

УДК 539.3

А.С. КАИРОВ, С.А. МОРГУН

*Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова, Украина*

## КОЛЕБАНИЯ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕНЦОВ РАБОЧИХ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН ПРИ НАРУШЕНИИ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

*Изложена методика исследований вынужденных колебаний и напряженно-деформированного состояния венцов рабочих лопаток турбомашин как циклически несимметричной системы с учетом демпфирования. С использованием метода конечных элементов разработана уточненная математическая модель венца как совокупности секций «сектор диска – лопатка с демпферными связями», позволяющая учесть конструктивную неоднородность диска и пера лопатки. Приведены результаты расчета амплитуд вынужденных колебаний системы, возбуждаемых нестационарной газодинамической силой для различных вариантов демпфирования. Указаны значения максимальных напряжений в зависимости от частоты вынужденных колебаний и числа узловых диаметров для основных конструктивных исполнений лопаточного венца.*

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, демпфирование, амплитуды колебаний, напряженно-деформированное состояние, метод конечных элементов, газодинамическая сила.

### Введение

В современных условиях развития турбостроения преобладающей является тенденция увеличения единичной мощности турбоагрегатов при непеременимом условии повышения их экономичности и надежности. Поэтому для обеспечения бесперебойной работы оборудования и снижения затрат на его капитальный ремонт возникает необходимость изучения вибрационных процессов в наиболее ответственных частях турбомашин. Особое внимание должно быть уделено такому высоконагруженному узлу, как лопаточный аппарат, подверженному воздействию нестационарных газодинамических сил. Не менее важным является и тот факт, что с увеличением мощности турбоагрегатов возрастает и температура потока рабочего тела, воздействующего на лопатки турбин.

Основные методы расчета амплитуд и частот, а также напряженно-деформированного состояния как отдельных лопаток, так и рабочих колес турбин в рамках стержневой теории приведены в работах [1, 2]. Однако, методикам, основанным на стержневой теории, присущ важный недостаток – лопатки рассматриваются как закрученные нерастяжимые и жестко закрепленные в диске стержни переменного поперечного сечения, совершающие синфазные колебания в одной из главных плоскостей изгиба. В работе [3] вынужденные колебания венца лопаток исследуются при помощи метода начальных параметров, однако, в ней не приведен метод вычисле-

ния амплитуд гармоник возмущающих сил. В [4] при решении уравнений вынужденных колебаний используются асимптотические методы нелинейной механики, но не учитывается демпфирование в системе. В работах [2, 5] данная проблема решается с использованием метода конечных элементов, но в [2] не учитывается демпфирование, а в [5] лопаточный венец рассматривается как циклически симметричная система. Исследование амплитуд и частот свободных колебаний венцов рабочих лопаток приведено в работе [6], частот и форм колебаний отдельных лопаток методом динамических суперэлементов – в [7], а определение напряжений и частот колебаний рабочих лопаток экспериментальным путем – в работах [8] и [9] соответственно.

### 1. Постановка задачи и цель исследования

Как свидетельствует приведенный выше анализ исследований и публикаций по изучаемой теме, в математических моделях вынужденных колебаний венцов рабочих лопаток турбомашин, созданных как на основе стержневой теории, так и с использованием МКЭ, не учитывается возможность нарушения циклической симметрии лопаточного венца, вызванного технологическими отклонениями при изготовлении лопаток. Поэтому целью исследования является разработка уточненной математической модели вынужденных колебаний и напряженно-деформированного состояния венцов рабочих лопа-

ток турбомашин как циклически несимметричной системы с использованием МКЭ. Также в работе необходимо учесть влияние на амплитуды колебаний внутреннего и конструкционного демпфирования в местах соединения демпферных связей с пером лопатки.

## 2. Изложение основного материала

Пусть венец содержит  $h$  рабочих лопаток с замкнутыми на круг связями, причем  $h - 1$  лопаток имеют одинаковые, а 1 лопаток – различные геометрические, инерционные и жесткостные характеристики. Как было указано выше, разброс парциальных свойств лопаток может, например, быть результатом технологических отклонений в процессе их изготовления. Возмущающая газодинамическая сила, как и любая периодическая функция, может быть

разложена в ряд Фурье [10]. Амплитуды резонансных колебаний рассматриваемого венца лопаток, возбуждаемых  $k$ -ой гармоникой внешней нагрузки, определяются методом прямого решения уравнений вынужденных колебаний этого венца на основе разложения по заранее вычисленным главным формам его свободных колебаний. Если для циклически симметричной системы такое разложение можно проводить по одной – «резонирующей» форме колебаний, то в случае значительного отклонения от симметрии разложение требуется проводить уже по некоторому числу  $m$  близких форм свободных колебаний [5]. Число  $m$  зависит от степени нарушения симметрии и плотности частотного спектра свободных колебаний системы. Лопаточный венец может быть представлен в виде совокупности секций, каждая из которых состоит из собственно лопатки, сектора диска и демпферных связей (рис. 1).

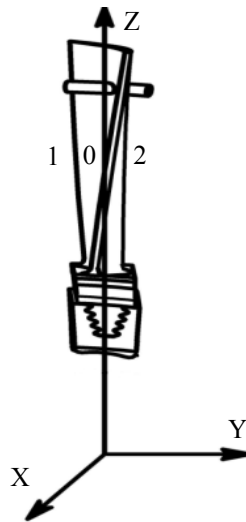


Рис. 1. Модель секции «сектор диска – лопатка с демпферными связями»: индексами (1), (0) и (2) обозначены левая граница, средняя часть и правая граница секции соответственно

Запишем уравнения вынужденных колебаний одной из таких секций:

$$M_{IJ} \ddot{\delta}_J + C_{IJ} \dot{\delta}_J + K_{IJ} \delta_J = F_I, \quad (1)$$

(I, J = 1, 2, ..., n),

где  $M_{IJ}$  и  $K_{IJ}$  – матрицы инерции и жесткости соответственно;

$C_{IJ} = 2\mu M_{IJ}$  – матрица демпфирования [5];

$\mu$  – коэффициент затухания;

$\delta_J$  – обобщенные перемещения узлов секции;

$F_I$  – возмущающая газодинамическая сила:

$$F_I = F_I^{(1)} \cos k\omega t + F_I^{(2)} \sin k\omega t,$$

$k$  – номер гармоники возмущающей силы;

$\omega$  – частота вынужденных колебаний секции;

$n$  – число узлов секции.

Решение системы уравнений (1) представлено в следующем виде:

$$\delta_J = a_J^1 \cos k\omega t + a_J^2 \sin k\omega t, \quad (2)$$

(J = 1, 2, ..., n),

где  $a_J^1$  и  $a_J^2$  – амплитуды колебаний узлов левой и правой границ секции соответственно.

Подставляя (2) в (1), получаем систему уравнений (3):

$$\Lambda_{11} a_1^{(1)} + \Lambda_{10} a_0^{(1)} + \Lambda_{12} a_2^{(1)} + \Psi_{11} a_1^{(2)} + \Psi_{10} a_0^{(2)} + \Psi_{12} a_2^{(2)} = F_1^{(1)};$$

$$\Lambda_{01} a_1^{(1)} + \Lambda_{00} a_0^{(1)} + \Lambda_{02} a_2^{(1)} + \Psi_{01} a_1^{(2)} + \Psi_{00} a_0^{(2)} + \Psi_{02} a_2^{(2)} = F_0^{(1)};$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{21}a_1^{(1)} + \Lambda_{20}a_0^{(1)} + \Lambda_{22}a_2^{(1)} + \Psi_{21}a_1^{(2)} + \Psi_{20}a_0^{(2)} + \Psi_{22}a_2^{(2)} &= F_2^{(1)}; \\ -\Psi_{11}a_1^{(1)} - \Psi_{10}a_0^{(1)} - \Psi_{12}a_2^{(1)} + \Lambda_{11}a_1^{(2)} + \Lambda_{10}a_0^{(2)} + \Lambda_{12}a_2^{(2)} &= F_1^{(2)}; \\ -\Psi_{01}a_1^{(1)} - \Psi_{00}a_0^{(1)} - \Psi_{02}a_2^{(1)} + \Lambda_{01}a_1^{(2)} + \Lambda_{00}a_0^{(2)} + \Lambda_{02}a_2^{(2)} &= F_0^{(2)}; \\ -\Psi_{21}a_1^{(1)} - \Psi_{20}a_0^{(1)} - \Psi_{22}a_2^{(1)} + \Lambda_{21}a_1^{(2)} + \Lambda_{20}a_0^{(2)} + \Lambda_{22}a_2^{(2)} &= F_2^{(2)}. \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\Psi_{ab} = 2\mu k\omega M_{II}$ ;  $\Lambda_{ab} = K_{II} - (k\omega)^2 M_{II}$ ;

$\Lambda_{11}, \Lambda_{01}, \Lambda_{21}$  и т. д. – блоки динамической матрицы жесткости, соответствующей степеням свободы левой границы (индекс 1), средней части (индекс 0) и правой границы (индекс 2) секции. Аналогично и для динамической матрицы демпфирования  $\Psi$ .

$a_1^{(1)}, a_0^{(1)}, a_2^{(1)}$  и т. д. – амплитуды вынужденных колебаний левой границы, средней части и правой границы секции (индексы 1, 0, 2) соответственно, возбуждаемых переменной газодинамической силой. Индекс в скобках обозначает амплитуды при  $\cos k\omega t - (1)$ , а  $(2)$  – при  $\sin k\omega t$ .

Исключая амплитуды колебаний узлов средней части секции  $a_0^{(1)}$  и  $a_0^{(2)}$ , на основе (3) получается следующая зависимость между граничными амплитудами колебаний и возмущающей силой:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} S_{ab} &= A_{ab} + A_{a0}B_{00}(\Lambda_{0,(b+1)/2} + R_{00}\Psi_{0,(b+1)/2}) + \bar{A}_{a0}B_{00}(-\Psi_{0,(b+1)/2} + R_{00}\Lambda_{0,(b+1)/2}); \\ A_{ab} &= \Lambda_{a,(b+1)/2}; \quad A_{a0} = \Lambda_{a0}; \quad \bar{A}_{a0} = \Psi_{a0}; \\ S_{cd} &= D_{cd} + A_{c0}B_{00}(\Psi_{0,d/2} - R_{00}\Lambda_{0,d/2}) + \bar{A}_{c0}R_{00}(\Lambda_{0,d/2} + R_{00}\Psi_{0,d/2}); \\ D_{cd} &= \Lambda_{(c-2),d/2}; \quad A_{c0} = -\Psi_{(c-2),0}; \quad \bar{A}_{c0} = \Lambda_{(c-2),0}; \\ B_{00} &= -\left[ I_1 + ((\Lambda_{00})^{-1}\Psi_{00})^2 \right]^{-1} (\Lambda_{00})^{-1}; \quad R_{00} = \Psi_{00}(\Lambda_{00})^{-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

( $a = 1, 2, 3$ ;  $b = 1, 2, 4$ ;  $c = 1, 2, 4$ ;  $d = 2, 3, 4$ ),  $I_1$  – единичная матрица.

Предполагается, что уравнения (1) описывают колебания первой секции системы. Тогда для  $q$ -й секции элементы вектора в правой части уравнения (4) будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{1,q}^{(1)} &= F_1^{(1)} \cos(q-1)k\Delta\alpha + F_1^{(2)} \sin(q-1)k\Delta\alpha; \\ F_{2,q}^{(1)} &= F_2^{(1)} \cos(q-1)k\Delta\alpha + F_2^{(2)} \sin(q-1)k\Delta\alpha; \\ F_{1,q}^{(2)} &= -F_1^{(1)} \sin(q-1)k\Delta\alpha + F_1^{(2)} \cos(q-1)k\Delta\alpha; \\ F_{2,q}^{(2)} &= -F_2^{(1)} \sin(q-1)k\Delta\alpha + F_2^{(2)} \cos(q-1)k\Delta\alpha, \end{aligned}$$

где  $\Delta\alpha = 2\pi / h$ .

Соотношения (4) и (5) необходимо получить для одной из однородных и всех неоднородных секций.

Нумерация секций начинается с лопатки, не имеющей отклонений.

Рассматривая систему (венец рабочих лопаток) как объединение  $h$  секций, можно получить уравнение для определения амплитуд резонансных колебаний системы:

$$[G]\{a\} = \{F\}. \tag{6}$$

Матрица  $[G]$  имеет вид:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & \dots & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 \\ G_9 & G_{10} & G_{11} & G_{12} & \dots & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} \\ G_{17} & G_{18} & G_{19} & G_{20} & \dots & G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{25} & G_{26} & G_{27} & G_{28} & \dots & G_{29} & G_{30} & G_{31} & G_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} & \dots & G_{37} & G_{38} & G_{39} & G_{40} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & \dots & G_{45} & G_{46} & G_{47} & G_{48} \\ G_{49} & G_{50} & G_{31} & G_{52} & \dots & G_{53} & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{57} & G_{58} & G_{59} & G_{60} & \dots & G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_1 &= S_{11}^1 + S_{33}^h; G_2 = S_{12}^1 + S_{34}^h; G_3 = S_{13}^1; G_4 = S_{14}^1; G_7 = S_{31}^h; G_8 = S_{41}^h; G_9 = S_{21}^1 + S_{43}^h; G_{10} = S_{22}^1 + S_{44}^h; \\
 G_{11} &= S_{23}^1; G_{12} = S_{24}^1; G_{15} = S_{32}^h; G_{16} = S_{42}^h; G_{17} = S_{31}^1; G_{18} = S_{32}^1; G_{19} = S_{33}^1 + S_{11}^2; G_{20} = S_{34}^1 + S_{12}^2; \\
 G_{25} &= S_{41}^1; G_{26} = S_{42}^1; G_{27} = S_{43}^1 + S_{21}^2; G_{28} = S_{44}^1 + S_{22}^2; G_{37} = S_{33}^{h-2} + S_{11}^{h-1}; G_{38} = S_{34}^{h-2} + S_{12}^{h-1}; \\
 G_{39} &= S_{13}^{h-1}; G_{40} = S_{14}^{h-1}; G_{45} = S_{43}^{h-2} + S_{21}^{h-1}; G_{46} = S_{44}^{h-2} + S_{22}^{h-1}; G_{47} = S_{23}^{h-1}; G_{48} = S_{24}^{h-1}; G_{49} = S_{13}^h; \\
 G_{50} &= S_{23}^h; G_{53} = S_{31}^{h-1}; G_{54} = S_{32}^{h-1}; G_{55} = S_{33}^{h-1} + S_{11}^h; G_{56} = S_{34}^{h-1} + S_{12}^h; G_{57} = S_{14}^h; G_{58} = S_{24}^h; \\
 G_{61} &= S_{41}^{h-1}; G_{62} = S_{42}^{h-1}; G_{63} = S_{43}^{h-1} + S_{21}^h; G_{64} = S_{44}^{h-1} + S_{22}^h; \\
 G_5 &= G_6 = G_{13} = G_{14} = G_{21} = G_{22} = G_{23} = G_{24} = G_{29} = \\
 &= G_{30} = G_{31} = G_{32} = G_{33} = G_{34} = G_{35} = G_{36} = G_{41} = \\
 &= G_{42} = G_{43} = G_{44} = G_{51} = G_{52} = G_{59} = G_{60} = 0.
 \end{aligned}$$

а верхние индексы (1, 2, ..., h-2, h-1, h) у элементов матрицы [S] определяют номер рассматриваемой секции в лопаточном венце.

Тогда с учетом (4), (5) и (7) уравнение (6) преобразуется следующим образом:

$$[G] \begin{Bmatrix} a_{1,1}^{(1)} \\ a_{2,1}^{(2)} \\ a_{1,2}^{(1)} \\ a_{2,2}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{1,h-1}^{(1)} \\ a_{2,h-1}^{(2)} \\ a_{1,h}^{(1)} \\ a_{2,h}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1,1}^{(1)} + F_{2,h}^{(2)} \\ F_{1,1}^{(2)} + F_{2,1}^{(1)} \\ F_{2,1}^{(1)} + F_{1,2}^{(2)} \\ F_{1,2}^{(1)} + F_{2,2}^{(2)} \\ \vdots \\ F_{2,h-1}^{(1)} + F_{1,h-1}^{(2)} \\ F_{1,h}^{(1)} + F_{2,h-1}^{(2)} \\ F_{2,h}^{(1)} + F_{1,h}^{(2)} \\ F_{2,h}^{(2)} + F_{1,1}^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

В формулах (8) индекс в скобках обозначает амплитуды при  $\cos k\omega t$  – (1), а (2) – при  $\sin k\omega t$ ; первый нижний индекс обозначает узлы на левой границе секции (индекс 1), а 2 – на правой; нижний индекс после запятой – номер секции в венце.

Затем по найденным значениям амплитуд вынужденных колебаний граничных узлов на основе (4) вычисляются амплитуды вынужденных колебаний и всех остальных узлов секции. Для того, чтобы определить амплитуды вынужденных колебаний всего венца, необходимо решить уравнения (1) – (8) для каждой из секций, входящих в него.

После получения значений амплитуд вынужденных колебаний во всех узлах секции, можно перейти к определению напряжений и деформаций. В общем случае матрица напряжений записывается следующим образом [10]:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (9)$$

где  $\sigma$  – матрица напряжений;

D – матрица упругих постоянных;

$\varepsilon$  – матрица деформаций;

$\varepsilon_0$  – матрица тепловых деформаций.

Учитывая то, что при определении деформаций и напряжений система координат секции остается такой же, как и при определении амплитуд, матрица напряжений в формуле (9) состоит из таких компонентов:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{XZ} \\ \tau_{YZ} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

где  $\sigma$  – нормальные напряжения;

$\tau$  – касательные напряжения;

Матрица упругих постоянных формируется на основе зависимостей, приведенных в [2]:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix},$$

где  $D_{11} = D_{22} = D_{33} = \lambda + 2\nu$ ;

$D_{12} = D_{13} = D_{23} = \lambda$ ;

$D_{44} = D_{55} = D_{56} = \nu$ ;

$D_{14} = D_{15} = D_{16} = D_{24} = D_{25} = D_{26} = D_{34} = D_{35} = D_{36} = D_{45} = D_{46} = D_{56} = 0$ ;

$\lambda$  – постоянная Ляме [2]:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

E – модуль Юнга.

Структура матриц полной  $\varepsilon$  и тепловой деформаций  $\varepsilon_0$  приведена в (11) и (12) соответственно

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{XZ} \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \alpha^{eT} \\ \alpha^{eT} \\ \alpha^{eT} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где  $\varepsilon$  – деформации растяжения-сжатия;  
 $\gamma$  – сдвиговые деформации;  
 $\alpha^e$  – коэффициент расширения материала;  
 $T$  – температура материала секции.

Для вычисления деформаций по формулам (11) и (12) необходимо связать их с перемещениями узлов секции, определенными в (2). Далее приведена формула для определения деформаций рассматриваемой конечноэлементной модели секции в зависимости от перемещения ее узлов, основанная на зависимости, предложенной в работе [10]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{ZX} \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta_X}{\partial X} \\ \frac{\partial \delta_Y}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta_Z}{\partial Z} \\ \frac{\partial \delta_X}{\partial Y} + \frac{\partial \delta_Y}{\partial X} \\ \frac{\partial \delta_Z}{\partial X} + \frac{\partial \delta_X}{\partial Z} \\ \frac{\partial \delta_Z}{\partial Y} + \frac{\partial \delta_Y}{\partial Z} \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

где  $\delta_X$ ,  $\delta_Y$ ,  $\delta_Z$  – проекции перемещения  $\delta$  на оси декартовой системы координат секции  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно.

После вычисления по формуле (2) перемещения узлов рассматриваемой секции, а по формулам (11) и (12) матриц полной и тепловой деформаций соответственно определяется матрица напряжений. Таким образом, может быть получено поле напряжений для всех составляющих секции: сектора диска, лопатки и демпферных связей. Использование данной математической модели позволяет проводить исследование распределения напряжений и деформаций для любой формы колебаний, так как при вычислении перемещений по формуле (2) и связанным с ней формулам (3 – 8) в рассмотрение можно принять любую  $k$ -ую гармонику возмущающей переменной газодинамиче-

ской силы. Как и при определении амплитуд вынужденных колебаний, соотношения (9 – 11) необходимо получить для всех неоднородных и, как минимум, для одной однородной секции. Затем, обобщив полученные результаты для всех секций, определяются поля распределения напряжений и деформаций для всего рассматриваемого лопаточного венца. Кроме того, может быть решена и обратная задача. Зная поле напряжений в лопатках и диске, например, из результатов эксперимента, можно рассчитать величины амплитуд и частот вынужденных колебаний всей рассматриваемой системы.

### 3. Основные результаты и их анализ

Описанный в данной работе метод, может быть реализован для расчета вынужденных колебаний систем рабочих лопаток турбомашин. С целью изучения практической пригодности разработанной математической модели проведены расчеты амплитуд колебаний, а также напряжений венца рабочих лопаток турбины, возбуждаемых нестационарной газодинамической нагрузкой, возникающей из-за технологической неоднородности сопловой решетки. Неоднородность сопловой решетки задавалась отклонениями углов установки лопаток от их номинальных значений. Проведя разложение в ряд Фурье периодической газодинамической силы, и зная частоты собственных колебаний венца, можно выделить гармоники, вызывающие резонансные колебания. Амплитудно-частотные характеристики исследуемого лопаточного венца с учетом нелинейного как внутреннего, так и конструкционного демпфирования представлены на рис. 2.

Вычисление амплитуд вынужденных колебаний проводилось методом разложения по формам свободных колебаний данной системы (венца лопаток). Кривая 1 соответствует модели неполного проскальзывания с жесткой связью середин зон контакта демпфера и пера лопатки (коэффициент затухания  $\mu = 0,1636$ ). Кривая 2 – модель полного проскальзывания (коэффициент затухания тот же). Очевидно, что все промежуточные варианты конструкционного гистерезиса лежат в области, находящейся ниже кривой 1 и выше кривой 2. При этом выбор той или иной модели демпфирования зависит от конструкции венца и параметров прохождения газа через него. Для унификации процедуры расчета различных типов рабочих колес лопаток предполагается, что середины зон контакта демпфера и пера лопатки связаны между собой «пружиной». Варьируя жесткостью этой пружины от нулевого уровня до абсолютно жесткой связи можно моделировать все возможные варианты конструкционного гистерезиса от кривой 1 до кривой 2. Исходя из рис. 2 очевидно, что более опасным является вариант неполного про-

скальзывания (кривая 1) В этом случае амплитуды резонансных колебаний на 35–38% выше, чем в случае полного проскальзывания.

Поэтому целесообразным будет вести расчеты амплитуд вынужденных колебаний и напряжений венца рабочих лопаток с учетом нелинейного как внутреннего, так и конструкционного демпфирования в предположении неполного проскальзывания, так как наибольшие амплитуды соответствуют максимальным напряжениям.

В табл. 1 представлены зависимости максимальных напряжений, возникающих при вынужденных колебаниях в лопаточном венце, от частоты колебаний. Рассматриваются два типа венцов, используемых в практике отечественного турбостроения: венец с диском, имеющим центральное отверстие под вал, и с цельным диском.

Количество лопаток в венцах равно восьмидесяти; высота лопатки  $l = 135$  мм; материал лопаток – жаропрочная сталь СМ88У – ВИ (плотность мате-

риала  $\rho = 8100$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $1,79 \cdot 10^6$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ). Расчеты также проводились с использованием следующих характеристик диска, а именно, диаметр диска  $D = 450$  мм материал диска – жаропрочная сталь ЭП 472-ИД (плотность материала  $\rho = 8300$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $1,73 \cdot 10^6$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ).

Анализируя представленные в табл. 1 зависимости следует отметить, что при одинаковом числе узловых диаметров частоты колебаний цельного диска выше. Однако, уровень напряжений – ниже, чем для диска с центральным отверстием под вал. Это может быть объяснено тем, что цельный диск является более жестким, значит, частоты его колебаний выше, а амплитуды – меньше. поэтому уровень вибронапряжений в цельном диске ниже.

Следовательно, с точки зрения вибрационной надежности предпочтительней применять конструкции венцов, не имеющих диска с центральным отверстием.

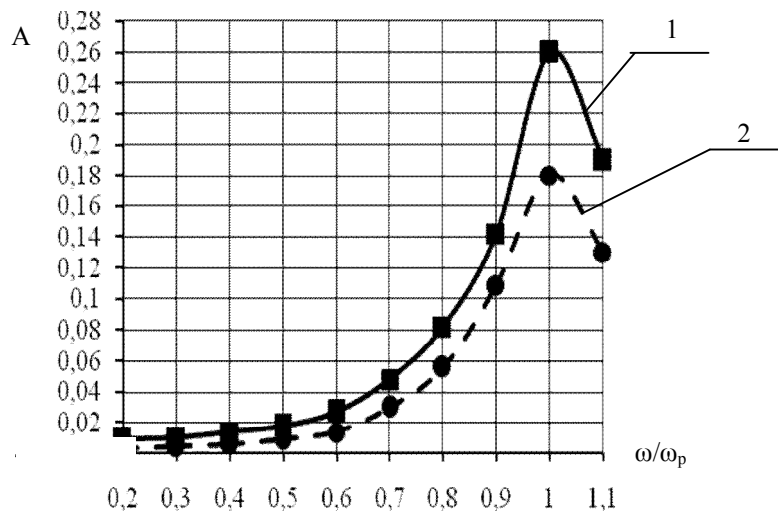


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики венца лопаток турбины с учетом нелинейного внутреннего и конструкционного демпфирования:  $A \cdot 10^5$ , м – амплитуда вынужденных колебаний;  $\omega$  – частота колебаний;  $\omega_p$  – резонансная частота. 1 – расчет в предположении неполного проскальзывания; 2 – расчет в предположении полного проскальзывания демпферной связи и пера лопатки

Таблица 1

Максимальные напряжения и частоты колебаний венцов рабочих лопаток турбомашин

Венец с цельным диском		
Число узловых диаметров, n	Частота вынужденных колебаний $\omega$ , Гц	Максимальные напряжения $\sigma_{max}$ , МПа
n = 1	933	257
n = 2	1066	395
n = 3	1174	628
n = 4	1295	857
n = 5	1325	1032
Венец с диском, имеющим отверстие под вал		
n = 1	825	366
n = 2	942	473
n = 3	1097	739
n = 4	1178	1003
n = 5	1289	1108

## Выводы

С использованием метода конечных элементов (МКЭ) решена задача расчета амплитуд и частот вынужденных колебаний венца рабочих лопаток турбомашин, как циклически несимметричной системы, с учетом демпфирования. Для решения данной задачи разработана уточненная математическая модель секции «сектор диска – лопатка с демпферными связями», позволяющая в достаточной мере учитывать особенности конструкции пера и хвостовика лопатки, демпферных связей, диска. Определение амплитуд и частот колебаний лопаточного венца с замкнутыми на круг демпферными связями, а также напряжений, вызванных воздействием нестационарной газодинамической силы, может быть представлено в виде расчета этих величин для совокупности таких секций. Это, в свою очередь, дает возможность проводить исследования для различных типов конструкций и оптимизировать их прочностные характеристики.

Анализ полученных результатов, проведенный для двух типов исследуемой конструкции, подтверждает адекватность такой модели и указывает на то, что для снижения уровня напряжений, возникающих при вынужденных колебаниях в венце, более предпочтительной является конструкция с цельным диском. Не менее важным является и то обстоятельство, что при расчете напряженно-деформированного состояния учитываются не только механические, но и температурные деформации.

Кроме того, матрица упругости может быть модифицирована и для случая применения перспективных материалов, которые могут иметь ярко выраженную анизотропию свойств, для изготовления лопаточного аппарата.

Также разработанная математическая модель, может быть использована для исследования колебаний и напряженно-деформированного состояния рабочих колес турбин, лопатки которых имеют бандажные полки, а после определенной модификации и для изучения лопаток пакетной конструкции, применяемых в конструкции соплового аппарата турбомашин

## Литература

1. Биргер, И.А. Динамика авиационных газотурбинных двигателей [Текст] / под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1981. – 232 с.
2. Воробьев, Ю.С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин [Текст] / Ю. С. Воробьев. – К.: Наук. думка, 1988. – 224 с.
3. Журавлева, А.М. Расчет вынужденных колебаний лопаточных венцов с замкнутыми на круг связями в неоднородном потоке [Текст] / А.М. Журавлева, Е.П. Петров // Динамика и прочность машин: сб. научн. тр. - 1981. - Вып. 34. – С. 57 – 61.
4. Зайдельман, Р.Л. Надежность лопаточного аппарата паровых турбин [Текст] / Р.Л. Зайдельман. – М.: Энергия, 1978 – 226 с.
5. Костюк, А.Г. Динамика и прочность турбомашин [Текст] / А.Г. Костюк. – М.: Машиностроение, 1982. – 264 с.
6. Каиров, А.С. Исследование колебаний диска с венцом рабочих лопаток турбомашин как циклически симметричной системы в поле центробежных сил [Текст] / А.С. Каиров, С.А. Моргунов // Вісник двигунобудування. – 2013. – № 1. – С. 34 – 37.
7. Каиров, А.С. Исследование собственных колебаний лопаток газотурбинного двигателя методом динамических суперэлементов [Текст] / А.С. Каиров, С.А. Моргунов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2012. – Вып. 20. – С. 176–182.
8. Каиров А.С. Экспериментальное исследование переменных вибронпряжений в рабочих лопатках турбомашин [Текст] / А.С. Каиров, С.А. Моргунов // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: зб. наук. праць ДонНТУ. . – Вып. 45. – Донецьк: «ТЕХНОПОЛІС», 2013 – С. 76–80.
9. Моргунов, С.А. Экспериментальное исследование свободных колебаний лопаток газотурбинного двигателя [Текст] / А.С. Каиров, С.А. Моргунов // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: зб. наук. праць. – Вып. 12. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – С. 224–229.
10. Зенкевич, О.К. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О.К. Зенкевич. – М.: Мир, 1978. – 519 с.

Поступила в редакцию 25.05.2013, рассмотрена на редколлегии 14.06.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., зав. каф. «Двигатели внутреннего сгорания» Б.Г. Тимошевский, Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова, Николаев.

**КОЛИВАННЯ ТА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ВІНЦІВ РОБОЧИХ ЛОПАТОК  
ТУРБОМАШИН ПРИ ПОРУШЕННІ ЦИКЛІЧНОЇ СИММЕТРІЇ***О.С. Каиров, С.О. Моргун*

Викладено методику досліджень вимушених коливань та напружено-деформівного стану вінців робочих лопаток турбомашин, як циклічно несиметричної системи, враховуючи демпфірування. З використанням методу кінцевих елементів розроблено уточнену математичну модель вінця, як сукупності секцій «сектор диску – лопатка з демпферними зв'язками», що дозволяє враховувати конструктивну неоднорідність диска та пера лопатки. Наведено результати розрахунку амплітуд вимушених коливань системи, які збуджуються нестационарною газодинамічною силою для різних варіантів демпфірування. Вказано значення максимальних напруг в залежності від частоти вимушених коливань та кількості вузлових діаметрів для основних конструктивних виконань лопаткового вінця.

**Ключові слова:** вимушені коливання, демпфірування, амплітуди коливань, напружено-деформівний стан, метод кінцевих елементів, газодинамічна сила.

**TURBINE ENGINES BLADED DISKS SUBMITTED AS NON-CYCLICAL SYSTEM VIBRATION,  
STRESS AND DEFORMATION ANALYSIS***O.S. Kairov, S.O. Morgun*

The problems of turbine engines bladed disks, submitted as non-cyclical system, vibration, stress and deformation analysis has been studied. The mathematical model that gives an opportunity to present the whole bladed disk as a unity of homogeneous and several inhomogeneous sections has been developed by means of finite elements method. The usage of these model types can help to take into consideration such important units as structural inhomogeneity of blade and disk parts; internal and constructional damping. The results of turbine engine bladed disk vibration amplitudes, forced by variable aerodynamic force are given. Dependences between the highest stresses and forced vibration frequencies are also obtained for the two main types of bladed disks.

**Key words:** forced vibration, damping, vibration amplitudes, stresses and deformations, finite elements method, aerodynamic force.

**Каиров Алексей Сергеевич** – д-р техн. наук, проф., зав. каф. «Технологии судового машиностроения» Национального университета кораблестроения имени адмирала Макарова, Николаев, Украина, e-mail: alex-kairov@yandex.ru.

**Моргун Сергей Александрович** – аспирант каф. «Технологии судового машиностроения» Национального университета кораблестроения имени адмирала Макарова, Николаев, Украина, e-mail: technolognuk@rambler.ru.