

УДК 681.51

В. В. УМІНСЬКИЙ*Житомирський військовий інститут ім. С. П. Корольова Державного університету телекомунікацій, Україна***АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ КООРДИНАТ АВТОНОМНОГО МОБІЛЬНОГО РОБОТА НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ**

В роботі синтезовано алгоритм оптимального оцінювання координат автономного мобільного робота, який рухається по рівноприскореному закону. Для синтезу алгоритму була застосована диференціальна модель фільтра Калмана, яка відрізняється від відомих алгоритмів калманівської фільтрації зменшеною обчислювальною складністю, що дає змогу реалізувати процес оцінювання в реальному масштабі часу, не вдаючись до його спрощення. Проведено дослідження розробленого алгоритму шляхом комп'ютерного моделювання, результати якого показали високу точність визначення координат мобільного робота та високу швидкість протікання перехідних процесів.

Ключові слова: автономний мобільний робот, фільтр Калмана, диференціальні перетворення.

Постановка проблеми

При управлінні рухом автономним мобільним роботом (АМР) для визначення поточних координат його місцезнаходження використовуються методи відносної або абсолютної навігації. Серед методів відносної локалізації найбільшого поширення отримав метод одометрії.

Як і в будь-яких вимірювальних системах, покази одометричних датчиків піддаються впливу перешкод, що знижує точність визначення поточного положення АМР і ускладнює, а іноді й унеможливує організацію його управління в автономному режимі. Тому підвищення точності локалізації АМР є актуальною задачею, розв'язання якої можливе на основі теорії оцінювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В переважній більшості робіт, присвячених оцінюванню координат автономного мобільного робота за даними одометрії [1-4], використовується нелінійна модель динамічної системи, що змушує застосовувати адаптивний, розширений або ансамблевий фільтри Калмана. Однак зазначені алгоритми належать до класу субоптимальних, тому не можуть дати найкращої оцінки за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки [5].

В даній роботі для отримання оптимальних оцінок поточного стану АМР пропонується використати модель рівноприскореного руху, яка описується лінійним диференціальним рівнянням другого порядку, та застосувати оптимальний лінійний фільтр Калмана на основі диференціальних

перетворень, модель якого розроблена в [6].

Формулювання завдання дослідження

Положення АМР на площині характеризується вектором стану, який включає прямокутні координати центра платформи АМР та кут її орієнтації. Нехай зміна кожної з координат здійснюється за рівноприскореним законом. Такий закон зміни описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{2}{t}\dot{x}(t) + \frac{2}{t^2}x(t) + q(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

або двома диференціальними рівняннями першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \frac{2}{t^2}x_1(t) - \frac{2}{t}x_2(t) + q(t), \end{cases} \quad (1^*)$$

де $q(t)$ – стаціонарний гауссівський білий шум з нульовим математичним сподіванням та постійною інтенсивністю $Q = \sigma_q^2$;

$x_1(t), x_2(t)$ – одна з координат вектору стану АМР та швидкість її зміни відповідно.

При цьому вимірюванню підлягає лише координата АМР $x_1(t)$, на яку діє перешкода $\vartheta_1(t)$, тобто рівняння спостереження має вигляд:

$$z_1(t) = x_1(t) + \vartheta_1(t), \quad (2)$$

де $\vartheta_1(t)$ – стаціонарний гауссівський білий шум з нульовим математичним сподіванням та постійною інтенсивністю $R = \sigma_{\vartheta_1}^2$.

Крім того, відомо, що випадкові процеси $q(t)$ та $\vartheta_1(t)$ некорельовані, тобто

$$M\{q(t)\vartheta_1(\tau)\} = 0.$$

Потрібно синтезувати алгоритм оцінювання координати АМР на основі фільтра Калмана з використанням математичного апарата диференціальних перетворень академіка Г. Є. Пухова, модель якого запропонована в [6].

Розробка алгоритму

Для синтезу оптимального нестационарного лінійного фільтра Калмана на основі диференціальних перетворень на основі рівнянь стану (1*) та спостереження (2) визначимо матриці, які характеризують динаміку процесу та об'єкта оцінювання:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2/t^2 & -2/t \end{vmatrix}; \\ \mathbf{G} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \\ \mathbf{H} &= [1 \quad 0]; \\ \mathbf{Q} &= \begin{vmatrix} \sigma_q^2 \end{vmatrix}; \\ \mathbf{R} &= \begin{vmatrix} \sigma_{\vartheta_1}^2 \end{vmatrix}; \\ \boldsymbol{\eta}(t_0) &= \begin{vmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \\ \sigma_{x_2} \sigma_{x_1} & \sigma_{x_2}^2 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\mathbf{F}(t)$ – матриця стану;

$\mathbf{G}(t)$ – матриця управління.

$\mathbf{H}(t)$ – матриця спостереження;

$\mathbf{Q}(t)$ – матриця інтенсивності похибок спостереження;

$\mathbf{R}(t)$ – матриця інтенсивності похибок вимірювання;

$\boldsymbol{\eta}(t_0)$ – початкова коваріаційна матриця похибок фільтрації.

З урахуванням (3) алгоритм калманівської фільтрації [7] матиме вигляд:

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t) = \hat{x}_2(t) + K_{11}(t)(z_1(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \hat{x}_2(t) = \frac{2}{t^2} \hat{x}_1(t) - \frac{2}{t} \hat{x}_2(t) + K_{21}(t)(z_1(t) - \hat{x}_1(t)), \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{vmatrix} \eta_{11}(t) \\ \sigma_{\vartheta_1}^2 \\ \eta_{21}(t) \\ \sigma_{\vartheta_1}^2 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{11}(t) = 2\eta_{21}(t) - \frac{1}{\sigma_{\vartheta_1}^2} \eta_{11}^2(t), \\ \dot{\eta}_{21}(t) = \eta_{22}(t) + \frac{2}{t^2} \eta_{11}(t) - \frac{2}{t} \eta_{21}(t) - \frac{1}{\sigma_{\vartheta_1}^2} \eta_{11}(t)\eta_{21}(t), \\ \dot{\eta}_{22}(t) = \frac{4}{t^2} \eta_{21}(t) - \frac{4}{t} \eta_{22}(t) - \frac{1}{\sigma_{\vartheta_1}^2} \eta_{21}^2(t) + \sigma_q^2, \end{cases} \quad (6)$$

де \hat{x}_1, \hat{x}_2 – оцінені значення координати та швидкості її зміни відповідно;

$\mathbf{K}(t)$ – матричний коефіцієнт підсилення.

Структура фільтра, що відповідає системі рівнянь (4) подана на рис. 1.

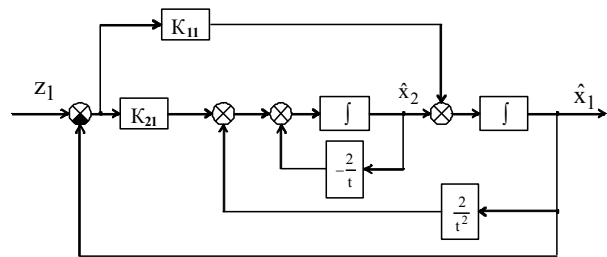


Рис. 1. Структурна схема фільтра

Для розв'язку системи нелінійних рівнянь типу Ріккати (6) застосуємо математичний апарат диференціальних перетворень академіка Г. Є. Пухова, який дозволяє точно моделювати складні нелінійні та нестационарні диференціальні рівняння алгебраїчними виразами в області зображень. Відповідно до правил диференціальних перетворень [8] система нелінійних диференціальних рівнянь (6) буде перетворена до вигляду:

$$\begin{cases} \eta_{11}(k+1) = \frac{H}{k+1} \left[2\eta_{21}(k) - \frac{1}{\sigma_{\vartheta_1}^2} \cdot \sum_{l=0}^k \eta_{11}(k-l)\eta_{11}(l) \right], \\ \eta_{21}(k+1) = \frac{H}{k+1} \left[\eta_{22}(k) + \frac{2}{H^2} \delta(k-2) \eta_{11}(k) - \right. \\ \left. - \frac{2}{H \cdot \delta(k-1)} \eta_{21}(k) - \frac{1}{\sigma_{\vartheta_1}^2} \cdot \sum_{l=0}^k \eta_{11}(k-l)\eta_{21}(l) \right], \\ \eta_{22}(k+1) = \frac{H}{k+1} \left[\frac{4}{H^2 \cdot \delta(k-2)} \eta_{21}(k) - \frac{4}{H \cdot \delta(k-1)} \times \right. \\ \left. \times \eta_{22}(k) - \frac{1}{\sigma_{\vartheta_1}^2} \cdot \sum_{l=0}^k \eta_{21}(k-l)\eta_{21}(l) + \sigma_q^2 \cdot \delta(k) \right], \end{cases} \quad (7)$$

де $\eta(k)$ – дискретний диференціальний спектр функції $\eta(t)$;

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = m, \\ 0, & \text{якщо } k \neq m, \end{cases} \quad - \text{тейлорівська}$$

одиниця або теда;

H – параметр диференціального перетворення;
 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – номер дискрети.

За системою рівнянь (7) знаходиться диференціальний спектр функцій $\eta_{11}(t)$, $\eta_{21}(t)$, $\eta_{22}(t)$ у вигляді набору дискрет $\eta_{11}(k)$, $\eta_{21}(k)$, $\eta_{22}(k)$.

Відновлення оригіналів функцій за їх диференціальними спектрами можливе як у формі ступеневих рядів (ряд Тейлора), так і у вигляді рядів за обраними базисними функціями, а також у вигляді підходящих апроксимуючих функцій з вільними коефіцієнтами, які знаходяться шляхом мінімізації деяких функціоналів [8].

У даному випадку для відновлення оригіналу функцій $\eta_{11}(t)$, $\eta_{21}(t)$, $\eta_{22}(t)$ доцільно обрати дрібно-раціональну функцію третього порядку, яка має вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_{11}(t) = \frac{m_{01} + m_{11}\tau + m_{21}\tau^2 + m_{31}\tau^3}{1 + n_{11}\tau + n_{21}\tau^2 + n_{31}\tau^3}, \\ \tilde{\eta}_{21}(t) = \frac{m_{02} + m_{12}\tau + m_{22}\tau^2 + m_{32}\tau^3}{1 + n_{12}\tau + n_{22}\tau^2 + n_{32}\tau^3}, \\ \tilde{\eta}_{22}(t) = \frac{m_{03} + m_{13}\tau + m_{23}\tau^2 + m_{33}\tau^3}{1 + n_{13}\tau + n_{23}\tau^2 + n_{33}\tau^3}, \end{cases} \quad (8)$$

де $\tau = \frac{t}{H}$ – відносний аргумент;

m_{ij}, n_{ij} – невідомі коефіцієнти.

Коефіцієнти n_{ij} легко визначити із такої лінійної системи алгебраїчних рівнянь [8]:

$$\begin{bmatrix} \eta(3) & \eta(2) & \eta(1) \\ \eta(4) & \eta(3) & \eta(2) \\ \eta(5) & \eta(4) & \eta(3) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} n_{1j} \\ n_{2j} \\ n_{3j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \eta(4) \\ \eta(5) \\ \eta(6) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де $\eta(1), \eta(2), \eta(3), \dots$ – дискрети диференціального спектру відповідної функції $\eta_{11}(t)$, $\eta_{21}(t)$ або $\eta_{22}(t)$;

$j=1, 2, 3$.

Після визначення коефіцієнтів знаменника n_{ij} знаходяться коефіцієнти чисельника m_{ij} за виразами:

$$\begin{bmatrix} m_{0j} \\ m_{1j} \\ m_{2j} \\ m_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n_{1j} & 1 & 0 & 0 \\ n_{2j} & n_{1j} & 1 & 0 \\ n_{3j} & n_{2j} & n_{1j} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \eta(0) \\ \eta(1) \\ \eta(2) \\ \eta(3) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Рівняння (4), (5), (8) є алгоритмом оцінювання координат АМР на основі диференціальних перетворень.

Дослідження розробленого алгоритму проводилось методом математичного моделювання на ПЕОМ в системі MatLab за допомогою пакета для математичного моделювання лінійних та нелінійних динамічних систем та пристроїв Simulink.

Моделювання проводилось при таких умовах: інтенсивність похибки вимірювання становить $\sigma_{\theta_1}^2 = 10^{-3}$, похибка у визначенні початкових умов становить до 10 відсотків від дійсного значення координати. Результати моделювання подані на рис. 2 – 3.

На рис. 2 наведено графіки зміни коваріаційної матриці похибки фільтрації у часі.

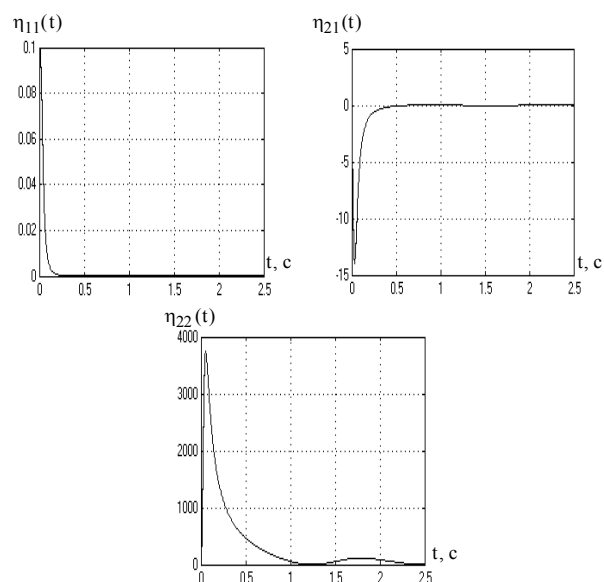


Рис. 2. Графіки зміни $\eta_{11}(t)$, $\eta_{21}(t)$, $\eta_{22}(t)$

На рис. 3 наведена нев'язка оцінювання ($\tilde{\epsilon}$), тобто різниця між вхідним корисним сигналом та сигналом на виході фільтра для випадків, коли: а) початкові умови відомі; б) початкові умови на 10 % відрізняються від дійсних значень.

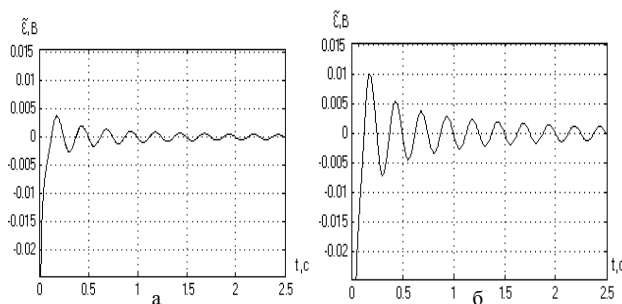


Рис. 3. Похибка оцінювання

Як видно з результатів моделювання, перехідні процеси у фільтрі швидкозгасають. В сталому режимі дисперсія похибки на виході фільтра становить величину близько 10^{-7} .

Висновки

Розроблений алгоритм дозволяє оцінювати координати АМР з високою точністю. Перехідні процеси у фільтрі швидкозгасають, а похибка оцінювання положення АМР в сталому режимі дозволяє здійснювати управління АМР з високою точністю. Алгоритм має невисоку обчислювальну складність, тому дозволяє проводити оцінювання в реальному часі.

Література

1. Siegwart, R. *Introduction to Autonomous Mobile Robots [Text]* / R. Siegwart, I. R. Nourbakhsh. – Massachusetts Institute of Technology, 2004. – 321 p.
2. Negenborn, R. *Robot Localization and Kalman Filters: On finding your position in a noisy world [Text]* / R. Negenborn // Thesis, Utrecht university, 2003. – 156 p.

3. *Robot Localization and Map Building [Електронний ресурс]* / Edited by Hanafiah Yusof, 2010. – 578 p. – Режим доступу: <http://www.intechopen.com/books/robot-localization-and-map-building>. – 12.05.2014.

4. Забегаев, А. Н. *Адаптация фильтра Калмана для использования с локальной и глобальной системой навигации [Текст]* / А. Н. Забегаев, В. Е. Павловский // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*, 2010. – № 82. – 24 с.

5. Фарина, А. *Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей [Текст]* : пер. с англ. / А. Фарина, Ф. Студер. – М. : Радио и связь, 1993. – 320 с.

6. Умінський, В. В. *Диференційна модель фільтра Калмана для локалізації автономного мобільного робота [Текст]* / В. В. Умінський // *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. – 2014. – № 1(46). – С. 33-36.

7. Сейдж, Э. *Теория оценивания и ее применение в связи и управлении [Текст]* : пер. с англ. / Э. Сейдж, Дж. Мелс ; под ред. проф. Б. Р. Левина. – М. : Связь, 1976. – 496 с.

8. Пухов, Г. Е. *Дифференциальные спектры и модели. [Текст]* / Г. Е. Пухов. – К. : Наук. думка, 1990. – 184 с.

Надійшла до редакції 12.05.2014, розглянута на редколегії 12.06.2014

Рецензент: д-р техн. наук, ст. наук. співр. Р. В. Гришук, Житомирський військовий інститут ім. С. П. Корольова Державного університету телекомунікацій, Житомир.

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ КООРДИНАТ АВТОНОМНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В. В. Уминский

В работе синтезирован алгоритм оптимального оценивания координат автономного мобильного робота, движущегося по равноускоренному закону. Для синтеза алгоритма применена дифференциальная модель фильтра Калмана, которая отличается от известных алгоритмов калмановской фильтрации уменьшенной вычислительной сложностью, что делает возможным реализацию процесса оценивания в реальном масштабе времени, не прибегая к его упрощению. Проведено исследование разработанного алгоритма путем компьютерного моделирования, результаты которого показали высокую точность определения координат мобильного робота и высокую скорость протекания переходных процессов.

Ключевые слова: автономный мобильный робот, фильтр Калмана, дифференциальные преобразования.

ALGORITHM OF OPTIMAL ESTIMATING COORDINATES AUTONOMOUS MOBILE ROBOT BASED ON THE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION

V. V. Uminskiy

In this paper, synthesized algorithm of optimal estimation of coordinate autonomous mobile robot moving in a uniformly accelerated law. For the synthesis algorithm is applied differential model of the Kalman filter, which differs from the known Kalman filtering algorithms to reduce the computational complexity, which makes it possible to implement the evaluation process in real time whi-scale without resorting to simplify it. A study of the algorithm by computer simulation, the results of which showed a high positioning accuracy of the mobile robot and high-speed transient processes.

Keywords: autonomous mobile robot, the Kalman filter, differential transformation.

Умінський Володимир Вікторович – канд. техн. наук, ст. наук. співр., доцент кафедри, Житомирський військовий інститут ім. С. П. Корольова Державного університету телекомунікацій, Житомир, Україна, e-mail: vovan250576@ukr.net.