УДК 004.942

В. Ф. МИРГОРОД, И. М. ГВОЗДЕВА, А. Г. БУРЯЧЕНКО

АО «Элемент», Одесса, Украина

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Рассмотрен подход к синтезу оптимального многосвязанного управления нелинейными системами, аппроксимированных кусочно-линейными динамическими моделями применительно к силовым и энергетическим установкам на основе газотурбинных двигателей. В качестве кусочно-линейных динамических моделей использованы математические модели в форме Гаммерштейна и в виде следящих систем. Метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов рассмотрен для решения задач управления по состоянию и обобщен на класс задач управления по выходным переменным, как векторным, так и скалярным, а также в условиях применения селектора минимума.

Ключевые слова: *нелинейные динамические системы, математическая модель, оптимальное управление.*

Введение

Создание газотурбинных двигателей (ГТД) новых поколений для их использования в составе силовых и энергетических установок (СиЭУ) как авиационного, так и общепромышленного назначения, требует обеспечения управления с помощью САУ соответствующей объекту по техническому уровню. Решение указанной проблемы обеспечивается применением САУ типа FADEC, создаваемых на основе новых электронных и информационных технологий.

1. Формулирование проблемы

Системы автоматического управления ГТД типа FADEC в своем развитии прошли ряд этапов и в настоящее время по своим показателям технического ровня и ресурсным показателям соответствуют управляемым объектам. Однако, наряду с совершенствованием аппаратных и программных решений, уровень алгоритмического обеспечения указанных САУ не соответствует современным требованиям и возможностям объектов управления. Как правило, в САУ ГТД по-прежнему используются исключительно ограничители режимов и ПИД-регуляторы в каналах регулирования. Вопросы оптимизации процессов регулирования по заданным критериям не рассмотрены в должной мере.

Известные термогазодинамические [1 – 4] и феменологические [4 – 6] математические модели ГТД, при их реализации в составе бортовой САУ, позволяют в настоящее время обеспечить регулирование по неизмеряемым параметрам (тяга, запас ГДУ и пр.) и создать так называемые виртуальные регуляторы.

Целью настоящего исследования является обоснование подхода к оптимальному синтезу многосвязанного регулирования в САУ типа FADEC, в том числе с использованием виртуальных регуляторов и селектора минимума.

2. Решение проблемы

2.1. Оптимальное управление по состоянию

Следуя предложенной и обоснованной в [7] математической модели СиЭУ, уравнения изменения состояния управляемого объекта имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = A\left(\vec{x} - \vec{x}_k - \vec{b}\Delta s\right) = A\Delta\vec{x} - A\vec{b}\Delta s\,, \qquad (1)$$

где $\vec{x}$ – вектор состояния, $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_k$.

Поскольку $\vec{x}_k = \mathrm{const}$, из (1) следует математическая модель

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A\Delta\vec{x} - A\vec{b}\Delta s. \qquad (2)$$

Оптимизируемый функционал задается в известном классическом виде квадратичной формы

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\Delta\vec{x}^T E\Delta\vec{x} + e\Delta s^2\right) dt. \qquad (3)$$

Следуя методу аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), оптимальное управление, минимизирующее функционал (3), определяется выражением

$$\Delta s = e^{-1}\vec{b}^T A^T P_1(t)\Delta\vec{x}, \qquad (4)$$

где матрица преобразования Риккатти удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P_1(t) = -P_1(t)A - A^T P_1(t) + \\ &+e^{-1}P_1(t)A\vec{b}b^T A^T P_1(t) - F. \end{aligned} \qquad (5)$$

Уравнение (5) подстановкой $PA = Q$ приводится к нелинейному матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}Q(t) = -\left(Q + Q^T - e^{-1}Q\vec{b}\vec{b}^T Q^T + E\right)A.$$

Если в критерии (3) не учитываются потери на управление $e = 0$, то оптимальным является релейное управление вида

$$\Delta s = U\sin g\left[b^T A^T P_1(t)\Delta\vec{x}\right].$$

На основании (1) и (4) может быть записано уравнение оптимальной замкнутой системы

$$\frac{d\Delta\vec{x}}{dt}A\left[E - e^{-1}\vec{b}\vec{b}^T A^T P_1(t)\right]\Delta\vec{x} = A_z(t)\Delta\vec{x}. \qquad (6)$$

Особенностью предлагаемого решения задачи оптимального управления является нестационарность матричного коэффициента передачи в законе управления, так как пределы интегрирования в (3) являются конечными.

Решения уравнения Риккатти могут быть получены заблаговременно для каждого из участков аппроксимации статических характеристик СиЭУ.

Для решения задачи перевода СиЭУ из одного установившегося состояния в другое установившееся состояние уравнение (5) допускает алгебраическую форму представления и, соответственно, стационарность решения задачи оптимального управления.

Показатели качества переходных процессов устанавливаются в этом случае на основании (6) путем анализа распределения собственных значений матрицы A_z.

Вид критерия и линейность задачи обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой системы с оптимальным управлением, поскольку текущее значение (3) является функцией Ляпунова, а оптимальное управление обеспечивает ее убывание на траекториях замкнутой системы.

2.2. Оптимальное управление по выходным координатам

Для решения задачи оптимального управления по выходным координатам ММ (2) дополним уравнением наблюдения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Delta\vec{x}}{dt} = A\Delta\vec{x} - A\vec{b}\Delta s \\ &\Delta\vec{y} = C\Delta\vec{x} \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

поскольку в задачах управления СиЭУ выполняется условие

$$\dim\vec{y} \ge \dim\vec{x}. \qquad (8)$$

Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления по той части выходных координат, для которых в (7) имеет место равенство.

Тогда уравнение наблюдения в (7) является формулой замены координатного базиса, что определяет следующий вид преобразованных уравнений состояния

$$\frac{d\Delta\vec{y}}{dt} = C^{-1}AC\Delta\vec{y} - C^{-1}A\vec{b}\Delta s. \qquad (9)$$

Для анализируемой задачи функционал качества имеет вид

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\Delta\vec{y}^T F_2\Delta\vec{y} + e\Delta s^2\right)dt. \qquad (10)$$

Следуя методу АКОР, оптимальным относительно минимума (10) является управление по выходным координатам вида

$$\Delta s = e^{-1}\vec{b}^T A^T\left(C^{-1}\right)^T P_2(t)\Delta\vec{y}, \qquad (11)$$

где матрица преобразования Риккатти определяется следующим уравнением

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}P_2(t) = -P_2(t)C^{-1}AC - \left(C^{-1}AC\right)^T P_2(t) + \\ &+e^{-1}P_2(t)C^{-1}AC\vec{b}\vec{b}^T\left(C^{-1}AC\right)^T P_2(t) - F_2. \end{aligned} \qquad (12)$$

Уравнения замкнутой оптимальной системы после соответствующей подстановки могут быть записаны следующим образом

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Delta\vec{x}}{dt} = A\left[E - e^{-1}\vec{b}\vec{b}^T A^T \left(C^{-1}\right)^T P_2(t)\right]\Delta\vec{x}, \\ &\Delta\vec{y} = C\Delta\vec{x} \end{aligned}\right\}. \quad (13)$$

Анализ качества переходных процессов в оптимальной замкнутой системе осуществляется аналогично п.1. Первым приближением является стационарное решение уравнения Риккатти (12), далее следует определить время установления решения нелинейного дифференциального уравнения (12) и сопоставить с временем переходных процессов в системе. На основе сопоставления определяется возможность использования стационарного решения.

Другим вариантом решения задачи оптимального управления по выходным координатам является модификация критерия (10) к виду

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\Delta\vec{x}^T C^T F_2 C\Delta\vec{x} + e\Delta s^2\right)dt,$$

с последующим решением задачи оптимального управления согласно п. 2.1.

Следует отметить, что решения задач оптимального управления по состоянию и по выходным координатам не являются эквивалентными, поскольку матрицы штрафов в критериях оптимизации могут быть существенно различными, что повлечет различие в матрицах преобразования Риккатти и, соответственно, в оптимальных стратегиях управления. Например, вес ошибок управления по температуре газов ГТД существенно выше, чем по оборотам турбин, поэтому такие ошибки потребуют реализации более интенсивных управляющих воздействий.

Существенные отличия задачи оптимального управления по выходным координатам применительно к СиЭУ состоят в том, что, в сопоставлении с классическими задачами координатами состояния являются обороты турбины, измеряемые с высокой точностью. Подлежат оценке выходные неизмеряемые переменные (тяга, мощность и др.), которые образуются на выходах блока численной реализации ММ объекта. Поэтому применение классических наблюдателей состояния в формах Льюинбергера и Калмана-Бьюиси не всегда является обоснованным.

2.3. Оптимальное управление по скалярным переменным

Отличительной особенностью систем управления СиЭУ является объединение их каналов регулирования через селектор минимума, что обеспечивает гарантированное ограничение режимов во всех условиях эксплуатации. В раздельных каналах реализуются классические типовые законы регулирования, поэтому управляющие воздействия формируются в виде линейного оператора от скалярной переменной. Поэтому возникает задача синтеза оптимального управления по скалярным переменным, как координатам состояния, так и выходным переменным управляемого объекта.

Решение такой задачи может быть выполнено на основе линейного преобразования уравнений состояния к форме, в которой сопровождающая матрица характеристического полинома является матрицей Фробениуса A_f

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\vec{x} = T\Delta\vec{x}_f \\ &T^{-1}AT = A_f \end{aligned}\right\}, \quad (14)$$

где $\Delta\vec{x}_f$ составляют канонический базис математических моделей пространства состояний: отклонения координат состояния и его производные (форма Коши).

При таком синтезе результатом оптимальных стратегий являются пропорционально-дифференциальные регуляторы.

Преобразование (14), если только матрица Фробениуса будет найдена, формально полностью эквивалентно решению по 2 и его результаты, с точностью до обозначений, могут быть использованы для решения поставленной задачи оптимального синтеза.

Существенные отличительные особенности возникают в формировании матрицы штрафов, поскольку она определяет качество переходных процессов в оптимальной системе.

Преобразование уравнений состояния в форму Фробениуса может быть выполнено двумя способами:

Путем прямого решения матричного уравнения типа (14);

Путем преобразования в модальную форму с последующим формированием матрицы Фробениуса, в которой неизвестна только последняя строка.

Следует отметить, что традиционные подходы к формированию законов регулирования в замкнутых локальных контурах предусматривают применение ПИД – законов. Однако в системах с полной ответственностью, при использовании ММ объекта для виртуальных регуляторов, интегральная компонента в законе регулирования приводит к недопустимым значениям статических ошибок регулирования. Действительно, различие в СХ объекта и его модели при использовании ПИД – законов приведет к установлению режима, не соответствующего реальной СХ, то есть режима с неустранимой статической ошибкой. Поэтому в таких контурах (с ММ объекта) необходимо ограничиваться исключительно ПД – законами регулирования, которые получаются на основе (14).

2.4. Оптимальное управление по селектору минимума

Применение селектора минимума является в настоящее время необходимым условием технической реализации новых и перспективных программ регулирования в СиЭУ. Гарантированное ограничение режимов, обусловленное требованиями безопасности, не оставляет иных альтернатив ввиду ответственности предлагаемых технических решений. Поэтому новые предлагаемые законы управления, в том числе многосвязанного, и на основе математической модели объекта, объективно будут объединены через указанный селектор. Оптимальные стратегии управления, с учетом объединения по селектору минимума, имеют следующий вид:

1) по координатам состояния

$$U_{sx} = \min\{U_i\}, i = 1, n,$$
$$U_i = K_i(t)\Delta\vec{x}_i$$
$$K_i(t) = e^{-1}\vec{b}^T A^T \left(T_i^{-1}\right)^T P_i(t),$$
$$\frac{d}{dt}P_i(t) = -P_i(t)T^{-1}AT - \left(T^{-1}AT\right)^T P_i(t) +$$
$$+e^{-1}P_i(t)T^{-1}AT\vec{b}\vec{b}^T\left(T^{-1}AT\right)^T P_i(t) + F_i;$$

2) по выходным координатам

$$U_{sy} = \min\{U_j\}, j = 1, m,$$
$$U_j = K_j(t)\Delta\vec{y}_j,$$
$$\frac{d}{dt}P_j(t) = -P_j(t)C^{-1}AC - \left(C^{-1}AC\right)^T P_j(t) +$$
$$+e^{-1}P_j(t)C^{-1}AC\vec{b}\vec{b}^T\left(C^{-1}AC\right)^T P_j(t);$$

3) интегрированное управление

$$U_G = \min\{U_{sx}, U_{sy}\}.$$

Заключение

Обосновывается подход к многосвязанному оптимальному управлению кусочно-линейными динамическими системами применительно к силовым и энергетическим установкам. Отличительной особенностью предлагаемого подхода является применение кусочно-линейных динамических моделей математических моделей в форме. Использованный метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов рассмотрен как для решения задач управления по состоянию и обобщен на класс задач управления по выходным переменным, как векторным, так и скалярным, а также в условиях применения селектора минимума.

Литература

1. Арьков, В. Ю. Идентификация динамических моделей САУ ГТД и их элементов статистическими методами [Текст] : дис. … д-ра техн. наук : 05.13.01 / Арьков Валентин Юрьевич. – Уфа, 2002. – 372 с.

2. Гольберг, Ф. Д. Математические модели газотурбинных двигателей как объектов управления [Текст] / Ф. Д. Гольберг, А. В. Батенин. – М. : МАИ, 1999. – 80 с.

3. Добрянский Г. В. Динамика авиационных ГТД [Текст] / Г. В. Добрянский, Т. С. Мартьянова. – М. : Машиностроение, 1989. – 240 с.

4. Гуревич, О. С. Состояние и перспективы развития систем автоматического управления авиационными газотурбинными двигателями [Текст] / О. С. Гуревич // Основные результаты научно–технической деятельности. ЦИАМ 2001–2005. – М. : ЦИАМ, 2005. – С. 267–270.

5. Епифанов, С. В. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей [Текст] / С. В. Епифанов, В. И. Кузнецов, И. И. Богаенко. – К. : Техника, 1998. – 312 с.

6. Тунаков, А. П. Классификация математических моделей ГТД [Текст] / А. П. Тунаков // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1986. – № 4. – С. 99–101.

7. Миргород, В. Ф. Эквивалентные формы линейных математических моделей процессов управления объектами энергетики [Текст] / В. Ф. Миргород, И. М. Гвоздева // Електромашинобудування та електрообладнання : зб. наук. праць. – К. : Техніка, 2010. – Вип. 76. – С. 180-186.

Поступила в редакцию 8.06.2014, рассмотрена на редколлегии 14.06.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С. Г. Антонщук, Одесский национальный политехнический университет, Одесса.

ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ КУСОЧНО-ЛІНІЙНИМИ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

В. Ф. Миргород, І. М. Гвоздєва, Г. Г. Буряченко

Розглянуто підхід до синтезу оптимального багатозв'язаного управління нелінійними системами, апроксимованих кусочно-лінійними динамічними моделями стосовно силових і енергетичних установок на основі газотурбінних двигунів. В якості кусочно-лінійних динамічних моделей використано математичні моделі у формі Гаммерштейна і у вигляді систем, що стежать. Розглянуто метод аналітичного конструювання оптимальних регуляторів для вирішення завдань управління станом і узагальнено на клас завдань управління по вихідних змінних, як векторних, так і скалярних, а також в умовах застосування селектора мінімуму.

Ключові слова: нелінійні динамічні системи, математична модель, оптимальне управління.

OPTIMAL CONTROL BY PIECE-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

V. F. Mirgorod, I. M. Gvozdeva, A. G. Buryachenko

Approach to the synthesis of the optimal multiconstrained control of the nonlinear systems, which are approximated by piece-linear dynamic models considered as it applies to power and power options on the basis of gas turbine engines. Mathematical models in form Hammerstein and as tracker systems are used as piece-linear dynamic models. Analytical design method of optimal regulators is considered for the decision of control problems on the state and generalized for the class of control problems of output variables, both vectorial and scalar, and also for the application conditions of selector of minimum

Keywords: nonlinear dynamic systems, mathematical model, optimal control.

Миргород Владимир Федорович – вед. науч. сотр., АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.

Гвоздева Ирина Маратовна – вед. науч. сотр., АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.

Буряченко Анна Григорьевна – Главный метролог, АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua.