

УДК 531.133.1

Е. А. ИГУМЕНЦЕВ¹, Е. А. ПРОКОПЕНКО²¹ *Метрологический центр Национальной Акционерной Компании «Нефтегаз Украины» «Восточноевропейский региональный центр метрологии природного газа, нефти и нефтепродуктов», Украина*² *Украинская инженерно-педагогическая академия, Украина*

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ГИРОСКОПА

В качестве модели заряженного гироскопа предложен электрон. Показано, что электрон ведет себя как обычный волчок, если центр его тяжести и жесткости не совпадают. При этом возникший резонансный момент импульса равен экспериментальному значению квантовой модели электрон-волна для скоростей вращательного движения меньших скорости света. В модели учтено внутреннее демпфирование колебаний электрона, где гистерезисные потери могут наблюдаться и для магнитного момента. Доказано, что периодический крутящий момент находится в резонансе с механической системой модели электрона-гироскопа и создает резонансный момент импульса для линейных скоростей вращательного движения, меньших скорости света, соответствующий моменту импульса электрона.

Ключевые слова: гироскоп, идеальная сфера, неидеальная сфера, момент импульса, вектор, проекция, частота.

Гироскопические приборы получили широкое применение в таких отраслях, как судоходство, авиация и космонавтика. Гироскоп чаще всего применяется как чувствительный элемент указывающих гироскопических приборов и как датчик угла поворота или угловой скорости для устройств автоматического управления. В некоторых случаях, например в гиростабилизаторах, гироскопы используются как генераторы момента силы или энергии. Гироскопы используются в виде компонентов как в системах навигации (авиагоризонт, гирокомпас, ИНС и т. п.), так и в неактивных системах ориентации и стабилизации космических аппаратов. Постоянно растущие требования к точностным и эксплуатационным характеристикам гиро-приборов обуславливают актуальность разработки новых идей, которые позволят решить проблему создания чувствительных датчиков для измерения и отображения параметров углового движения объекта, а также новых моделей гироскопического движения.

Рассмотрим в качестве модели заряженного гироскопа электрон, имеющий форму неидеального шара с эксцентриситетом силы тяжести, позволяющим представить его симметричным волчком [1].

Под неидеальным шаром будем понимать такой шар, у которого центр жесткости (геометрический центр) образует идеальный шар, где моменты инерции относительно любых осей, проходящих через центр жесткости, равны $I_{\xi} = I_{\eta} = I_{\zeta} = I_0$. Центр тяжести не совпадает с центром жесткости и имеет незначительный эксцентриситет ε . Если ось

O ζ провести через центр жесткости и центр тяжести (отрезок ε), то моменты инерции относительно осей ζ , ξ , η будут равны $I_{\zeta} = I_0$; $I_{\xi} = I_{\eta} = I = I_0 + m\varepsilon^2$, отношение I/I_0 равно $I/I_0 = 1 + 5\varepsilon^2/(2R^2)$, где m , R – масса и радиус шара (рис. 1, а).

В этом случае неидеальный шар можно рассматривать как вытянутый вдоль оси ζ волчок ($I > I_0$). Проведем ось ζ перпендикулярно прямой, соединяющей центр жесткости и центр тяжести (отрезок ε), и перпендикулярно плоскости, в которой находятся отрезок ε и оси ξ , η . Оси ξ и η проведем под углом $\pi/4$ к отрезку ε . Тогда момент инерции относительно оси ζ будет равен $I_{\zeta} = \bar{I}_0 = I_0 + m\varepsilon^2$, а моменты инерции относительно осей ξ и η , соответственно, равны $I_{\xi} = I_{\eta} = \bar{I} = I_0 + m\varepsilon^2/2$. В этом случае неидеальный шар можно рассматривать как сплюснутый (рис. 1, б) вдоль оси ζ волчок ($\bar{I} < \bar{I}_0$).

Запишем уравнения Лагранжа для выбранной модели:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}\ddot{\theta} + \Omega_z I \sin \theta (\Omega_{\zeta} - \Omega_z \cos \theta) + I n \Omega_{\zeta}^2 \sin \theta &= M_k; \\ I \dot{\Omega}_z \sin \theta + 2I \Omega_z \omega_k \cos \theta - I_0 \omega_{\zeta} \omega_k &= -M_u; \\ I_0 d\omega_{\zeta}/dt &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

Из последнего уравнения (1) получим $\omega_{\zeta} = \text{const}$. Второе уравнение (1) может быть представлено в виде

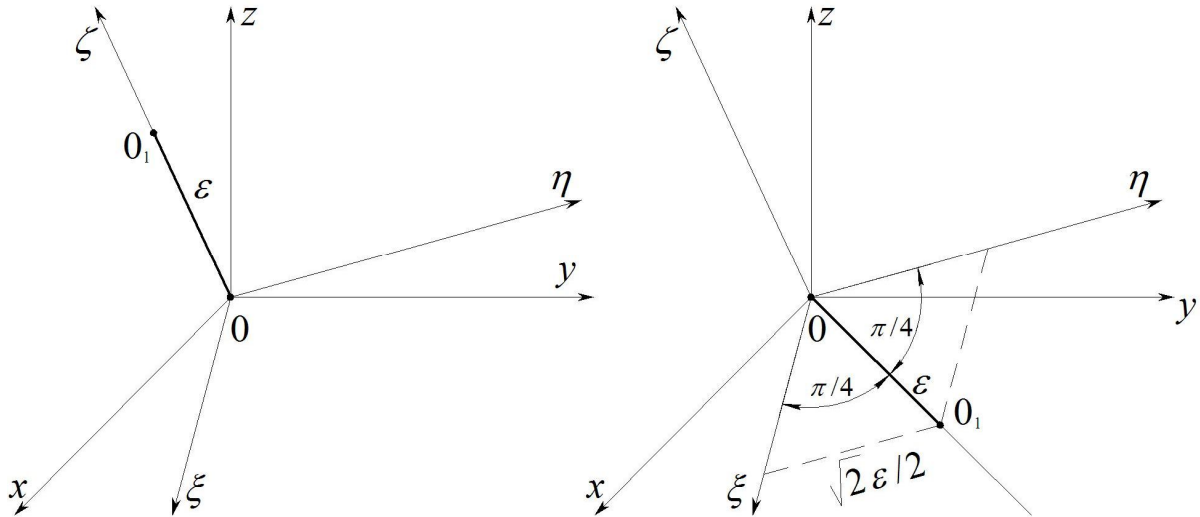


Рис. 1. Расположение подвижных и неподвижных осей неидеального шара (O – центр жесткости; O₁ – центр тяжести): а – для вытянутого волчка; б – для сплюснутого волчка

$$\dot{\Omega}_z \sin \theta + 2\Omega_z \omega_k \cos \theta - I_0 \omega_\zeta \omega_k / I = -M_u / I.$$

Разделим это уравнение на $\sin \theta$

$$\dot{\Omega}_z + 2\Omega_z \omega_k \operatorname{ctg} \theta = \frac{\omega_k \Omega_\zeta}{(1 + \bar{k}) \sin \theta}.$$

Запишем производную $\dot{\Omega}_z$ и приведем уравнение к следующему виду

$$\frac{d\Omega_z}{dt} + 2\Omega_z \omega_k \operatorname{ctg} \theta = \frac{\omega_k \Omega_\zeta}{(1 + \bar{k}) \sin \theta}. \quad (2)$$

Решим однородное уравнение (2). Применяя вариацию постоянной, получим

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = -\frac{2C \cos \theta d\theta}{\sin^3 \theta} + \frac{dC/dt}{\sin^2 \theta}.$$

Подставим полученное равенство в неоднородное уравнение (2)

$$\frac{dC/dt}{\sin^2 \theta} = \frac{\Omega_\zeta \omega_k}{\sin \theta (1 + \bar{k})}.$$

Вычислим постоянную интегрирования

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\Omega_\zeta \omega_k \sin \theta}{1 + \bar{k}} \text{ или } dC = \left(\frac{\Omega_\zeta \omega_k \sin \theta}{1 + \bar{k}} \right) dt,$$

откуда

$$C = -\frac{\Omega_\zeta \cos \theta}{1 + \bar{k}} + C_1,$$

следовательно

$$\Omega_z = \frac{C_1 - \Omega_\zeta \cos \theta / (1 + \bar{k})}{\sin^2 \theta}.$$

Выберем начальные условия при $t = 0$ такими, чтоб выполнялось равенство $\theta_\Omega = \theta_0$. Тогда выражение для частоты Ω_z при $t = 0$ примет следующий вид

$$\Omega_z |_{t=0} = \frac{C_2 - \Omega_\varphi \cos \theta_\Omega}{(1 + \bar{k}) \sin^2 \theta_\Omega} = \Omega,$$

где $C_2 = C_1(1 + \bar{k})$ - новая постоянная, которую определяют из уравнения

$$C_2 = \Omega(1 + \bar{k}) \sin^2 \theta_\Omega.$$

Подставив значение C_2 в выражение частоты Ω_z , для малых значений $\bar{k} \approx 0$ получим

$$\Omega_z = \frac{\Omega(1 - \cos \theta_\Omega \cos \theta)}{\sin^2 \theta}.$$

Выражение для частоты Ω_z при $t = 0$ будет

$$\Omega_z |_{t=0} = \frac{\Omega(1 - \cos^2 \theta_\Omega)}{\sin^2 \theta_\Omega}.$$

При таких начальных условиях ($t = 0$) прямоугольник векторов угловых скоростей вырождается в отрезок, направленный вдоль вертикальной оси Oz,

$$\Omega_z = \omega = \Omega = \Omega_\zeta.$$

Первое уравнение системы (1) может быть представлено в виде

$$\ddot{\theta} + \Omega_z \sin \theta (\Omega_\zeta - \Omega_z \cos \theta) + n\Omega_\zeta^2 \sin \theta = M_k / I.$$

Подставив в первое уравнение (1) значение частоты Ω_z и момента M_k , и для малых значений $\varepsilon \approx 0$ и \bar{k} , используя соотношение $\bar{k} \approx 1 - \bar{k}(1 + \bar{k})$, получим

$$\ddot{\theta} + \Omega_\varphi^2 = \frac{(1 - \cos \theta_\Omega \cos \theta)}{\cos \theta_\Omega \sin^3 \theta} = -\bar{k} \Omega_\zeta \omega_k. \quad (3)$$

Подставим равенства $\dot{\theta} = d\theta / dt = \omega_k$ и $\ddot{\theta} = d\omega_k / dt$ в (3), и запишем уравнение изображающей точки в виде

$$\frac{d\omega_k}{dt} + \Omega_\zeta^2 \left[\frac{1}{\cos\theta_\Omega \sin^3\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{\cos\theta_\Omega \cos^2\theta}{\sin^3\theta} \right] - \bar{k}\Omega_\varphi\omega_n = 0. \quad (4)$$

Умножим на ω_k и проинтегрируем выражение (4). Интеграл от первого слагаемого есть $J_1 = \omega_k^2 / 2$. Интеграл от второго слагаемого равен

$$J_2 = \frac{\Omega_\zeta^2}{\cos\theta_\Omega} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| - \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} \right].$$

Интеграл от третьего слагаемого есть

$$J_3 = \Omega_\zeta^2 \int \frac{2\cos\theta d\theta}{\sin^3\theta} = \frac{\Omega_\zeta^2}{\sin^2\theta}.$$

Интеграл от четвертого слагаемого равен

$$J_4 = \Omega_\zeta^2 \int \frac{\cos^2\theta \cos\theta_\Omega d\theta}{\sin^3\theta} = -\Omega_\zeta^2 \cos\theta_\Omega \left[\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| + \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} \right].$$

Интеграл от пятого слагаемого есть

$$J_5 = \bar{k}\Omega_\zeta^2 \operatorname{tg}\theta_\omega \int d\theta = \theta \bar{k}\Omega_\zeta^2 \operatorname{tg}\theta_\omega.$$

После интегрирования уравнение (4) выглядит следующим образом

$$\frac{\omega_k^2}{2} = \Omega_\zeta^2 \left[\frac{2\cos\theta_\Omega - \cos\theta(1 + \cos^2\theta_\Omega)}{2\sin^2\theta \cos\theta_\Omega} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| \cdot \frac{1 - \cos^2\theta_\Omega - \bar{k}\theta \operatorname{tg}\theta_\omega}{\cos\theta_\Omega} \right] = h. \quad (5)$$

Здесь h – постоянная интегрирования аналогичная [2], а выражение энергетического баланса $U(\theta)$ [3] соответствует второму слагаемому левой части уравнения изображающей точки (5). Из решения задачи о моменте импульса шара-гироскопа [3] известно, что момент импульса электрона направлен по оси O_n и смещен от оси O_ζ на угол равный $\theta \approx \pi/2$. Угол θ_Ω смещен от оси O_ζ также на угол $\theta \approx \pi/2$ и, следовательно, $\cos\theta_\Omega = \alpha$, где α – малая величина. Подставив значение $\cos\theta_\Omega$ в выражение энергетического баланса при условии $\theta_\omega \approx \theta_\Omega$, получим

$$U(\theta) = \frac{\Omega_\zeta^2}{2\alpha} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2\bar{k}\theta \right].$$

Используем выражение $U(\theta)$ для анализа фазовой картины (рис. 2). В точке $\theta = 0$ кривая энергетического баланса асимптотически стремится к $-\infty$. В точке $\theta = \pi/2$ её значение равно

$$U\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\Omega_\zeta^2 \bar{k}\pi}{2\alpha}. \text{ В точке } \theta = \pi \text{ кривая асимптоти-$$

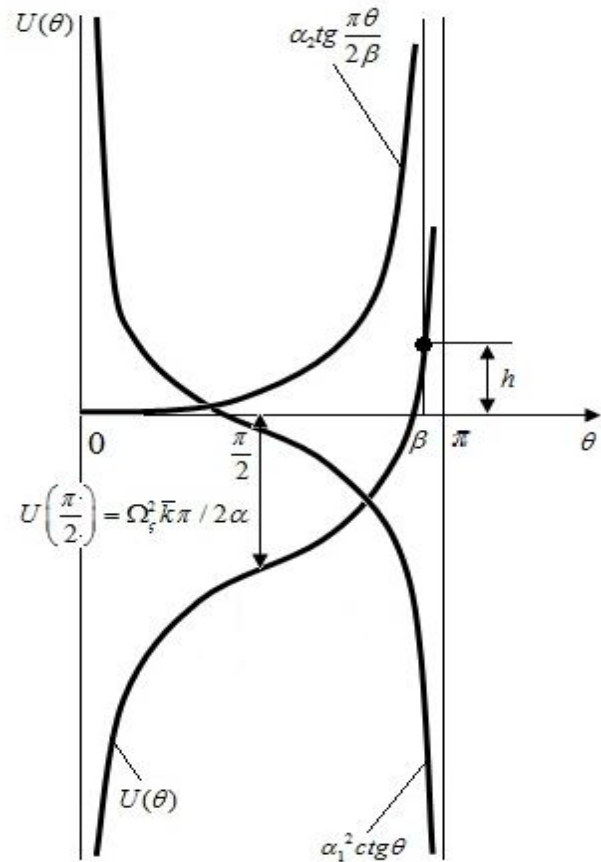


Рис. 2. Кривая энергетического баланса

чески стремится к $+\infty$.

Кривая энергетического баланса по форме напоминает график функции $-\operatorname{ctg}\theta$, сдвинутый по оси ординат на величину $U\left(\frac{\pi}{2}\right)$, что позволяет аппроксимировать $U(\theta)$ простой функцией

$$U(\theta) = -\left[\alpha_1^2 \cdot \operatorname{ctg}\theta + U\left(\frac{\pi}{2}\right) \right], \text{ где } \alpha_1^2 - \text{коэффициент}$$

аппроксимации. Начальный запас полной энергии определяется начальным смещением от вертикальной оси на угол β , соответствующий на оси абсцисс точке β [4]. Он фиксирован и его значение в точке β равно

$$U(\beta) = h = -\left[\alpha_1^2 \cdot \operatorname{ctg}(\beta) + \Omega_\zeta^2 \bar{k}\pi / 2\alpha \right].$$

Если сообщить гироскопу начальное возмущение с начальным запасом полной энергии h , то разность $h - U(\theta)$ определяет значение ординат $(\dot{\theta}) = \omega_k$ фазовой траектории по формуле [4]

$$\omega_k / \sqrt{2} = \dot{\theta} / \sqrt{2} = \pm \sqrt{h - U(\theta)}.$$

На участках, где $h - U(\theta) < 0$, фазовые траектории отсутствуют. Участок кривой энергетического баланса, где $h = U(\theta)$, соответствует участку фазовой траектории, пересекающей ось θ в точке β . Справа от β нет вещественных ветвей фазовой траектории. Попав в силу начальных условий на фазовую траекторию, изображающая точка будет двигаться по ней к неустойчивому положению равновесия $\theta = 0$, но никогда его не достигнет, т. к. для этого потребуется бесконечный промежуток времени. Время, которое потребуется для этого, равно четверти периода, найдем по формуле [4]

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{2(h - U(\theta))}}. \quad (6)$$

Подставив в (6) значения h и $U(\theta)$, получим:

$$T = \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha_1} \int_0^{\beta} R(\theta) d\theta; \quad (7)$$

$$R(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\text{ctg}\theta - \text{ctg}\beta}}.$$

Функция $R(\theta)$ при $\theta = 0$ обращается в нуль $R(\theta) = 0$, а в точке $\theta = \beta$ асимптотически стремится к бесконечности $R(\beta) = +\infty$. По форме график функции $R(\theta)$ напоминает график функции $\text{tg} \frac{\theta}{2}$, что позволяет аппроксимировать функцию $R(\theta)$ следующей функцией

$$R(\theta) = \alpha_2 \text{tg} \frac{\pi\theta}{2\beta},$$

где α_2 коэффициент аппроксимации.

Подставим значение $R(\theta)$ в (7) и получим

$$T = \frac{\alpha_2}{2\sqrt{2}\alpha_1} \int_0^{\beta} \text{tg} \frac{\pi\theta}{2\beta} d\theta = \frac{-\beta\alpha_2}{\sqrt{2}\pi\alpha_1} \ln \left| \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \right|_0^{\beta} =$$

$$= -(-\infty - 0) = +\infty.$$

Из последнего соотношения видно, что при приближении величины угла θ к нулю, время (T) увеличивается неограниченно. Электрон-гироскоп, получив надлежащую начальную скорость, будет приближаться к неустойчивому положению равновесия $\theta = 0$, но никогда его не достигнет. Из этого следует, что ось Oz будет направлена почти вертикально под очень малым наклоном $\theta \rightarrow 0$ к вертикальной оси Oz .

В [3] определен момент импульса $L_{и}$ направленный вдоль оси Oz . Он образует с осью Oz угол $\pi/2$. Следовательно, момент импульса $L_{и}$ распо-

ложен почти в горизонтальной плоскости, перпендикулярной вертикальной оси. Вертикальная ось проходит через центр тяжести электрона и центр неподвижных звезд. Ориентация в пространстве (направление) момента импульса в горизонтальной плоскости зависит от начальных условий. Частота вращения электрона вокруг оси Oz равна нулю $\omega_z = 0$. Отсюда следует, что плоскости «O» и «I» совпадают ($\varphi_1 = 0$). В этом случае расположение векторов угловых скоростей характерно для свободного симметричного волчка-гироскопа, а $L_{и}$ является спином электрона.

Полученные результаты относятся к вытянутому электрону-гироскопу ($I > I_0$), когда вращение происходит вокруг оси симметрии, проведенной через центр тяжести и центр жесткости (см. рис. 1, а). В этом случае, при положительном вращении вектора мгновенной угловой скорости ω , собственная частота вращения ω_0 положительна. Углы между векторами определяются неравенством $\theta_{\Omega} > \theta_{\omega}$ и вектор угловой скорости ω , а, следовательно, и вектор Ω_B сонаправленный с ω [5] отклонен от вектора Ω по часовой стрелке. Следовательно, для вытянутого электрона-гироскопа вектор крутящего момента направлен по оси Oz от читателя [2].

Если вращение будет происходить вокруг другой симметричной оси, проведенной перпендикулярно прямой, соединяющей центр жесткости и центр тяжести (см. рис. 1), то неидеальный шар представляет собой симметричный сплюснутый волчок ($\bar{I} < \bar{I}_0$). Собственная частота вращения такого волчка $\bar{\omega}_0$, при положительном направлении вращения мгновенной оси ω , отрицательна. Углы между векторами угловых скоростей определяются неравенством $\theta_{\Omega} < \theta_{\omega}$, и вектор Ω_B отклонен от вектора Ω против часовой стрелки. Следовательно, для сплюснутого электрона-гироскопа вектор крутящего момента направлен к читателю [2].

Выводы

Таким образом, во время вращения волчка образованного неидеальным шаром вокруг различных симметричных осей (I_0 и \bar{I}_0) имеет место противоположное направлению вращения собственных частот и крутящих моментов ($\omega_0 = -\bar{\omega}_0$; $M = -\bar{M}$), что приводит к тому, что ось Oz сплюснутого шара направлена вертикально вниз $\theta \approx \pi$. Отсюда следует, момент импульса ($L_{и}$ - спин), лежащий в гори-

горизонтальной плоскости, смещен от оси Oz на угол $\frac{3\pi}{2}$. Тогда момент импульса $L_{\text{и}}$ сплюснутого шара направлен противоположно моменту импульса вытянутого шара-волчка.

Такой результат можно идентифицировать со спином «вверх» и спином «вниз», известным в физике. Точнее для предложенной модели это будет спин «влево» и спин «вправо».

Литература

1. Игуменцев, Е. А. *Гирскопическая модель спина электрона [Текст] : моногр. / Е. А. Игуменцев. – Х. : ХУПС, 2012. – 224 с.*
2. Игуменцев, Е. А. *Момент импульса заряженного гироскопа [Текст] / Е. А. Игуменцев, Е. А. Прокопенко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2011. – № 8(85). – С. 117 - 121.*
3. Игуменцев, Е. А. *Устойчивость вращения*

заряженного гироскопа [Текст] / Е. А. Игуменцев, Е. А. Прокопенко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – № 7(94). – С. 171 - 176.

4. Игуменцев, Е. А. *Электромагнитная диагностика напряженно-деформированного состояния бесконтактным методом [Текст] / Е. А. Игуменцев, Е. А. Прокопенко // Электротехнические и компьютерные системы : тем. вып. Проблемы автоматизованого электропривода. Теория и практика. Одесский нац. политех. ун-т. – К., 2011. – С. 429–432.*

5. Игуменцев, Е. А. *Диагностика напряженно-деформированного состояния [Текст] / Е. А. Игуменцев, Е. А. Прокопенко // Электротехнічні та енергозберігаючі системи: Електромеханічні та комп'ютерні системи : тематичний випуск «Проблеми автоматизованого електропривода. Теория и практика». – Кременчуг : Кременчугський нац. ун-т ім. Михайла Остроградського. 2012. – № 3(19). – С. 566-568.*

Поступила в редакцию 10.06.2014, рассмотрена на редколлегии 14.06.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б. И. Кузнецов, Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины, Харьков.

МОДЕЛЬ РУХУ ЗАРЯДЖЕНОГО ГІРОСКОПУ

Є. О. Ігуменцев, О. О. Прокопенко

Як модель зарядженого гіроскопу запропоновано електрон. Доведено, що електрон поводиться як звичайна дзига, якщо центр її ваги і жорсткості не збігаються. У цьому випадку виникає резонансний момент імпульсу, який дорівнює експериментальному значенню квантової моделі електрон-хвиля для швидкостей обертового руху менших швидкості світла. У моделі враховано внутрішнє демпфування коливань електрона, де гістерезисні втрати можуть спостерігатися і для магнітного моменту. Доведено, що періодичний момент, що крутить, знаходиться в резонансі з механічною системою моделі електрона-гіроскопа і для лінійних швидкостей обертового руху, які є меншими швидкості світла, створює резонансний момент імпульсу, відповідний моменту імпульсу електрона.

Ключові слова: гіроскоп, ідеальна сфера, неідеальна сфера, момент імпульсу, вектор, проекція, частота.

CHARGED GYROSCOPE MOVEMENT MODEL

I. O. Igumentsev, O. O. Prokopenko

Electron is used in this paper as a model of the charged gyroscope. It is proven that electron behaves like a ordinary spinning top if its centres of gravity and stiffness do not match. In this case, the resonant angular momentum created. It is equal to the value of experimental quantum model of electron-wave if its rotational speed is less than the speed of light. During the designing of the model the internal cushioning fluctuations of electron where taken into account, minor hysteresis losses can also be observed for magnetic moment. It proved that the periodic torque is in resonance with the mechanical system model of electron-gyro. This periodic torque is in a resonant moment of momentum. It creates the moment of momentum of the electron for linear speeds rotary motion lower the speed of light.

Key words: gyroscope, ideal sphere, non-perfect sphere, moment of impulse, vector, projection, frequency.

Игуменцев Евгений Александрович – д-р техн. наук, профессор, начальник отдела, Метрологический центр Национальной Акционерной Компании «Нефтегаз Украины» «Восточноевропейский региональный центр метрологии природного газа, нефти и нефтепродуктов», Боярка, Украина, e-mail: izumea@i.ua.

Прокопенко Елена Александровна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры систем управления технологических процессов и объектов, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина, e-mail: leenna@i.ua.