

УДК 539.3:534.1

Н.Г. ШУЛЬЖЕНКО, П.П. ГОНТАРОВСКИЙ

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

## РЕАКЦИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Рассматривается передача возмущений в разветвленных оболочках вращения, вызванных кратковременными импульсными сосредоточенными нагрузками при расстыковке. Задача решается полуаналитическим методом конечных элементов в сочетании с интегрированием уравнений движения методом Ньюмарка. Решение в окружном направлении аппроксимируется рядами Фурье. Приводятся результаты расчетов конструкций, состоящих из оболочек вращения, при четырех синхронных импульсных нагрузках длительностью 100 мкс. Результаты показывают, что распространяющиеся возмущения в рассмотренных конструкциях имеют волновой характер.

**Ключевые слова:** оболочки вращения, импульсные воздействия, метод конечных элементов, метод Ньюмарка, распространение возмущений.

### Введение

Космические аппараты и другие объекты современной техники зачастую представляют собой произвольно соединенные разветвленные оболочки вращения, которые подвергаются кратковременным вибрационным воздействиям, например, при расстыковке. При этом уровни передаваемого динамического воздействия на элементы системы и установленные приборы не должны превышать допустимые.

При кратковременных импульсных воздействиях продолжительностью 10 – 100 мкс в конструкции возбуждаются низкочастотные и высокочастотные составляющие колебательных движений. Для прогнозирования распространения возмущений по конструкции разработана методика, основанная на конечноэлементном представлении сложной механической системы в сочетании с непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений движения методом Ньюмарка.

### Результаты исследований

Рассматриваемые конструкции представляются набором оболочек вращения – конических, цилиндрических, торовых, сферических, эллиптических, эллипсо-торовых и круглых пластин линейнопеременной толщины, соединенных произвольным образом. Нагрузки распределяются на элементах или сосредотачиваются на свободных концах и стыках, где могут быть заданы и кинематические возмущения, изменяющиеся во времени.

Деформирование оболочек вращения описывается с использованием гипотез Кирхгофа-Лява для

элементов переменной толщины с учетом кольцевых сосредоточенных масс. Перемещения элементов рассматриваются в местной системе координат  $sO\zeta$ , ось  $s$  которой направлена по касательной в сторону обхода меридиана, а ось  $\zeta$  – по нормали к срединной поверхности оболочки. Окружная координата  $\theta$  является общей для местной и цилиндрической систем координат (рис. 1).

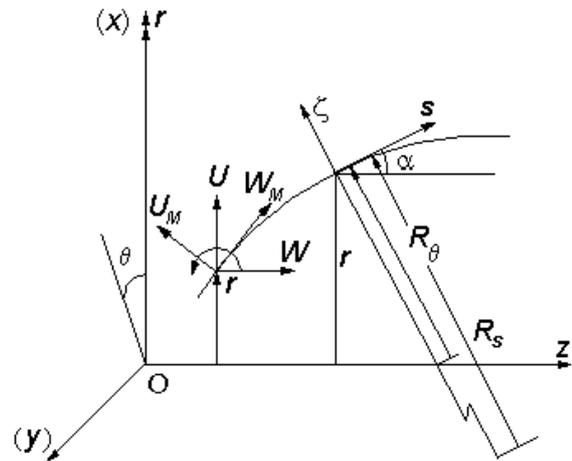


Рис. 1. Перемещения срединной поверхности оболочки

Компоненты деформации срединной поверхности оболочки в цилиндрической системе координат представляются зависимостями [1]

$$\varepsilon_s(s, \theta, t) = \frac{\partial W_M(s, \theta, t)}{\partial s} + \frac{U_M(s, \theta, t)}{R_s(s)},$$

$$\varepsilon_\theta(s, \theta, t) = \frac{1}{r(s)} \left[ \frac{\partial W_M(s, \theta, t)}{\partial \theta} + \right.$$

$$+U_M(s, \theta, t) \cos \alpha(s) + W_M(s, \theta, t) \sin \alpha(s)],$$

$$\varepsilon_{\theta S}(s, \theta, t) = \frac{\partial V(s, \theta, t)}{\partial s} + \frac{V(s, \theta, t)}{r(s)} \sin \alpha(s) + \frac{\partial W_M}{r(s) \partial \theta},$$

где  $W_M, U_M, V_M$  – перемещения срединной поверхности оболочки в направлении осей  $s, \zeta, \theta$  соответственно;  $R_S$  – радиус кривизны срединной поверхности меридиональной плоскости;

$$\frac{1}{R_S} = -\frac{d\alpha(s)}{ds};$$

$\alpha$  – угол наклона между осями  $z$  и  $s$ ;

$r(s)$  – радиус срединной поверхности;

$t$  – время.

Изменение кривизны и кручения срединной поверхности оболочки определяется формулами [1]:

$$\chi_S(s, \theta, t) = -\frac{\partial \Theta_S(s, \theta, t)}{\partial s},$$

$$\chi_\theta(s, \theta, t) = \frac{1}{r(s)} \frac{\partial \Theta_\theta(s, \theta, t)}{\partial \theta} - \frac{\sin \alpha(s)}{r(s)} \Theta_S(s, \theta, t),$$

где  $\Theta_s, \Theta_\theta$  – углы поворота нормали к срединной поверхности в меридиональном и окружном направлениях:

$$\Theta_S(s, \theta, t) = \frac{\partial U_M(s, \theta, t)}{\partial s} - \frac{W_M(s, \theta, t)}{R_S(s)},$$

$$\Theta_\theta(s, \theta, t) = \frac{V(s, \theta, t) \cos \alpha(s)}{r(s)} - \frac{1}{r(s)} \frac{\partial U_M(s, \theta, t)}{\partial \theta}.$$

Перемещения и деформации произвольной точки оболочки находятся по формулам:

$$U_M(s, \theta, \zeta, t) = U_M(s, \theta, t),$$

$$W_M(s, \theta, \zeta, t) = W_M(s, \theta, t) + \zeta \cdot \Theta_S(s, \theta, t),$$

$$V_M(s, \theta, \zeta, t) = V_M(s, \theta, t) + \zeta \cdot \Theta_\theta(s, \theta, t)$$

$$\varepsilon_S(s, \theta, \zeta, t) = (\varepsilon_S(s, \theta, t) + \zeta \cdot \chi_S(s, \theta, t)) / (1 + \zeta / R_S),$$

$$\varepsilon_\theta(s, \theta, \zeta, t) = (\varepsilon_\theta(s, \theta, t) + \zeta \cdot \chi_\theta(s, \theta, t)) / (1 + \zeta / R_\theta),$$

$$2\varepsilon_{s\theta}(s, \theta, \zeta, t) =$$

$$= \frac{\varepsilon_{s\theta}(s, \theta, t) \left( 1 - \frac{\zeta^2}{R_S R_\theta} \right) + 2\zeta \left[ 1 + \frac{\zeta}{2} \left( \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_\theta} \right) \right] \chi_{s\theta}(s, \theta, t)}{\left( 1 + \frac{\zeta}{R_S} \right) \left( 1 + \frac{\zeta}{R_\theta} \right)}.$$

После разбивки на криволинейные конечные элементы координаты точек меридиана аппроксимируются зависимостями:

$$r(\xi) = r_i \varphi_i(\xi) + r_j \varphi_j(\xi) + r'_i \psi_i(\xi) l_i + r'_j \psi_j(\xi) l_j,$$

$$z(\xi) = z_i \varphi_i(\xi) + z_j \varphi_j(\xi) + z'_i \psi_i(\xi) l_i + z'_j \psi_j(\xi) l_j,$$

где  $\xi = s / l_i$  – относительная координата вдоль  $s$ ;

$l_i$  – длина дуги меридиана конечного элемента с узлами  $i$  и  $j$ ;

$\varphi_i, \varphi_j, \psi_i, \psi_j$  – координатные функции конечного элемента:

$$\varphi_i = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \varphi_j = 3\xi^2 - 2\xi^3,$$

$$\psi_i = \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \quad \psi_j = \xi^2 + \xi^3;$$

$r_i, r_j, z_i, z_j$  – координаты узлов конечного элемента в цилиндрической системе координат. Штрихами обозначены производные по длине дуги меридиана  $s$ .

Перемещения срединной поверхности конечного элемента в окружном направлении представляются рядами Фурье по координате  $\theta$ :

$$U_M(s, \theta, t) = \sum_{k=0}^N U_{Mk}(\xi, t) \cos k\theta + \sum_{k=1}^N \bar{U}_{Mk}(\xi, t) \sin k\theta,$$

$$W_M(s, \theta, t) = \sum_{k=0}^N W_{Mk}(\xi, t) \cos k\theta + \sum_{k=1}^N \bar{W}_{Mk}(\xi, t) \sin k\theta,$$

$$V_M(s, \theta, t) = \sum_{k=0}^N V_{Mk}(\xi, t) \cos k\theta + \sum_{k=1}^N \bar{V}_{Mk}(\xi, t) \sin k\theta.$$

Амплитудные значения перемещений в пределах конечного элемента аппроксимируются теми же координатными функциями, что и геометрические параметры.

Система дифференциальных уравнений движения конечного элемента оболочки получается из вариационного уравнения Лагранжа [2] с учетом сил инерции

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_S \delta \varepsilon_S + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \tau_{S\theta} 2\delta \varepsilon_{S\theta}) \cdot r ds d\zeta d\theta = \\ & = \iint_S q_M \delta U_M r ds d\theta + \\ & + P_U \delta U_M + P_W \delta W_M + P_V \delta V_M + M_S \delta \Theta_S + \\ & + \iiint_V \rho (\ddot{U}_M \delta U_M + \ddot{W}_M \delta W_M + \ddot{V}_M \delta V_M) r(s) ds d\zeta d\theta, \end{aligned}$$

где  $q_M$  – нормальное давление, приведенное к срединной поверхности;

$P_U, P_W, P_V, M_S$  – усилия и моменты, приложенные на краях конечного элемента;

$\rho$  – плотность материала;

$V, S$  – объем и поверхность конечного элемента.

Связь между напряжениями и деформациями в случае плоского напряженного состояния определяется зависимостями [1]:

$$\sigma_S(s, \zeta, \theta, t) = A_{11} \varepsilon_S(s, \zeta, \theta, t) + A_{12} \varepsilon_\theta(s, \zeta, \theta, t);$$

$$\sigma_\theta(s, \zeta, \theta, t) = A_{21} \varepsilon_S(s, \zeta, \theta, t) + A_{22} \varepsilon_\theta(s, \zeta, \theta, t);$$

$$\tau_{S\theta}(s, \zeta, \theta, t) = 2G \varepsilon_{S\theta}(s, \zeta, \theta, t).$$

где  $A_{11}, A_{12}, A_{22}, G$  – упругие постоянные материала обобщенного закона Гука.

Коэффициенты  $A_{ij}$  для изотропного материала определяются следующим образом:

$$A_{22} = A_{11} = \frac{2G}{(1-\nu)},$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{2G\nu}{(1-\nu)},$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Оболочки стыкуются между собой краевыми узлами. При этом может иметь место излом и разрыв меридиана. Соединение узлов (стыковка оболочек) осуществляется через специальную стыковочную матрицу, что упрощает алгоритм решения.

На краях конечного элемента могут быть заданы кинематические воздействия  $U_M^\Gamma, \Theta_S^\Gamma, W_M^\Gamma, \Theta_\Theta^\Gamma$ , которые осуществляются через упругие жесткости  $C_U, C_W, C_V, C_\Theta$ .

Выражая вариационное уравнение Лагранжа через перемещения и варьируя по неопределенным узловым параметрам, получим систему

$$\sum_{l=i}^{i+1} (M_{kpl} \ddot{U}_{kl} + B_{kpl} \dot{U}_{kl} + C_{kpl} U_{kl}) = b_{kp}, \quad k=1,2,\dots,N,$$

$$\sum_{l=i}^{i+1} (\bar{M}_{kpl} \ddot{\bar{U}}_{kl} + \bar{B}_{kpl} \dot{\bar{U}}_{kl} + \bar{C}_{kpl} \bar{U}_{kl}) = \bar{b}_{kp},$$

$$k=1,2,\dots,N, \quad p=i, i+1,$$

где  $U_{kl}^T = \{U_{kl}, U'_{kl}, W_{kl}, W'_{kl}, V_{kl}, V'_{kl}\}$  – вектор узловых параметров;

$M_{pkl}, B_{pkl}, C_{pkl}, \bar{M}_{pkl}, \bar{B}_{pkl}, \bar{C}_{pkl}$  – клеточные матрицы масс и жесткостей конечного элемента размером  $(6 \times 6)$ ;

$b_{kp}, \bar{b}_{kp}$  – векторы правых частей.

Матрица демпфирования получается как линейная комбинация матриц  $M$  и  $C$ . Общая система дифференциальных уравнений получается суммированием соответствующих членов уравнений для конечных элементов.

Окончательно система дифференциальных уравнений движения имеет вид

$$M\ddot{\bar{U}} + B\dot{\bar{U}} + C\bar{U} = \bar{b},$$

интегрирование которой во времени осуществляется устойчивым методом Ньюмарка [3], где  $\bar{U}, \dot{\bar{U}}, \ddot{\bar{U}}$  – векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений узлов конечных элементов.

Матрицы жесткости, масс и демпфирования имеют клеточно-ленточную структуру. В местах разветвления оболочек в общей матрице появляются столбцы, обеспечивающие связь между соответствующими узлами.

Программная реализация данного метода учитывает особенности структуры матриц, что позволяет существенно сократить время счета.

Рассмотрена оболочечная модель части корпуса космического аппарата, состоящая из конической

оболочки с образующей длиной 42,6 см и толщиной 4 мм, наклоненной под углом 45 градусов к оси и соединенной с ней цилиндрической оболочкой длиной 150 см и радиусом 80 см.

Модуль упругости материала  $E = 7,2 \times 10^4$  МПа, плотность  $\rho = 3 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Динамическое воздействие на оболочку задается четырьмя сосредоточенными импульсами вдоль оси вращения в виде полуволны синусоиды продолжительностью 100 мкс с амплитудой  $5 \cdot 10^3$  Н. Дискретизация импульса на 40 и 80 временных участков показала, что результаты расчетов перемещений и ускорений при этом практически совпадают. Вдоль меридиана оболочки задавалось 50 конечных элементов, в окружном направлении с учетом симметрии для четверти окружности удерживалось 9 гармоник ряда Фурье. Удержание большего числа слагаемых не приводило к существенному изменению результата. Для анализа переходного процесса в конструкции расчет осуществлялся до  $t = 6 \cdot 10^{-3}$  с. За это время волна успевает пройти до края конструкции и вернуться назад около 6 раз.

Результаты изменения во времени радиальных и осевых перемещений для точек под силой (кривая 1) и на расстояниях 5 мм, 0,42 м и 1,8 м (кривые 2, 3, 4 соответственно) показаны на рис. 2, а и 2, б. Аналогичные данные приводятся на рис. 3, а и 3, б для точек меридиональной плоскости, находящейся между приложенными силами.

Из результатов следует, что переходной процесс для перемещений и ускорений оболочечной конструкции имеет волновой характер. Заметные возмущения точки 3 достигаются примерно через 90 мкс, а точки 4 – через 650 мкс от начала процесса. Запаздывание возмущений имеет место и в окружном направлении (примерно на 180 мкс). В результате воздействия импульса возбуждаются наряду с высокочастотными и низкочастотные колебания.

В случае приложения импульса продолжительностью не 100 мкс, а 10 мкс, но с амплитудой в 10 раз больше, амплитуды низкочастотных составляющих перемещений становятся в 2 раза больше и значительно возрастают амплитуды высокочастотных составляющих. Времена запаздывания возмущений вдоль конструкции остаются такими же.

Выполнены расчеты переходных процессов днища космического аппарата, модель которого представлена набором из двадцати оболочек. Меридиональное сечение днища схематически представлено на рис. 4. Свойства материала:  $\nu=0,3$ ;  $E = 7,2 \times 10^4$  МПа;  $\rho = 3 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Динамическое воздействие представлялось четырьмя сосредоточенными импульсами, размещенными на 10-й оболочке по окружности через 90°.

Импульс нагружения задавался полуволевой синусоидой продолжительностью 100 мкс. При уменьшении шага интегрирования по времени установлено, что перемещения практически совпадают, начиная с шага 10 мкс, а ускорения – с 2,5 мкс.

На рис. 5 показано изменение осевых перемещений точек 1, 2, 3, 4. На рис. 6, а приведено изменение меридиональных напряжений на наружной поверхности в точках 1 и 3, а на рис. 6, б – изменение со временем ускорений этих же точек.

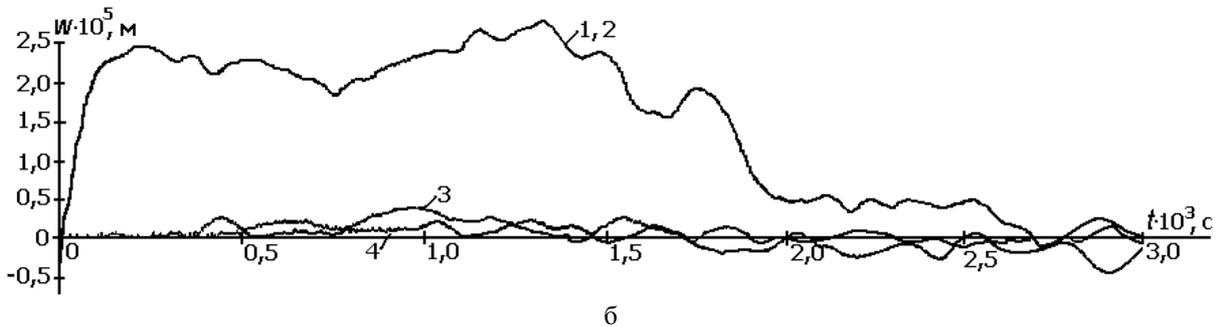
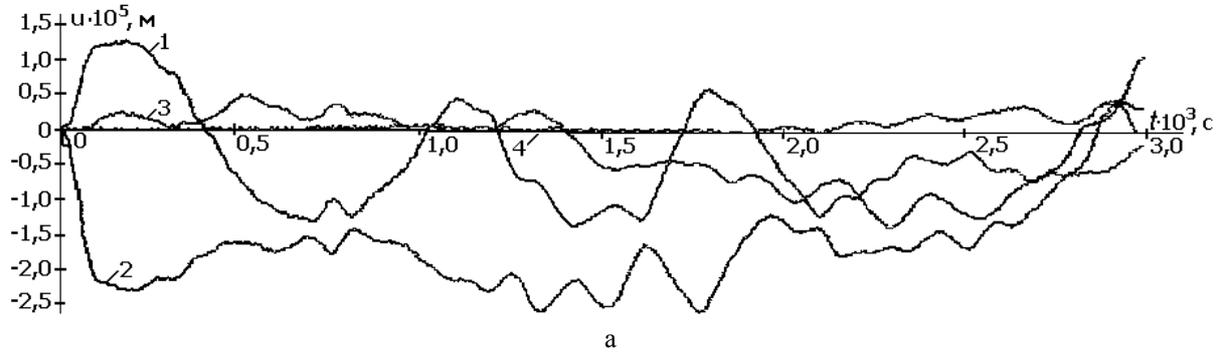


Рис. 2. Радиальные и осевые перемещения в точках 1–4 меридиональной плоскости, проходящей через точки приложения сил

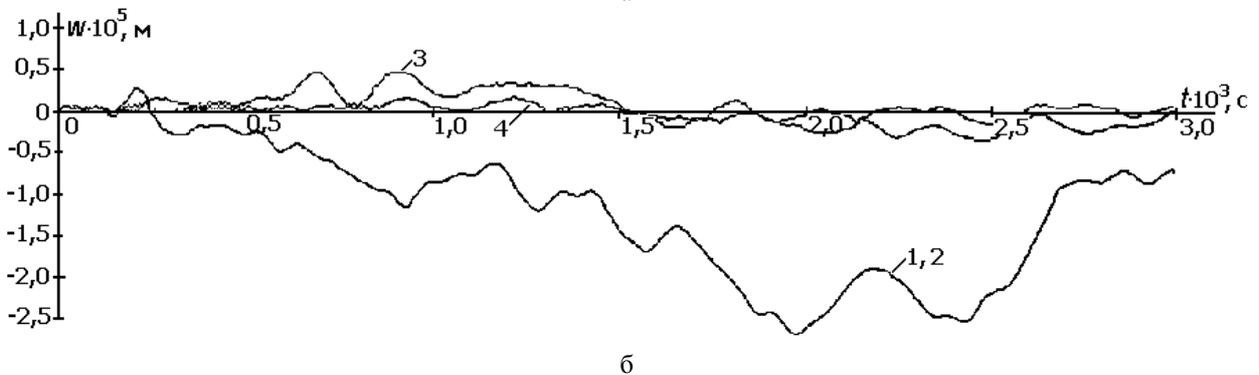
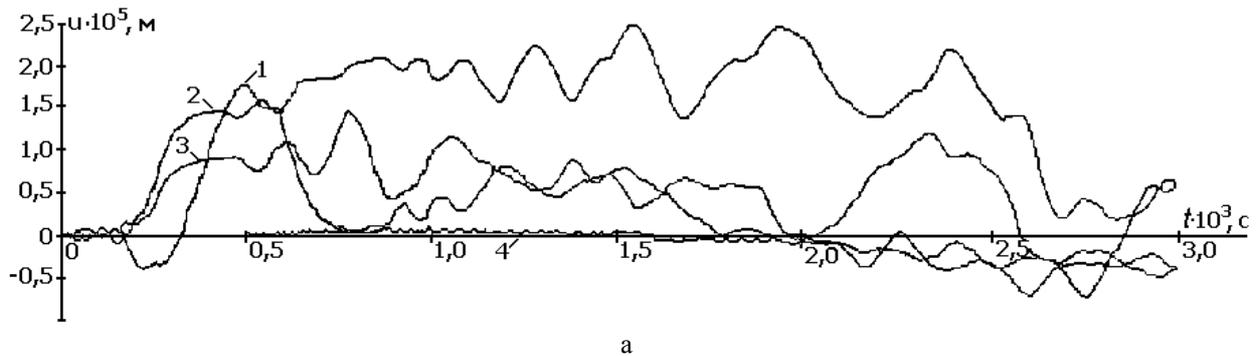


Рис. 3. Радиальные и осевые перемещения в точках 1–4 меридиональной плоскости, проходящей по середине между точками приложения сил

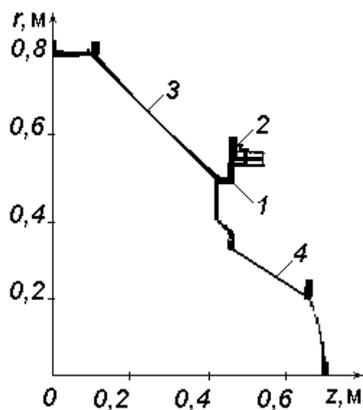


Рис. 4. Схема меридионального сечения дна космического аппарата

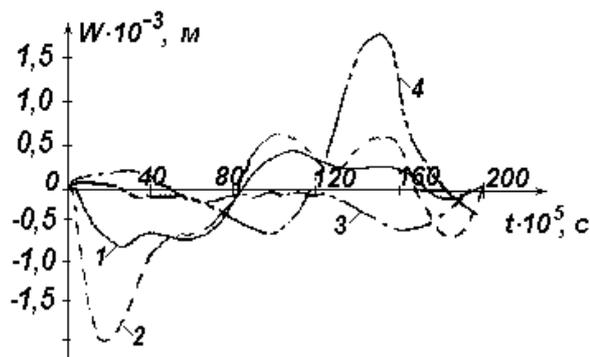
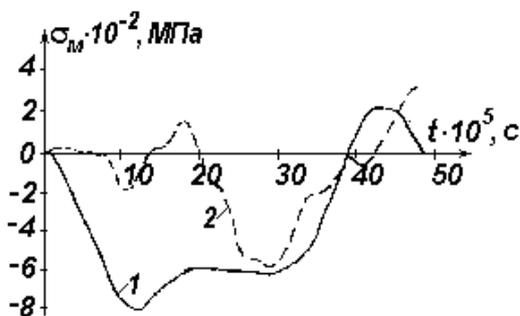
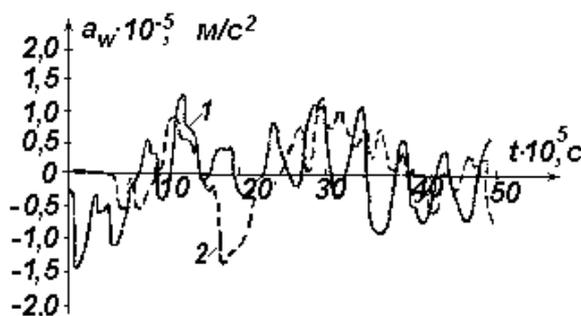


Рис. 5. Изменение осевых перемещений точек конструкции



а



б

Рис. 6. Изменение меридиональных напряжений (а) и ускорений (б) в точках 1 и 2 со временем

### Выводы

Разработана методика расчета переходных динамических процессов в составных оболочках вращения с разветвленным меридианом при неосесимметричном нагружении с использованием метода конечных элементов в сочетании с разложением решения в ряды Фурье в окружном направлении.

Создано экономичное по вычислительным затратам программное обеспечение, позволяющее рассматривать переходные процессы в элементах космических аппаратов при расстыковке.

Результаты, полученные по изложенной методике для отдельных элементов аппаратов при кратковременных воздействиях, сравнивались с полученными по стандартным программным комплексам. Наблюдается практическое совпадение результатов. Вместе с тем затраты на расчеты по данной методике существенно меньше, чем по стандартным методикам.

Результаты расчетов показывают, что распространение возмущений в оболочечных конструкци-

ях космических аппаратов при кратковременных импульсных воздействиях, имеющих место во время расстыковки, носит волновой характер.

С помощью разработанного методического обеспечения могут быть определены расчетным путем перемещения, скорости и ускорения, а также напряжения при кратковременных динамических воздействиях в элементах конструкций космических аппаратов.

### Литература

1. Шевченко, Ю.Н. Методы расчета оболочек. Теория упруго-пластических оболочек при неизо-термических процессах нагружения [Текст] / Ю.Н. Шевченко, И.В. Прохоренко. – К.: Наук. думка, 1981. – 296 с.
2. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов [Текст] / К. Бате, Е. Вильсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

*Поступила в редакцію 24.05.2013, рассмотрена на редколлегии 14.06.2013*

**Рецензент:** д-р техн. наук, ст. науч. сотр., вед. науч. сотр. Б.Ф. Зайцев, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков.

### **РЕАКЦІЯ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ НА ІМПУЛЬСНЕ ЗБУДЖЕННЯ**

*М.Г. Шульженко, П.П. Гонтаровський*

Розглядається передача збудження у розгалужених оболонках обертання, викликаних короточасними імпульсними зосередженими навантаженнями при розстикуванні. Задача вирішується напіваналітичним методом скінченних елементів у сполученні з інтегруванням рівнянь руху методом Ньюмарка. Рішення в окружному напрямку апроксимуються рядами Фур'є. Приводяться результати розрахунків конструкцій, що складаються з оболонок обертання, при чотирьох синхронних імпульсних навантаженнях тривалістю 100 мкс. Результати показують, що збудження, які поширюються у розглянутих конструкціях, мають хвильовий характер.

**Ключові слова:** оболонки обертання, імпульсні впливи, метод скінченних елементів, метод Ньюмарка, поширення збуджень.

### **REACTION OF SHELL ELEMENTS OF SPACE VEHICLES ON THE IMPULSE ACTION**

*N.G. Shulzhenko, P.P. Gontarowsky*

Transfer of perturbations to the branching shells of revolution called by short-term pulsing concentrated loads at a disconnection is observed. The problem resolves from semianalytical finite element method in a combination to integration of the equations of motion by method Numark. The solution in the circumferential direction is approximated by rows of the Fourier. Results of calculations of the constructions consisting of shells of revolution are resulted at four synchronous pulsing loadings by duration 100 mks. Results show, that passed round perturbations in the observed constructions have wave character.

**Key words:** shells of rotation, impulse actions, a method of finite elements, method of Numark, extending of perturbations.

**Шульженко Николай Григорьевич** – д-р техн. наук, проф., зав. отделом вибрационных и термостойких исследований, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, e-mail: shulzh@ipmach.kharkov.ua.

**Гонтаровский Павел Петрович** – канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ст. науч. сотр., Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, e-mail: shulzh@ipmach.kharkov.ua.