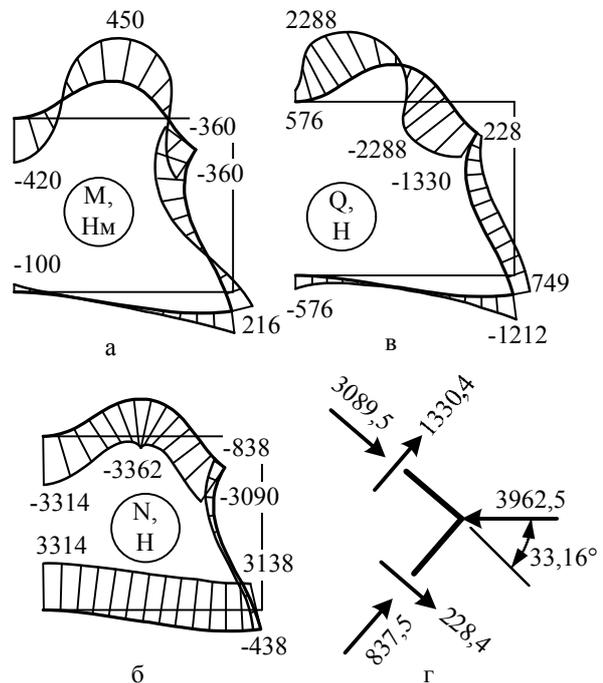


Рис. 7. Эпюры внутренних сил и момента в окрестности точки F при  $k = 1,313$  и равновесие узла

### Список литературы

1. Михлин, С.Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С.Г. Михлин. – М. : Наука, 1966. – 432 с.
2. Минтюк, В.Б. Ортонормированный базис для одномерных краевых задач [Текст] / В.Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2007. – № 5 (41). – С. 32–36.
3. Минтюк, В.Б. Построение одномерного базиса приближенного анализа [Текст] / В.Б. Минтюк // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. / М-во образования и науки Украины, Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". – Х., 2007. – Вып. 35. – С. 143–148.
4. Pian, Т.Н.Н. Derivation of Element Stiffness

*Matrices [Text] / T.H.H. Pian // AIAA Journal. – 1964. – Vol. 2, N 3. – P. 576–577.*

5. Pian, T.H.H. *Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions [Text] / T.H.H. Pian // AIAA Journal. – 1964. – Vol. 2, N 7. – P. 1333–1336.*

6. Pian, T.H.H. *Element Stiffness-Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses, Proceeding of Conference on Matrix Methods In Structural Mechanics [Text] / T.H.H. Pian // Rept. AFFDL-TR-66-88, Air Force Flight Dynamics Lab. – 1965. – P. 457–477.*

7. Крахула, Дж.Л. *Использование рядов Фурье в методе дискретных элементов [Текст] / Дж.Л. Крахула, Дж.Ф. Полемус // Ракетная техника и космонавтика : пер. с англ. – М. : Мир, 1968. – Т. 6, № 4. – С. 210–211.*

8. Халилов, С.А. *Изгиб прямоугольной ортотропной пластины при заданных на границе перемещениях [Текст] / С.А. Халилов // Вопросы проек-*

*тирования и производства конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. – Х. : ХАИ, 1987. – С. 31–39.*

9. Халилов, С.А. *Решение в прямоугольнике статической задачи теории упругости при заданных на границе напряжениях [Текст] / С.А. Халилов // Вопросы проектирования самолетных конструкций : темат. сб. науч. тр. – Х. : ХАИ, 1982. – Вып. 3. – С. 120–127.*

10. Халилов, С.А. *Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С.А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. – Х. : ХАИ, 1978. – Вып. 5. – С. 46–56.*

11. Халилов, С.А. *Плоский нелинейный изгиб балки. Вывод замкнутой системы уравнений [Текст] / С.А. Халилов, В.Б. Минтюк // Авиационно-космическая техника и технология. – 2011. – № 1 (78). – С. 39–45.*

*Поступила в редакцию 5.06.2013, рассмотрена на редколлегии 12.06.2013*

**Рецензенты:** д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой прочности летательных аппаратов П.А. Фомичев, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

## **ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЕКЦІЙНИХ МЕТОДІВ ВИРІШЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ЗВИЧАЙНИХ ПОХІДНИХ В РОЗГАЛУДЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ**

**В.Б. Минтюк**

Запропоновану раніше ідею побудови систем координатних функцій на відрізку використано для побудови функцій, які застосовуються в проекційних методах при вирішенні крайових задач в областях, що складаються із системи відрізків. Побудова функцій ілюструється на простому прикладі, а якість рішень, що доставляються цими функціями за допомогою методу Релея-Рітца, – на прикладі вирішення трьох типів задач для гнучкої рами: лінійного статичного деформування, втрати стійкості та геометрично нелінійного деформування. Вирішення геометрично нелінійної задачі наведено у вигляді діаграми рівноважних станів, де отримано всі гілки стійкої рівноваги. Відносна похибка отриманих рішень, яку оцінено як похибку рівноваги вузла, становить соті частки проценте.

**Ключові слова:** система координатних функцій, проекційний метод, геометрично нелінійна задача, гнучка рама.

## **APPLICATION OF PROJECTION METHODS FOR SOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN ORDINARY DERIVATIVES IN BRANCHED REGIONS**

**V.B. Mintyuk**

The idea proposed by the author previously of coordinate functions systems construction on the segment is used for constructing functions applied in projection methods when solving boundary-value problems in regions consisting of a segment system. The construction of these functions is illustrated by the simple example, and the quality of the solutions delivering by these functions with the help of Rayleigh-Ritz method on the example of three tasks types for flexible frame: linear static deformation, stability loss and geometrically nonlinear deformation. The solution of a geometrically nonlinear problem is represented as an equilibrium states chart, where all branches of sustainable equilibrium are obtained. The relative accuracy of the received solutions, which is estimated as the discrepancy in the node equilibrium equations, is a hundredth of a percent.

**Keywords:** basis function, direct variational method, geometrically nonlinear problem, flexible frame.

**Минтюк Виталий Борисович** – канд. техн. наук, докторант кафедры прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: minvit@mail.ru.