УДК 629.7.05.01:004.9(075.8)

В. И. ИВАНОВ

Научно-производственное предприятие Хартрон-Аркос, Харьков, Украина

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Предлагаемый метод обеспечивает возможность уменьшения времени бортовой цифровой вычислительной машины, затрачиваемого на вычисление вектора состояния космического аппарата (КА) с требуемым шагом формирования, без снижения требуемой точности его определения. Поставленная цель достигается тем, что параметры движения центра масс КА вычисляются численным интегрированием с шагом большим, чем требуемый шаг формирования вектора состояния КА. Для его определения с требуемым шагом применяется экстраполяция радиуса-вектора и вектора скорости КА их полиномиальными зависимостями от радиуса-вектора и его производных в начале шага интегрирования.

Ключевые слова: *космический аппарат, центр масс, прогнозирование, вектор состояния.*

Введение

Метод прогнозирования параметров движения вектора состояния центра масс является важным элементом алгоритмического обеспечения системы навигации КА. От него зависит точность определения радиуса-вектора и вектора скорости центра масс КА, а также время, затрачиваемое бортовой цифровой вычислительной машиной (БЦВМ) на определение этих навигационных параметров. В свою очередь от точности, с которой рассчитываются радиус-вектор и вектор скорости центра масс КА, зависит точность построения ориентации и стабилизации при выполнении КА таких функций, как наблюдение за планетами и звёздами, зондирование земной поверхности, коррекция орбиты. То есть от выбора способа прогнозирования вектора состояния КА существенно зависит как техническая, так и экономическая эффективность системы навигации КА.

Известен ряд способов прогнозирования вектора состояния центра масс КА аналитическими методами. При разработке таких аналитических способов обычно используют разнообразные методы приближённого интегрирования уравнений в оскулирующих кеплеровых элементах или пытаются найти такой вид потенциальной функции, аппроксимирующей гравитационное поле притягивающего центра, которая допускает решение дифференциальных уравнений в квадратурах. Так, для околоземных орбит часто используются способы прогнозирования возмущённой орбитой, когда учитывается влияние второй зональной гармоники в разложении потенциала гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям [1, 2]. Недостатком аналитических методов является то, что они используют приближённые формулы и не учитывают широкий спектр действующих на КА возмущений. А также то, что для любого типа орбиты практически невозможно разработать обобщённый аналитический метод решения.

Существуют также способы прогнозирования вектора состояния центра масс КА приближённым интегрированием системы дифференциальных уравнений возмущённого движения КА в оскулирующих кеплеровых элементах орбиты. При этом для описания возмущенного движения чаще всего используются уравнения Лагранжа или уравнения Ньютона [1]. Однако эти системы уравнений нелинейные как по аргументу – времени, так и по искомым функциям – оскулирующим элементам и поэтому не интегрируются в конечном виде. Так как оскулирующие элементы являются функциями, которые медленно изменяются по времени, то уравнения движения в оскулирующих элементах, как правило, интегрируют приближёнными методами, что является существенным недостатком прогнозирования в оскулирующих кеплеровых элементах, поскольку требуемая точность вычисления вектора состояния КА может обеспечиваться на коротких интервалах времени.

Известен ряд методов прогнозирования вектора состояния центра масс КА численным интегрированием системы дифференциальных уравнений движения центра масс КА в прямоугольных координатах. Среди них чаще всего используют метод Адамса с переменным шагом интегрирования [1, 2]. Недостатком методов прогнозирования численным интегрированием в прямоугольных координатах является зависимость точности и времени расчёта вектора состояния КА от полноты учёта возмущающих факторов в правых частях дифференциальных уравнений и от величины шага интегрирования, а также то, что для обеспечения высокой точности расчёта вектора состояния необходимо использовать относительно небольшие шаги интегрирования.

В системах навигации околоземных КА также нашёл применение метод прогнозирования вектора состояния центра масс КА путём численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения центра масс КА методом Рунге-Кутта с постоянным шагом в прямоугольных координатах. Особенностью такого метода является то, что он позволяет учесть широкий спектр действующих возмущений, при этом затраты времени бортового вычислителя на выполнение интегрирования пропорциональны количеству реализованных шагов интегрирования [1]. Недостатком этого способа является то, что использование его с малым шагом формирования вектора состояния центра масс КА приводит к значительным затратам времени БЦВМ, необходимого для выполнения расчётов.

Для уменьшения времени, затрачиваемого БЦВМ на вычисление вектора состояния КА, предлагается использовать комбинированный метод прогнозирования параметров движения центра масс КА.

Комбинированный метод прогнозирования параметров движения центра масс КА

Комбинированный метод прогнозирования параметров движения центра масс КА основан на использовании численного интегрирования методом Рунге-Кутта с шагом большим, чем требуемый шаг формирования вектора состояния КА, и их экстраполяции полиномиальной функцией с требуемым шагом формирования. Полиномиальная функция основана на разложении в степенной ряд Тейлора-Маклорена и представляет собой полиномиальные зависимости для радиуса-вектора и вектора скорости в конце шага экстраполяции. Радиус-вектор и вектор скорости в конце шага экстраполяции зависят от радиуса-вектора и его производных в начале этого шага. Порядок полиномиальной функции соответствует максимальному порядку учитываемых в ней производных радиуса-вектора.

В дальнейшем шаг, с которым используется полиномиальная функция, будем называть шагом экстраполяции, а шаг, с которым производится численное интегрирование, – шагом интегрирования. Предлагаемый способ прогнозирования можно назвать комбинированным способом прогнозирования численным интегрированием методом Рунге-Кутта и экстраполяцией полиномиальной функцией.

Как известно, шаг интегрирования может быть увеличен только так, чтобы точность формирования радиус-вектора и вектора скорости КА на протяжении необходимого интервала времени удовлетворяла установленным требованиям. Шаг экстраполяции и порядок полиномиальной функции необходимо выбирать такими, чтобы обеспечивать определение вектора состояния с необходимой точностью и шагом формирования.

Полная погрешность предлагаемого способа в основном зависит от порядка метода численного интегрирования, шага интегрирования и полноты учёта возмущающих факторов в правых частях дифференциальных уравнений движения центра масс КА, а на интервалах внутри шага интегрирования – от величины погрешности численного интегрирования, порядка полиномиальной функции, шага экстраполяции, формы представления производных радиуса-вектора и вектора скорости КА в полиномиальной функции и состава учтённых возмущений в её модели ускорения и моделях производных ускорения.

Важным преимуществом такого подхода является отсутствие на интервалах внутри шага интегрирования многократного повторения итерационных операций, а также необходимость наличия только одного известного вектора состояния КА в начале этих интервалов. Объём расчётов радиуса-вектора и вектора скорости при использовании полиномиальной функции зависит от тех же факторов, что и точность определения вектора состояния внутри шага интегрирования.

Предлагаемый способ обеспечивает возможность уменьшения времени БЦВМ, затрачиваемого на вычисление вектора состояния КА с требуемым шагом формирования, без снижения необходимой точности его определения.

В рамках поставленной задачи важными характеристиками предлагаемого комбинированного способа прогнозирования являются относительные затраты процессорного времени, которые рассчитываются как отношение затрат процессорного времени комбинированного способа к затратам процессорного времени какого-либо способа прогнозирования вектора состояния центра масс КА. При помощи этой характеристики можно сделать вывод о целесообразности замены этого способа прогнозирования на комбинированный с точки зрения уменьшения времени, затрачиваемого БЦВМ на вычисление вектора состояния КА.

Если известно отношение затрат процессорного времени на один шаг экстраполяции полиномиальной функцией к затратам на один шаг прогнозирования каким-нибудь другим способом ΔPT_e, и известно такое же отношение для интегрирования методом Рунге-Кутта ΔPT_i, то относительные затраты времени комбинированного способа (при равенстве шагов экстраполяции и прогнозирования) рассчитываются по формуле:

$$\Delta PT = \frac{h_e}{h_i}\Delta PT_i + \Delta PT_e\left(1 - \frac{h_e}{h_i}\right), h_i > h_e,$$

где h_e – шаг экстраполяции комбинированным способом;

h_i – шаг интегрирования комбинированным способом.

Другими важными характеристиками предлагаемого комбинированного способа прогнозирования являются сферические погрешности отклонений по радиус-вектору ΔR и вектору скорости ΔV, которые показывают, насколько снижается точность расчётов этих навигационных параметров КА на участках использования полиномиальной функции по сравнению с эталонными значениями. В качестве начальных условий для формирования эталонных значений используются радиус-вектор и вектор скорости КА, проинтегрированные на начало интервалов внутри шага интегрирования. Это позволяет исключить из анализа влияние погрешности задания начальных условий на точность экстраполяции полиномиальной функцией. Метод, выбранный для формирования эталонов, необходимо использовать с шагом меньшим или равным шагу экстраполяции. Сферические погрешности отклонений рассчитываются по формулам:

$$\Delta R = \sqrt{(x_к - x_{ет})^2 + (y_к - y_{ет})^2 + (z_к - z_{ет})^2};$$

$$\Delta V = \sqrt{(v_{xк} - v_{xет})^2 + (v_{yк} - v_{yет})^2 + (v_{zк} - v_{zет})^2},$$

где $x_{ет}$, $y_{ет}$, $z_{ет}$ – компоненты эталонного радиуса-вектора;

$x_к$, $y_к$, $z_к$ – компоненты радиуса-вектора, рассчитанные комбинированным способом прогнозирования;

$v_{xет}$, $v_{yет}$, $v_{zет}$ – компоненты эталонного вектора скорости;

$v_{xк}$, $v_{yк}$, $v_{zк}$ – компоненты вектора скорости, рассчитанные комбинированным способом прогнозирования.

В таблице 1 представлены характеристики комбинированного способа прогнозирования численным интегрированием методом Рунге-Кутта четвертого порядка и экстраполяцией полиномиальной функцией второго порядка, в таблице 2 – характеристики комбинированного способа прогнозирования тем же численным методом интегрирования и экстраполяцией полиномиальной функцией третьего порядка, в таблице 3 – характеристики комбинированного способа прогнозирования тем же численным методом интегрирования и экстраполяцией полиномиальной функцией четвертого порядка.

Для демонстрации работоспособности и эффективности предложенного способа прогнозирования вектора состояния центра масс рассмотрим три его разновидности с разными шагами экстраполяции и интегрирования. Расчёт вектора состояния проводится в гринвичской системе координат. Во всех этих примерах используется метод Рунге-Кутта четвертого порядка. В системе дифференциальных уравнений движения КА учитывается влияние в разложении потенциала гравитационного поля Земли U в ряд по сферическим функциям гармоник до шестнадцатого порядка включительно [3]:

$$U(r, \lambda, \varphi) =$$

$$= \frac{\mu}{r}\left(1 + \sum_{n=2}^{16}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{k=0}^{n}\left(C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda\right)P_n^k(\sin\varphi)\right),$$

где μ – геоцентрическая гравитационная постоянная Земли;

a – большая полуось общего земного эллипсоида;

r – модуль радиуса-вектора КА;

C_{nk}, S_{nk} – коэффициенты гармонического разложения;

λ, φ – долгота и широта подспутниковой точки;

P_n^k – присоединенные функции Лежандра.

Рассмотренные примеры отличаются порядком полиномиальных функций: второй, третий и четвертый.

Для полиномиальной функции второго порядка применялась следующая формульная схема:

$$\begin{cases} \vec{v}(t_n + \Delta t) = \vec{v}(t_n) + \vec{g}(t_n)\Delta t; \\ \vec{r}(t_n + \Delta t) = \vec{r}(t_n) + \left(\vec{v}(t_n) + \vec{v}(t_n + \Delta t)\right)\dfrac{\Delta t}{2}, \end{cases}$$

где $\vec{r}(t_n)$, $\vec{v}(t_n)$ и $\vec{g}(t_n)$ – радиус-вектор, вектор скорости и вектор ускорения в момент времени t_n;

Δt – шаг экстраполяции.

Формульная схема для полиномиальной функции третьего порядка:

$$\begin{cases} \vec{v}(t_n + \Delta t) = \vec{v}(t_n) + \left(\vec{g}(t_n) + \dot{\vec{g}}(t_n)\dfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t; \\ \vec{r}(t_n + \Delta t) = \vec{r}(t_n) + \left(\vec{v}(t_n) + \left(\vec{g}(t_n) + \dot{\vec{g}}(t_n)\dfrac{\Delta t}{3}\right)\dfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t, \end{cases}$$

где $\dot{\vec{g}}(t_n)$ – производная вектора ускорения в момент времени.

Формульная схема для полиномиальной функции четвёртого порядка:

$$\begin{cases} \vec{v}(t_n+\Delta t)=\vec{v}(t_n)+ \\ \quad +\left(\vec{g}(t_n)+\left(\dot{\vec{g}}(t_n)+\ddot{\vec{g}}(t_n)\dfrac{\Delta t}{3}\right)\dfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t; \\ \vec{r}(t_n+\Delta t)=\vec{r}(t_n)+ \\ \quad +\left(\vec{v}(t_n)+\left(\vec{g}(t_n)+\left(\dot{\vec{g}}(t_n)+\ddot{\vec{g}}(t_n)\dfrac{\Delta t}{4}\right)\dfrac{\Delta t}{3}\right)\dfrac{\Delta t}{2}\right)\Delta t. \end{cases}$$

где $\ddot{\vec{g}}(t_n)$ – вторая производная вектора ускорения в момент времени t_n.

В моделях ускорения и моделях производных ускорения, используемых в полиномиальных функциях, учитывается влияние в разложении потенциала гравитационного поля Земли только второй зональной гармоники C_{20}.

Числовые расчёты проводятся для орбиты, параметры которой в течение суток изменяются так: модуль радиус-вектора от 7022,966 км до 7081,509 км, модуль вектора скорости от 7,489 км/с до 7,551 км/с, эксцентриситет от 0,003191 до 0,005188, наклон орбиты от 98,2654° до 98,2806°, долгота восходящего узла от 120,0302° до 121,0817°.

Проанализируем относительные затраты процессорного времени рассмотренных разновидностей комбинированного способа. В качестве эталонного способа прогнозирования выберем такой же метод численного интегрирования, как и в рассматриваемых примерах. При этом $\Delta PT_i = 1$, а $\Delta PT_e = 0{,}129$ для полиномиальной функции второго порядка, $\Delta PT_e = 0{,}266$ для полиномиальной функции третьего порядка, $\Delta PT_e = 0{,}475$ для полиномиальной функции четвертого порядка. Выбирая разные шаги экстраполяции и интегрирования, получаем разные значения относительных затрат времени (таблицы 1–3).

Во всех случаях $\Delta PT < 1$, что свидетельствует об уменьшении времени, затрачиваемого БЦВМ на вычисление вектора состояния КА, в случае использования рассмотренных разновидностей комбинированного способа вместо обычного способа прогнозирования численным интегрированием методом Рунге-Кутта четвертого порядка.

Далее оценим точность рассмотренных вариаций предложенного комбинированного способа. Поскольку их точность по отношению к выбранному эталону зависит от шага интегрирования и длительности интервала прогнозирования, то оценить её несложно, воспользовавшись известными способами.

Рассмотрим сферические погрешности отклонений. В качестве эталонов для расчёта этих погрешностей также выберем метод численного интегрирования Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом 1 с. Для разных шагов экстраполяции и интегрирования получаем разные значения погрешностей (таблицы 1–3).

Длительность участков экстраполяции полиномиальной функцией в каждом представленном случае разная и равняется разности между соответствующим шагом интегрирования и шагом экстраполяции.

Сферические погрешности полиномиальных функций третьего и четвертого порядков при малых шагах экстраполяции практически одинаковы, что свидетельствует об их равноточности в этих случаях. Величина их погрешностей обусловлена погрешностью не учёта гармоник в разложении потенциала гравитационного поля Земли. Самые большие сферические погрешности отклонений в полиномиальной функции второго порядка. Величина погрешностей обусловлена тем, что её методическая погрешность больше, чем погрешность неучёта гармоник. Более точной по результатам моделиро-

Таблица 1

Характеристики комбинированного способа прогнозирования численным интегрированием и экстраполяцией полиномиальной функцией второго порядка

Шаг экстраполяции, с	Шаг интегрирования, с: 10			20			50		
	Относительные затраты времени	Сферические погрешности ΔR, м	Сферические погрешности ΔV, м/с	Относительные затраты времени	Сферические погрешности ΔR, м	Сферические погрешности ΔV, м/с	Относительные затраты времени	Сферические погрешности ΔR, м	Сферические погрешности ΔV, м/с
1	0,2161	0,1838	0,0424	0,1726	0,8351	0,0894	0,1464	5,6108	0,2305
2	0,3032	0,2722	0,0741	0,2161	1,4465	0,1668	0,1638	10,527	0,4446
5	0,5645	0,1919	0,1148	0,3468	2,2980	0,3445	0,2161	22,391	1,0330
10	-	-	-	0,5645	1,5293	0,4584	0,3032	33,615	1,8331
25	-	-	-	-	-	-	0,5645	23,859	2,8620

Таблица 2

Характеристики комбинированного способа прогнозирования численным интегрированием и экстраполяцией полиномиальной функцией третьего порядка

Шаг экстраполяции, с	Шаг интегрирования, с								
	10			20			50		
	Относительные затраты времени	Сферические погрешности		Относительные затраты времени	Сферические погрешности		Относительные затраты времени	Сферические погрешности	
		ΔR, м	ΔV, м/с		ΔR, м	ΔV, м/с		ΔR, м	ΔV, м/с
1	0,3394	0,0105	0,0023	0,3027	0,0469	0,0049	0,2807	0,3121	0,0127
2	0,4128	0,0085	0,0021	0,3394	0,0429	0,0048	0,2954	0,3052	0,0127
5	0,6330	0,0035	0,0015	0,4495	0,0330	0,0045	0,3394	0,3016	0,0135
10	-	-	-	0,6330	0,0171	0,0043	0,4128	0,3241	0,0170
25	-	-	-	-	-	-	0,6330	0,2451	0,0328

Таблица 3

Характеристики комбинированного способа прогнозирования численным интегрированием и экстраполяцией полиномиальной функцией четвертого порядка

Шаг экcраполяции, с	Шаг интегрирования, с								
	10			20			50		
	Относительные затраты времени	Сферические погрешности		Относительные затраты времени	Сферические погрешности		Относительные затраты времени	Сферические погрешности	
		ΔR, м	ΔV, м/с		ΔR, м	ΔV, м/с		ΔR, м	ΔV, м/с
1	0,5275	0,0105	0,0023	0,5013	0,0466	0,0049	0,4855	0,3101	0,0127
2	0,5800	0,0083	0,0021	0,5275	0,0419	0,0047	0,4960	0,2976	0,0124
5	0,7375	0,0032	0,0013	0,6063	0,0291	0,0039	0,5275	0,2616	0,0116
10	-	-	-	0,7375	0,0129	0,0026	0,5800	0,2067	0,0103
25	-	-	-	-	-	-	0,7375	0,0807	0,0065

вания оказалась полиномиальная функция четвертого порядка, это объясняется полнотой учёта производных ускорения в её формульных схемах. В целом во всех случаях получены незначительные сферические погрешности отклонений, то есть все рассмотренные разновидности представленного комбинированного способа прогнозирования могут быть использованы при решении практических задач.

Таким образом, используя предлагаемый комбинированный способ прогнозирования численным интегрированием методом Рунге-Кутта и экстраполяцией полиномиальной функцией, можно уменьшить время, затрачиваемое БЦВМ при определении вектора состояния центра масс КА с требуемым шагом формирования, без снижения необходимой точности его расчёта. Для выбора порядка метода Рунге-Кутта, шага интегрирования, порядка полиномиальной функции и шага экстраполяции можно использовать предложенные характеристики: относительную затрату процессорного времени и сферические погрешности отклонений по радиусу-вектору и вектору скорости.

Заключение

1. Комбинированный метод прогнозирования параметров движения центра масс КА основан на использовании численного интегрирования методом Рунге-Кутта совместно с полиномиальной экстраполяцией с параметров движения центра масс КА.

2. Для выбора порядка метода и шага интегрирования, порядка полиномиальной функции и шага экстраполяции используются относительная затрата процессорного времени и сферические погрешности отклонений по радиусу-вектору и вектору скорости.

3. Полная погрешность предлагаемого способа в основном зависит:

– в конце шага интегрирования – от порядка метода численного интегрирования, шага интегрирования и полноты учёта возмущающих факторов в правых частях дифференциальных уравнений движения центра масс КА;

– на интервалах внутри шага интегрирования – от величины погрешности численного интегрирования, порядка полиномиальной функции, шага экстраполяции, формы представления производных радиуса-вектора и вектора скорости КА в полиномиальной функции и состава учтённых возмущений в её модели ускорения и моделях производных ускорения.

4. Предложенный метод обеспечивает возможность уменьшения времени БЦВМ, затрачиваемого на вычисление вектора состояния КА с требуемым шагом формирования, без снижения требуемой точности его определения.

Литература

1. *Дубошин, Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике [Текст] / Г. Н. Дубошин. – М. : Наука, 1976. – 352 с.*
2. *Основы теории полета космических аппаратов [Текст] / под ред. Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова. – М.: Машиностроение, 1972. – 607 с.*
3. *Астрономический ежегодник на 2000 год [Текст] / Институт прикладной астрономии РАН, 1999. – 714 с.*

Поступила в редакцию 4.02.2014, рассмотрена на редколлегии 12.02.2014

Рецензент: канд. техн. наук, доц. каф. систем управления летательными аппаратами Ю. А. Кузнецов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РУХУ ЦЕНТРА МАС КОСМІЧНОГО АПАРАТУ

В. І. Іванов

Метод, що пропонується, забезпечує можливість зменшення часу БЦОМ, для обчислювання вектора стану космічного апарату (КА) з потрібним шагом формування, без зниження точності його визначення. Мета досягається тим, що параметри руху центра мас КА обчислюються чисельним інтегруванням з шагом більшим, ніж шаг формування вектора стану КА. Для його визначення з потрібним шагом застосовується екстраполяція радіуса-вектора і вектора швидкості КА їх поліноміальними залежностями від радіуса-вектора та його похідних на початку шага інтегрування.

Ключові слова: космічний апарат, центр мас, прогнозування, вектор стану.

COMBINED METHOD OF CENTRE-OF-MASS SPACE CRAFT MOTION PARAMETERS PROGNOSTICATION

V. I. Ivanov

The offered method provides possibility of the on-board computer time diminishing, expended on the calculation of the space craft state vector with the required step of forming, without the decline of the required exactness of his determination. The put aim is arrived at by that centre-of-mass space craft motion parameters calculated by numeral integration with a step greater, than the required step of forming of the space craft state vector. For his determination with the required step used radius-vector and space craft state vector extrapolation by their polynomial dependences on a radius-vector and his derivatives at the beginning of integration step.

Keywords: space craft, centre-of-mass, prognostication, state vector.

Иванов Владимир Иванович – начальник сектора, научно-производственное предприятие Хартрон-Аркос, Харьков, Украина.