## УДК 62-755

# А. Н. ГОРБЕНКО

### Керченский государственный морской технологический университет

# ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО РОТОРА

В работе рассматриваются особенности динамики ротора, который имеет различные моменты инерции относительно его поперечных осей. Выполнен анализ вынужденных колебаний неуравновешенного гироскопического ротора, который произвольно расположен относительно опор. Показано, что инерционная анизотропия может вызывать заметное увеличение вибрации ротора. В наибольшей степени это увеличение проявляется для роторов длинного и сферического типов при частотах вращения в области критических частот угловых колебаний. Предложено выражение для коэффициента чувствительности ротора к инерционной анизотропии.

**Ключевые слова:** ротор, инерционная анизотропия, колебания, вибрация, устойчивость, моменты инерции, критические скорости.

# 1. Постановка проблемы. Анализ существующих исследований. Цель работы

В технике широко применяются различные машины роторного типа, основной частью которых служит быстровращающийся ротор. Вследствие неизбежных неточностей изготовления и действия эксплуатационных факторов в таких роторах возбуждаются как поперечные, так и угловые колебания. При высоких скоростях вращения в заметной степени проявляются свойства, обусловленные инерцией поворота вращающегося тела, в частности гироскопический эффект. Интенсивность угловых колебаний ротора зависит от распределения массы в нем, т.е. от его массовых моментов инерции относительно главных осей инерции. Идеальным ротором является осесимметричное тело, вращающееся вокруг своей продольной оси симметрии. При этом его два диаметральных момента инерции относительно поперечных главных осей инерции равны друг другу. Однако реальный ротор всегда имеет отклонения от равномерного распределения массы, и указанные два момента инерции не равны друг другу. Это свойство реального ротора называется подвижной инерционной анизотропией.

Анизотропность инерционных свойств ротора приводит к усложнению его динамики, изменению количества и значений критических скоростей вращения и может служить причиной, как увеличения вибрации, так и потери устойчивости движения механической системы (МС). В связи с этим изучение влияния данного фактора на динамику гироскопического ротора является актуальной задачей.

Влияние анизотропии на колебания и устойчи-

вость вращающегося ротора изучалось в ряде работ [1-7]. В них показано, что инерционная анизотропия в общем случае приводит к удваиванию (расщеплению) критических скоростей вращения. При этом появляются диапазоны частот вращения, внутри которых теряется устойчивость движения МС. Изучение литературных источников показывает, что наиболее изученным является случай симметричного расположения ротора относительно его опор. Существенно более сложным для анализа является общий случай несимметричного расположения ротора. В известных работах общий случай изучен недостаточно полно. В частности, не изучено влияние инерционной анизотропии на уровень вибрации неуравновешенного гироскопического ротора, отсутствуют какие-либо количественные критерии степени этого влияния в зависимости от параметров МС и режима работы роторной машины.

Ротор является инерционно анизотропным чаще всего по причине его конструктивных особенностей, либо из-за наличия большого дисбаланса. Кроме того, в работе [8] показано, что ротор становится инерционно анизотропным вследствие установки на него автобалансирующего устройства с корректирующими грузами немалой массы.

Целью работы является анализ вынужденных колебаний неуравновешенного гироскопического ротора, который имеет неодинаковые поперечные моменты инерции и произвольно расположен относительно опор. При этом будет получен критерий чувствительности вынужденных колебаний к инерционной анизотропии ротора.

## 2. Физическая модель и уравнения движения ротора

Рассмотрим роторную систему, состоящую из абсолютно жесткого ротора, который вращается на двух одинаковых упруго-демпферных изотропных опорах (рисунок 1). Ротор полагаем осесимметричным с центром масс в точке С на оси его вращения. Ротор может совершать малые пространственные колебания. Физическая модель и уравнения движения такой МС известны, см., например, [1-7]. Здесь мы будем исходить из материалов работ [6, 7].



 $y, y_C, \eta_C$ 

Рис. 1. Схема механической системы ротора

Физические и геометрические параметры МС:

 $\omega-$  угловая скорость вращения ротора, рад/с;  $M_r-$  масса ротор, кг;

 $C_r$  – полярный массовый момент инерции ротора относительно оси вращения, кг·м<sup>2</sup>;

 $A_{r\xi}, A_{r\eta}$  – диаметральные массовые моменты инерции ротора относительно поперечных осей  $\xi_c$  и  $\eta_c, \kappa \Gamma \cdot M^2$ ;

 $A_r=0,5(A_{r\xi} + A_{r\eta})$  – средний диаметральный момент инерции ротора относительно поперечных осей  $\xi_c$  и  $\eta_c$ , кг·м<sup>2</sup>;

 $\Delta A_r = 0.5(A_{r\xi} - A_{r\eta})$  – инерционная анизотропия ротора, кг·м<sup>2</sup>;

с – коэффициент жесткости опоры, Н/м;

h - коэффициент вязкого демпфирования опоры, кг·с<sup>-1</sup>;

 $l = l_{cL} + l_{cR} - расстояние между опорами ротора, м.$ 

 $l_{cL}$ ,  $l_{cR}$  – расстояния от центра масс ротора до левой и правой опор (при консольном расположении ротора величина  $l_{cR}$  отрицательна), м.

Для моделирования инерционной анизотропии, к осесимметричному ротору жестко прикреплены четыре точечные массы – две пары материальных точек, расположенные на радиусе R<sub>A</sub> в сечении центра масс ротора С (см. рис. 1). При этом первые две точки имеют массу  $m_A$  каждая, а вторые две точки имеют «отрицательную» массу  $-m_A$  (путем удаления материала ротора). Каждая пара этих точек расположена на концах диаметра  $2R_A$ , а эти два диаметра перпендикулярны друг другу (т.е. точки расположены «крестом»). Добавленные точечные массы не изменяют массу ротора и среднее значение диаметрального момента инерции.

Статический дисбаланс ротора моделируется присоединением к нему точечной массы  $m_0$  на радиусе  $R_0$  в сечении центра масс ротора С. Динамический дисбаланс ротора моделируется присоединением к нему двух точечных масс  $m_d$  (каждая) на радиусе  $R_d$  в двух сечениях, равноотстоящих от центра масс ротора С на расстояние  $z_A$ , причем эти две массы расположены диаметрально противоположно. Дисбалансные массы  $m_0$ ,  $m_d$  (на рисунке не показаны) полагаем малыми, поэтому они не изменяют массо-инерционные параметры самого ротора, а только обуславливают возмущающие силы и моменты. Массы  $m_A$  полагаем немалыми.

Механическая система имеет четыре степени свободы. Обобщенные координаты (ОК) движения МС в неподвижной системе координат:

 $\{z_{c}\} = (x_{c} \ y_{c})^{T}$  – координаты центра масс ротора;

 $\{\gamma\} = (\alpha \ \beta)^{T}$  – углы поворота поперечного сечения, проходящего через центр масс ротора.

Анализ динамики анизотропного ротора связан с необходимостью перехода в систему координат, вращающуюся с угловой скоростью ю. Во вращающихся координатах ОК МС принимают вид:

$$\left\{\mathbf{w}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mathbf{u}_{\mathbf{c}}\\\mathbf{v}_{\mathbf{c}}\end{matrix}\right\} = \left[\mathbf{T}\right]^{-1}\left\{\mathbf{z}_{\mathbf{c}}\right\}; \quad \left\{\boldsymbol{\chi}\right\} = \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\delta}\\\boldsymbol{\theta}\end{matrix}\right\} = \left[\mathbf{T}\right]^{-1}\left\{\boldsymbol{\gamma}\right\}, \quad (1)$$

где

$$[T(t)] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$
 – матрица поворота.

Коэффициенты жесткости и демпфирования, приведенные к центру масс ротора, зависят от расположения ротора относительно опор и определяются выражениями:

$$c_{x} = 2c; c_{\alpha} = c(l_{cL}^{2} + l_{cR}^{2}); c_{y\alpha} = c(l_{cL} - l_{cR});$$

$$h_{x} = 2h; h_{\alpha} = h(l_{cL}^{2} + l_{cR}^{2}); h_{y\alpha} = h(l_{cL} - l_{cR}).$$

$$(2)$$

Безразмерные уравнения движения инерционно анизотропного ротора во вращающихся координатах имеют вид (вывод уравнений см. [8, 6]):

$$\{\overline{\mathbf{w}}\}'' + \left[\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}\right] \{\overline{\mathbf{w}}\}' + \left[\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{w}}\right] \{\overline{\mathbf{w}}\} + \overline{\mathbf{h}}_{y\alpha} \left[\mathbf{E}_{c}\right] \{\overline{\chi}\}' + \left[\overline{\mathbf{K}}_{w\chi}\right] \{\overline{\chi}\} = \overline{\mathbf{S}}_{0} \Omega^{2} \begin{cases} \cos \alpha_{0} \\ \sin \alpha_{0} \end{cases};$$
(3)

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{I}}_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \right) \left\{ \overline{\chi} \right\}'' + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{H}}_{\chi} \end{bmatrix} \left\{ \overline{\chi} \right\}' + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{\chi} \end{bmatrix} \left\{ \overline{\chi} \right\} - \frac{1}{h_{y\alpha}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{c} \end{bmatrix} \left\{ \overline{\mathbf{w}} \right\}' - \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{w\chi} \end{bmatrix} \left\{ \overline{\mathbf{w}} \right\} = \overline{\mathbf{S}}_{d} \Omega^{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{c} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\cos \alpha_{d}}{\sin \alpha_{d}} \right\},$$

$$(4)$$

где

$$\begin{split} \left[ \overline{H}_{w} \right] &= \overline{h}_{x} \left[ E \right] + 2\Omega \left[ E_{c} \right]; \\ \left[ \overline{H}_{\chi} \right] &= \overline{h}_{\alpha} \left[ E \right] + \Omega \left( 2 - \overline{C}_{r} \right) \left[ E_{c} \right]; \\ \left[ \overline{K}_{w} \right] &= \left( 1 - \Omega^{2} \right) \left[ E \right] + \Omega \overline{h}_{x} \left[ E_{c} \right]; \\ \left[ \overline{K}_{\chi} \right] &= \left( \overline{p}_{\alpha}^{2} + \Omega^{2} \left( \overline{C}_{r} - 1 \right) \right) \left[ E \right] + \Omega^{2} \left[ \overline{I}_{A} \right] + \Omega \overline{h}_{\alpha} \left[ E_{c} \right]; \\ \left[ \overline{K}_{w\chi} \right] &= -\Omega \overline{h}_{y\alpha} \left[ E \right] + \overline{c}_{y\alpha} \left[ E_{c} \right]; \\ \left[ \overline{I}_{A} \right] &= \Delta \overline{A}_{r} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (...)' = \frac{d}{d\tau}; \\ \left[ E \right] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \left[ E_{c} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{split}$$

Матричные уравнения (3) и (4) описывают поперечные и угловые колебания ротора соответственно. Все матрицы, входящие в эти уравнения, имеют размерность 2,2.

В уравнениях движения использованы следующие безразмерные ОК и параметры МС:

$$\begin{split} \{\overline{w}\} &= \frac{1}{l_w} \{w\}; \quad \{\overline{\chi}\} = \frac{1}{l_\chi} \{\chi\}; \quad \tau = \omega_0 t; \\ \{\overline{z}_c\} &= \frac{1}{l_w} \{z_c\}; \quad \{\overline{\gamma}\} = \frac{1}{l_\chi} \{\gamma\}; \\ \Omega &= \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \overline{p}_x^2 = \frac{c_x}{M_r \omega_0^2} = 1; \quad \overline{p}_\alpha^2 = \frac{p_\alpha^2}{\omega_0^2} = \frac{c_\alpha}{A_r \omega_0^2}; \\ \overline{h}_x &= \frac{h_x}{M_r \omega_0}; \quad \overline{h}_\alpha = \frac{h_\alpha}{A_r \omega_0}; \\ \overline{c}_{y\alpha} &= \frac{c_{y\alpha}}{\omega_0^2 \sqrt{M_r A_r}}; \quad \overline{h}_{y\alpha} = \frac{h_{y\alpha}}{\omega_0 \sqrt{M_r A_r}}; \\ \overline{C}_r &= \frac{C_r}{A_r}; \quad \Delta \overline{A}_r = \frac{\Delta A_r}{A_r}; \quad \Delta A_r = 2m_A R_A^2; \\ \overline{S}_0 &= \frac{S_0}{M_r l_w}; \quad S_0 = m_0 R_0; \\ \overline{S}_d &= \frac{S_d}{A_r l_\gamma}; \quad S_d = 2z_A m_d R_d, \end{split}$$

где масштабные коэффициенты  $l_w$ ,  $l_\chi$  выбраны следующим образом:

$$\frac{l_{\chi}}{l_w} = \sqrt{\frac{M_r}{A_r}} \ ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_x}{M_r}} \ . \label{eq:constraint}$$

Здесь  $\omega_0$  – парциальная (сепаратная) собственная частота поперечных колебаний ротора.

Приведенные безразмерные уравнения движения (3), (4) учитывают инерционную анизотропию ротора в виде безразмерного параметра  $\Delta \overline{A}_r$ , входящего в матрицы  $\lceil \overline{I}_A \rceil$ ,  $\lceil \overline{K}_{\gamma} \rceil$ .

Вынужденные колебания ротора возбуждаются статическим дисбалансом  $\overline{S}_0$  и динамическим дисбалансом  $\overline{S}_d$ . Параметры  $\alpha_0$ ,  $\alpha_d$  в (3), (4) отражают начальные угловые положения дисбалансов в момент времени t=0.

Приведем также формулы для расчета безразмерных коэффициентов жесткости и демпфирования в зависимости от расположения ротора относительно опор. Используя (2) и (5), получаем:

$$\begin{aligned} \overline{p}_{\alpha}^{2} &= \overline{c}_{\alpha} = \frac{\overline{l}_{L}^{2} + \left(1 - \overline{l}_{L}\right)^{2}}{2\overline{\rho}_{r}^{2}}; \quad \overline{c}_{y\alpha} = \frac{2\overline{l}_{L} - 1}{2\overline{\rho}_{r}}; \\ \overline{h}_{x} &= \frac{h_{x}}{M_{r}\omega_{0}} = \frac{2h}{M_{r}p_{x}}; \\ \overline{h}_{\alpha} &= \overline{h}_{x} \frac{\overline{l}_{L}^{2} + \left(1 - \overline{l}_{L}\right)^{2}}{2\overline{\rho}_{r}^{2}}; \quad \overline{h}_{y\alpha} = \overline{h}_{x} \frac{2\overline{l}_{L} - 1}{2\overline{\rho}_{r}}, \end{aligned}$$
(6)

где

$$\overline{l}_L = \frac{l_{cL}}{l} ; \quad \overline{\rho}_r = \frac{\rho_r}{l} ; \quad \rho_r = \sqrt{\frac{A_r}{M_r}} .$$

Здесь введены безразмерные параметры:

ρ<sub>г</sub> –радиус инерции ротора;

 $\overline{\rho}_{r}$  — относительный радиус инерции ротора; например, в случае тонкого диска радиуса  $R_{r}$  и при межопорном расстоянии равном l=0,5 $R_{r}$  параметр равен  $\overline{\rho}_{r}$ =1;

 $\overline{l_L}$  – относительное расстояние от центра масс ротора до левой опоры; при  $0 < \overline{l_L} < 1$  – межопорный ротор, при  $\overline{l_L} = 0.5$  – симметрично расположенный ротор, а при  $\overline{l_L} > 1$  – консольный ротор.

## 3. Критические скорости вращения и устойчивость анизотропного ротора

Спектр критических скоростей оказывает существенное влияние на вибрацию ротора. Критические скорости прямой прецессии несимметрично установленного инерционно анизотропного ротора определяются выражением (вывод см. в [7]):

$$\Omega_{K1-4}^{2} = \Omega_{K1,\alpha}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{\overline{p}_{\alpha}^{2}}{2\Delta \overline{l}_{1,2}} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{\overline{p}_{\alpha}^{2}}{\Delta \overline{l}_{1,2}}\right)^{2} + 4\frac{\overline{c}_{y\alpha}^{2}}{\Delta \overline{l}_{1,2}}}, \quad (7)$$

где

 $\Delta \overline{I}_{1,2} = 1 - \overline{C}_r \pm \Delta \overline{A}_r$ .

будет использоваться как обозначение  $\Omega_{K1-4}$ , так и обозначения  $\Omega_{KX1,2}$  и  $\Omega_{K\alpha 1,2}$  с указанием вида колебаний – поперечные и угловые. Полагаем также, что  $\Omega_{KX1} < \Omega_{KX2} < \Omega_{K\alpha 1} < \Omega_{K\alpha 2}$ , что характерно для типичных роторных машин.

В частном случае симметричного расположения ротора, когда  $\overline{c}_{y\alpha} = 0$ , критические скорости определяются выражениями, полученными из (7):

$$\Omega_{K1,2}^{2} = \Omega_{KX1,2}^{2} = 1;$$

$$\Omega_{K3,4}^{2} = \Omega_{K\alpha1,2}^{2} = \frac{\overline{p}_{\alpha}^{2}}{\Delta \overline{l}_{1,2}} = \frac{\overline{p}_{\alpha}^{2}}{1 - \overline{C}_{r} \pm \Delta \overline{A}_{r}}.$$
(8)

Из анализа выражений (7), (8) вытекает, что в общем случае анизотропный ротор, совершающий пространственное движение, может иметь от одной до четырех критических скоростей вращения [7]. В общем случае инерционная анизотропия ротора приводит к удваиванию количества критических скоростей по сравнению с изотропным ротором. Количество критических скоростей зависит от типа ротора, схемы его расположения и параметров MC.

Напомним, что согласно общепринятой классификации различают следующие типы роторов:

- длинный ротор, если  $C_r < A_r (\overline{C}_r < 1);$
- сферический ротор, если  $C_r = A_r (\overline{C}_r = 1);$
- короткий ротор, если  $C_r > A_r (\overline{C}_r > 1)$ .

На рис. 2, 3 приведены примеры зависимостей критических частот вращения от параметров ротора. Графики построены по формуле (7) при следующих базовых исходных данных:  $\overline{C}_r = 0,75$ ;  $\overline{\rho}_r = 0,4$ ;  $\Delta \overline{A}_r = 0,1$ . При этом для несимметрично установленно-го ротора ( $\overline{I}_L = 1,2$ ) имеем  $\overline{p}_{\alpha} = 2,15$ ,  $\overline{c}_{y\alpha} = 1,75$  и критические скорости  $\Omega_{K1-4} = (0,567; 0,575; 3,73; 5,61)$ .

Из приведенных графиков, помимо указанного выше, также видно, что расщепление критической скорости  $\Omega_{K\alpha}$  угловых колебаний существенно больше, чем критической скорости  $\Omega_{KX}$  поперечных колебаний при типичных значениях параметров роторной машины. При симметричном расположении ротора раздваивается только скорость  $\Omega_{K\alpha}$  угловых колебаний.

Небольшая анизотропия может вызывать существенное изменение критических скоростей  $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний ротора, в особенности для ротора близкого к сферическому типу (см. рис. 2). Короткие роторы слабо чувствительны к анизотропии (только по поперечным колебаниям) в отличие от роторов длинного типа.

Одной из особенностей динамического поведения анизотропного ротора является наличие областей неустойчивости свободных колебаний МС. В работе [7] получено следующее необходимое условие устойчивости инерционно анизотропного ротора:

$$\left( \Omega^2 - \Omega_{\mathrm{K}\,\mathrm{X}1}^2 \right) \left( \Omega^2 - \Omega_{\mathrm{K}\,\mathrm{X}2}^2 \right) \times \\ \times \left( \Omega^2 - \Omega_{\mathrm{K}\,\mathrm{\alpha}1}^2 \right) \left( \Omega^2 - \Omega_{\mathrm{K}\,\mathrm{\alpha}2}^2 \right) > 0.$$

$$(9)$$



Рис. 2. Критические скорости  $\Omega_{\rm K}$  вращения несимметрично установленного ротора ( $\overline{l}_{\rm L}$  =1,2)

с учетом инерционной анизотропии в зависимости от типа ротора  $\overline{C}_r$ :

----- для изотропного ротора.



Рис. 3. Критические скорости Ω<sub>к</sub> вращения длинного несимметрично расположенного ротора ( μ =0,8) в зависимости от инерционной анизотропии ΔĀ<sub>r</sub>

Из условия (9) следует, что инерционно анизотропный ротор, установленный несимметрично, может быть неустойчив в областях, лежащих внутри «расщепленных» критических скоростей, т.е. при  $\Omega_{K\alpha 1} < \Omega < \Omega_{K\alpha 2}$ ;  $\Omega_{KX1} < \Omega < \Omega_{KX2}$ .

Основной областью неустойчивости является первая из указанных (по угловым колебаниям), другие области при характерных диапазонах значений параметров MC отсутствуют.

# 4. Влияние инерционной анизотропии на вынужденные колебания ротора

Выражения для амплитуд вынужденных поперечных и угловых колебаний инерционно анизотропного ротора во вращающихся координатах вытекают из уравнений движений (3), (4) и имеют вид:

$$\begin{cases} \{\overline{\mathbf{w}}\} \\ \{\overline{\boldsymbol{\chi}}\} \end{cases} = \begin{cases} \overline{\mathbf{w}}_{c} \\ \overline{\mathbf{v}}_{c} \\ \overline{\boldsymbol{\delta}} \\ \overline{\boldsymbol{\theta}} \end{cases} = \Omega^{2} \left[ \overline{K} \right]^{-1} \begin{cases} S_{0} \cos \alpha_{0} \\ \overline{S}_{0} \sin \alpha_{0} \\ -\overline{S}_{d} \sin \alpha_{d} \\ \overline{S}_{d} \cos \alpha_{d} \end{cases}, \quad (10)$$

где

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{w}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{w}\chi} \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{w}\chi} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{\chi} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Выражения (10) относятся к обобщенным координатам ротора. Амплитуды колебания определяются формулами:

$$A_{w} = \sqrt{\overline{u}_{c}^{2} + \overline{v}_{c}^{2}}; \quad A_{\chi} = \sqrt{\overline{\delta}^{2} + \overline{\theta}^{2}}.$$
 (11)

На рисунке 4 показан пример амплитудночастотной характеристики (АЧХ) поперечных колебаний анизотропного ротора, рассчитанной по выражениям (10), (11). Расчет выполнен при следующих значениях параметров МС:  $\bar{C}_r = 0,75$ ;  $\bar{\rho}_r = 0,4$ ;  $\Delta \bar{A}_r = 0,1$ ;  $\bar{I}_L = 1,2$ ;  $\bar{h}_x = 0,05$ , при которых имеем  $\bar{p}_{\alpha} = 2,15$ ,  $\bar{c}_{y\alpha} = 1,75$  и критические скорости  $\Omega_{K1-4} = (0,567; 0,575; 3,73; 5,61)$ . Данные параметры соответствуют консольно установленному ротору длинного типа.

Многовариантный численный анализ показал, что инерционная анизотропия ротора оказывает существенно различное влияние на вибрацию в зависимости от частоты вращения, типа ротора, схемы его установки относительно опор, уровня демпфирования в МС. Данное обстоятельство затрудняет предварительную оценку степени чувствительности ротора к анизотропии.

В связи с указанным, нами предлагается использовать следующий коэффициент чувствительности вибрации ротора к инерционной анизотропии:

$$\mathbf{k}_{\mathbf{A}} = \frac{\left|\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{A}0}\right|}{\left|\overline{\mathbf{K}}_{\mathbf{A}}\right|} = \frac{\left(\overline{\mathbf{p}}_{\alpha}^{2} - \Delta\overline{\mathbf{I}}_{0} \, \Omega^{2}\right)^{2}}{\left(\overline{\mathbf{p}}_{\alpha}^{2} - \Delta\overline{\mathbf{I}}_{1} \, \Omega^{2}\right)\left(\overline{\mathbf{p}}_{\alpha}^{2} - \Delta\overline{\mathbf{I}}_{2} \, \Omega^{2}\right)}, \quad (12)$$

где

 $\Delta \overline{I}_0 = 1 - \overline{C}_r \; ; \; \Delta \overline{I}_{l,2} = 1 - \overline{C}_r \pm \Delta \overline{A}_r \; ; \;$ 

 $\left|\overline{K}_{A}\right|$  – определитель матрицы  $\left[\overline{K}\right]$  анизотропного ротора (см. (10), (3), (4)) при отсутствии демпфирования ( $\overline{h}$  =0);

 $\left| \overline{K}_{A0} \right|$  – определитель той же матрицы для изотропного ротора (  $\Delta \overline{A}_r = 0$ ).

Коэффициент k<sub>A</sub> характеризует изменение уровня вибрации вследствие инерционной анизотропии ротора в сравнении с изотропным случаем. Выбор выражения (12) для этого коэффициента обусловлен тем, что вектор амплитуд колебаний МС обратно пропорционален определителю матрицы  $\left[\overline{K}\right]$  (см. (10)). Именно величина  $\left|\overline{K}_{A}\right|$  определяет резонансные пики АЧХ МС и критические скорости вращения. При выводе правой части выражения (12) для её упрощения приняты допущения о малости влияния демпфирования и взаимосвязи угловых и поперечных колебаний ротора.

На рисунке 5 показан пример графика коэффициента чувствительности при указанных выше исходных данных.



Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика поперечных колебаний анизотропного ротора:

—— – анизотропный ротор,  $\Delta \overline{A}_r = 0,1$ ;

---- изотропный ротор,  $\Delta \overline{A}_r = 0$ 



Из графиков видно, что относительно небольшая анизотропия ротора вызывает увеличение амплитуд колебаний. Наиболее существенное увеличение имеет место в области критических частот вращения  $\Omega_{K\alpha 1,2}$ , соответствующих угловым колебаниям. Отметим также, что в диапазоне частот вращения  $\Omega_{K\alpha 1} < \Omega < \Omega_{K\alpha 2}$  движение МС неустойчиво. В области же критических частот  $\Omega_{KX1,2}$ , соответствующих поперечным колебаниям, уровень вибрации изменяется незначительно.

### Заключение

Таким образом, полученные в работе результаты показывают, что инерционная анизотропия может вызывать заметное увеличение вибрации быстровращающегося гироскопического ротора. В наибольшей степени это увеличение проявляется для роторов длинного и сферического типов при частотах вращения в области критических частот угловых колебаний. Предложенный коэффициент чувствительности ротора к инерционной анизотропии позволяет количественно оценивать степень опасности повышения его вибрации и создает основу для нормирования конструктивных и технологических требований к роторной машине.

### Литература

1. Диментберг, Ф. М. Колебания машин [Текст] / Ф. М. Диментберг, К. Т. Шаталов, А. А. Гусаров. – М. : Машиностроение, 1964. – 308 с. 2. Вибрации в технике [Текст] : справ. Том 3. – М. : Машиностроение, 1980. – 544 с. 3. Кренделл, С. Об устойчивости вращения ротора, обладающего несимметрией инерции и несимметрией жесткости вала [Текст] / С. Кренделл, П. Броузенс // Прикладная механика. – 1961. – № 4. – С. 97–101.

4. Black, H. Vibration of a rotating asymmetric shaft supported in asymmetric bearing [Text] / H. Black, A. Ternan // J. Mech. Eng. Sci. – 1968. – Vol. 10,  $N^{\circ}$  3. – P. 252–261.

5. Genta, G. Dynamics of Rotating Systems [Text] / G. Genta. – New York : Springer, 2005. – 658 p.

6. Горбенко, А. Н. О допустимом уровне инерционной анизотропии гироскопического ротора [Текст] / А. Н. Горбенко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 7 (104). – С. 61–66.

7. Горбенко, А. Н. О динамических свойствах несимметрично установленного ротора с инерционной анизотропией [Текст] / А. Н. Горбенко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – № 3/7 (69). – С. 8–17.

8. Филимонихин, Г.Б. Влияние массы шаров автобалансира на структуру уравнений движения двухопорного ротора [Текст] / Г.Б. Филимонихин, А. Н. Горбенко // Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении : Украинский межвед. науч.-техн. сб. – 2011. – Вып. 45. – С. 478–488.

Поступила в редакцию 01.06.2014, рассмотрена на редколлегии 14.06.2014

**Рецензент:** канд. техн. наук, проректор по научной работе В. Л. Конюков, Керченский государственный морской технологический университет, Керчь.

### ВПЛИВ ІНЕРЦІЙНОЇ АНІЗОТРОПІЇ НА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ НЕВРІВНОВАЖЕНОГО ГІРОСКОПІЧНОГО РОТОРА

### О. М. Горбенко

У роботі розглядаються особливості динаміки ротора, який має різні моменти інерції щодо його поперечних осей. Виконано аналіз вимушених коливань неврівноваженого гіроскопічного ротора, який довільно розташований щодо опор. Показано, що інерційна анізотропія може викликати помітне збільшення вібрації ротора. Найбільше це збільшення проявляється для роторів довгого і сферичного типів при частотах обертання в області критичних частот кутових коливань. Запропоновано формулу для коефіцієнта чутливості ротора до інерційної анізотропії.

Ключові слова: ротор, інерційна анізотропія, коливання, вібрація, моменти інерції, критичні швидкості.

### INFLUENCE OF INERTIAL ANISOTROPY ON THE FORCED OSCILLATIONS OF UNBALANCED GYROSCOPIC ROTOR

### A. N. Gorbenko

The paper discusses the features of the dynamics of the rotor, which has different moments of inertia about its transverse axis. Analysis of the forced vibration of unbalanced gyroscopic rotor, which is arbitrarily positioned relative to the supports have been done. It is shown that the inertial anisotropy can cause a noticeable increase rotor vibration. The greatest increase is seen for long and spherical types rotors at rotation speeds in the region of critical speeds of angular oscillations. It is proposed expression for the sensitivity coefficient of the rotor to the inertial anisotropy.

Key words: rotor, inertia anisotropy, oscillations, vibration, stability, moments of inertia, critical speed.

Горбенко Александр Николаевич – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры судовых энергетических установок, Керченский государственный морской технологический университет, Керчь, e-mail: gan0941@yandex.ru, www.gorbenko-a-n.narod.ru.