

УДК 533.692

**Є. М. ПАНОВ, А. Я. КАРВАЦЬКИЙ, А. Ю. ПЕДЧЕНКО,  
І. В. ПУЛІНЕЦЬ, Т. В. ЛАЗАРЕВ***Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна***ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБТІКАННЯ ПРОФІЛЮ КРИЛА  
НАДЗВУКОВИМ ПОТОКОМ З ВИКОРИСТАННЯМ  
ПРОГРАМНОГО КОДУ OPENFOAM**

*Розроблено математичну модель гідродинамічного стану обтікання профілю крила надзвуковим потоком. Досліджено вплив зміни кута атаки, швидкості набігання повітряного потоку, вибору моделі турбулентності на розподіл полів тиску, швидкості, температури, коефіцієнти підйомної сили та аеродинамічного опору. Проведено порівняльний аналіз числових результатів із експериментальними даними і даними аналітичного розв'язку рівнянь течії Прандтля-Майєра та для випадку косоного стрибка ущільнення. На базі отриманих результатів запропоновано ефективну методіку вибору оптимальних параметрів розв'язання задачі надзвукового обтікання частин конструкції літальних апаратів із застосуванням вільного відкритого програмного коду OpenFOAM.*

*Ключові слова:* OpenFOAM, надзвуковий потік, течія Прандтля-Майєра, косий стрибок ущільнення, ромбовидний профіль.

**Вступ**

Наразі існує тенденція до збільшення швидкості літальних апаратів (ЛА) в над- та гіперзвукову область. У зв'язку з цим стає актуальною проблема розробки геометрії ЛА, оптимізованих під великі числа Маха набігаючих потоків. Для її вирішення нарівні з експериментом використовують числові методи, які дозволяють значно пришвидшити виготовлення нової конструкції, порівняно з іншими відомими методами, створити наглядну комп'ютерну модель.

Для розв'язання задач надзвукового обтікання ЛА поряд з використанням комерційних програмних продуктів представляє певний інтерес застосування вільного програмного забезпечення (ПЗ (Open Source Software)), яке дозволяє набагато гнучкіше використовувати засоби для реалізації поставленої задачі, створювати окремі незалежні програмні модулі, максимально оптимізовані під певну математичну постановку [1].

В даній роботі для числового розв'язання рівнянь гідродинаміки для стиснутого потоку використано відкритий програмний код OpenFOAM (Open Field Operation and Manipulation) [2]. В OpenFOAM реалізовано два підходи розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса для надзвукового обтікання: за допомогою розв'язувача rhoCentralFoam, побудованого на алгоритмі корекції густини, та sonicFoam, який використовує метод корекції тиску.

**1. Аналіз літературних джерел**

З інтенсивним розвитком аерокосмічної техніки та потреби у нових високоефективних ЛА виникає необхідність в оперативних оцінках різноманітних конструкцій крила та його аеродинамічної якості, конфігурацій інтерференцій, що створюються елементами ЛА.

Так, в роботі [3] проведено аналіз обтікання симетричного ромбовидного профілю надзвуковим потоком із параметризацією кута атаки та відношення довжини хорди до товщини крила. Числова модель була побудована у комерційному програмному забезпеченні Comsol Multiphysics.

В статті [4] проведено числовий аналіз надзвукового обтікання ромбовидного профілю стисливим середовищем з параметризацією величини кута клиновидності при сталому нормальному набіганні турбулентного потоку. Для розв'язання даної задачі використовується відкритий програмний код OpenFOAM із застосуванням розв'язувачів sonicFoam та rhoCentralFoam. Також наводяться результати верифікації отриманих числових розв'язків.

Порівняльний аналіз RANS (Reynolds-averaged Navies–Stokes) моделей турбулентності для моделювання надзвукової відривної течії з донними областями в трактах сучасних повітряно-реактивних двигунів з використанням комерційного ПЗ (програмних продуктів ANSYS) наведено в [5]. Проведене тестування показало, що найкращі результати при розрахунках надзвукових течій, характерних для

сучасних повітряно-реактивних двигунів, дають  $k-\epsilon$  Realizable і Transition SST моделі турбулентності.

Роботи [6-8] присвячені числовому моделюванню із застосуванням низькорейнольдсової моделі турбулентності  $k-\epsilon$  Launder-Sharma, яка на даний час не дістала широкого використання. Це перш за все пов'язано з рядом її суттєвих недоліків: схильність до значного збільшення нелінійності, яка усувається за допомогою подрібнення сітки в пристінній області; демпфуючі функції можуть помилково «включатися» далеко від стінок. Проте модель  $k-\epsilon$  Launder-Sharma дозволяє досить точно описувати струменеві течії й обтікання геометрично нескладних конструкцій при невеликих числах Рейнольдса ( $Re < 10^5$ ) і застосовується для числового моделювання як стисливого, так і нестисливого потоку.

Модель турбулентності  $k-\omega$  SST (Shear Stress Transport) була запропонована Ментером в 1993 році [9] і відразу набула великої популярності. Модель  $k-\omega$  SST по суті є об'єднанням двох моделей ( $k-\epsilon$  для потоку вдалині від стінок і  $k-\omega$  в пристінній області). Дослідники, що використовують стандартну SST модель, зазвичай відзначають, що вона показує достовірні результати в шарах змішування при середніх значеннях градієнта тиску.

В областях з великими нормальними напруженнями, що мають місце в застійних течіях, стандартна  $k-\omega$  SST модель генерує занадто високі значення інтенсивності турбулентності, що призводить до значної якісної зміни розрахункової картини потоку [10].

На відміну від попередніх моделей турбулентності модель  $k-\epsilon$  Realizable в деякій мірі позбавлена вказаних недоліків [7]. Термін Realizable означає, що модель задовольняє математичні обмеження на нормальні напруження у середовищі, що узгоджуються з фізикою турбулентних течій (виключаються негативні значення вихрової в'язкості при розрахунках високоградієнтної течії). У моделі вводиться уточнений метод врахування турбулентної в'язкості, а рівняння для швидкості дисипації виводиться з точного рівняння переносу середньоквадратичного значення пульсаційної складової завихреності. У порівнянні зі стандартною моделлю  $k-\epsilon$  модель Realizable більш точно описує розподіл швидкості дисипації плоских і круглих струменів, а також забезпечує краще передбачення характеристик граничних шарів в умовах великих градієнтів тиску, відірваних і рециркуляційних течій. Недоліком даної моделі є те, що в умовах великих градієнтів тиску завищується рівень інтенсивності турбулентності і, відповідно, значення турбулентної в'язкості у рециркуляційних зонах [5].

## 2. Формулювання цілей статті

Метою роботи є розробка числової моделі гідродинамічного та теплового стану надзвукового обтікання профілю крила в умовах середніх та великих градієнтів тиску з можливістю подальшого застосування її для конструкцій складної форми для врахування впливу конфігурації інтерференцій. Дослідження за допомогою отриманої моделі параметрів тепло-гідродинамічних характеристик при зміні кута атаки та швидкості набігання повітряного потоку; верифікація числової моделі методом порівняння отриманих результатів з експериментальними даними та даними точних розв'язків рівнянь теорії надзвукових течій [11].

## 3. Фізична та математична моделі гідродинамічного та теплового стану симетричного ромбовидного профілю надзвукового крила

При проектуванні надзвукових ЛА використовуються тонкі профілі крил із загостреним переднім кінцем. Дана форма поперечного перерізу крила дозволяє зменшити опір набігаючого потоку та надмірне нагрівання конструкції. Найпростішим профілем є симетрична ромбовидна форма, яка представлена на рис. 1.

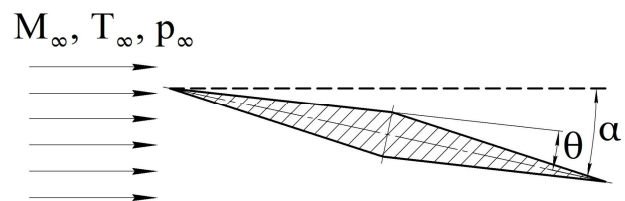


Рис. 1. Симетрична ромбовидна форма поперечного перерізу надзвукового крила

Припущення фізичної моделі:

- потік газу є однорідним, постійним, стисливим та турбулентним;
- масові сили у потоці газу не враховуються;
- теплота від внутрішнього тертя в'язкого потоку не враховується;
- профіль крила є абсолютно твердим тілом;
- поверхня крила вважається абсолютно гладкою поверхнею.

У відповідності до прийнятих припущень фізичної моделі математична постановка гідродинамічного та теплового стану описується такими рівняннями:

- рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина середовища, кг/м<sup>3</sup>;

$t$  – час, с;

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  – оператор Гамільтона;

$\mathbf{V}$  – вектор швидкості, м/с;

– рівняння збереження кількості руху

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (2)$$

де  $p$  – тиск, Па;

$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \dot{\mathbf{D}}^d$  – тензор в'язких напружень 2-го рангу,

Па;

$\mu$  – динамічна в'язкість, Па·с;

$\dot{\mathbf{D}}^d = \dot{\mathbf{D}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}) \mathbf{I}$  – тензор девіаторних деформацій, с<sup>-1</sup>;

– тензор швидкості деформацій

$\dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \nabla]$  – тензор швидкості деформацій

2-го рангу або лінійне геометричне рівняння, с<sup>-1</sup>;

$\text{tr}()$  – оператор сліду тензора;

$\mathbf{I}$  – одиничний тензор 2-го рангу;

$\dot{\mathbf{D}}^s = \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}) \mathbf{I}$  – кульова складова тензора швидкості деформації, що пов'язана зі стисливістю рідини, с<sup>-1</sup>;

– рівняння збереження повної енергії

– рівняння збереження повної енергії

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{V}(\rho E + p)] = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{V}), \quad (3)$$

де  $E = u - \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2}$  – масова повна енергія, Дж/кг;

$u = \int_{T_0}^T c_v dT$  – масова внутрішня енергія, Дж/кг;

$c_v$  – масова ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К);

$T$  – абсолютна температура, К;

$\mathbf{q} = -\lambda_s \nabla T$  – вектор густини теплового потоку (або фізичне рівняння стану Фур'є, що зв'язує  $\mathbf{q}$  з градієнтом температури), Вт/м<sup>2</sup>;

$\lambda_s$  – теплопровідність середовища, Вт/(м·К).

Припускається, що робоче середовище (повітря) являється однокомпонентним ідеальним газом, для якого є справедливим рівняння стану

$$p = \rho \frac{R_u}{W} T, \quad (4)$$

де  $R_u$  – універсальна газова стала, Дж/(моль·К);

$W$  – молярна маса, кг/моль.

Рівняння балансу усереднених за Рейнольдсом (RANS) або Фавром [12, 13] (тобто масо-зважених) величин (1)–(3) отримують шляхом усереднення миттєвих рівнянь балансу. Відповідно до даного принципу, будь-яку змінну  $f$  можна розділити на середню  $\bar{f}$  та складову коливання  $f''$  ( $f = \bar{f} + f''$ ). Усереднення для змінної густини потоків вводить багато невідомих кореляцій між будь-якими величинами  $f$  і густиною коливань  $\tilde{\rho} f''$ . Щоб уникнути цих труднощів використовують середньозважені величини (так звані осереднення за Фавром) [14]:

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}. \quad (5)$$

Використовуючи ці формулювання, усереднені рівняння (1)–(3) із застосуванням співвідношень моделі турбулентності  $k$ - $\varepsilon$  Realizable можна представити у такому вигляді:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{V}} = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{E})}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{V}(\bar{\rho} \bar{E} + \bar{p})] = \\ = \nabla \cdot \left( \overline{\lambda_s \nabla T} + \frac{\overline{\mu_t}}{Sc_t} \nabla E \right) - \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{V}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}} k) = \\ = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + G_k - \bar{\rho} \varepsilon - Y_M, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{V}} \varepsilon) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \\ + \bar{\rho} C_1 \tilde{S} \varepsilon - \bar{\rho} C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{v \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k}, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\bar{\rho}$  – густина, усереднена за Рейнольдсом, кг/м<sup>3</sup>;

$\bar{p}$  – усереднений тиск, Па;

$\bar{E}$  – усереднена повна масова енергія, Дж/кг;

$\tilde{\mathbf{V}}^T = (\tilde{V}_x, \tilde{V}_y, \tilde{V}_z)$  – вектор швидкості, усередненої по Фавру, м/с;

$$\bar{\tau} = (\mu + \mu_t) \left[ \nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \nabla - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{I} \right] - \frac{2}{3} \bar{\rho} k - \text{тензор}$$

ефективних напружень, Па;

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} - \text{турбулентна в'язкість, Па·с;}$$

$k$  – турбулентна кінетична енергія, Дж/кг;

$\varepsilon$  – швидкість дисипації турбулентної кінетичної енергії, Дж/(кг·с);

$$Sc_t = \frac{\mu_t}{\rho D_t} - \text{число Шмідта;}$$

$D_t$  – коефіцієнт турбулентної дифузії, м<sup>2</sup>/с;

$T_{ref,k}$  – температура відліку, К;

$G_K = \mu_t S^2$  – джерело турбулентної кінетичної енергії за рахунок середнього градієнта швидкості, Вт/м<sup>3</sup>;

$\tilde{S} = \sqrt{2\tilde{\mathbf{D}} : \tilde{\mathbf{D}}}$  – модуль тензора середньої швидкості деформації, с<sup>-1</sup>;

$(\cdot)$  – оператор подвійного скалярного добутку;

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} [\nabla \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}} \nabla] - \text{тензор середньої швидкості}$$

деформації 2-го рангу, с<sup>-1</sup>;

$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2$  – член, що враховує ефект стисливості турбулентного потоку, Вт/м<sup>3</sup>;

$$M_t = \sqrt{k/a^2} - \text{турбулентне число Маха;}$$

$$a = \sqrt{\gamma R_u T / W} - \text{швидкість звуку, м/с;}$$

$\gamma$  – показник адіабати;

$$C_1 = \max\left(0.43, \frac{\eta}{\eta + 5}\right);$$

$$\eta = \tilde{S} \frac{k}{\varepsilon};$$

$$C_\mu = \left[ A_0 + A_s \frac{kU^*}{\varepsilon} \right]^{-1};$$

$$U^* = \sqrt{\tilde{\mathbf{D}} : \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} : \tilde{\mathbf{\Omega}}}, \text{ с}^{-1};$$

$\tilde{\mathbf{\Omega}}$  – тензор середньої швидкості обертання другого рангу, с<sup>-1</sup>;

$$A_s = \sqrt{6} \cos \phi;$$

$$\phi = \left[ 3 \cos(\sqrt{6} W) \right]^{-1}, \text{ рад;}$$

$$\bar{W} = \frac{3J_3}{\tilde{S}^3};$$

$$J_3 = \det(\tilde{\mathbf{D}}) - \text{третій інваріант } \tilde{\mathbf{D}};$$

$\nu$  – кінематична в'язкість, м<sup>2</sup>/с;

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.2, \quad A_0 = 4.04, \quad C_{1\varepsilon} = 1.44,$$

$C_2 = 1.9$  – константи k-ε моделі [15].

Формулювання моделей турбулентності k-ω SST і k-ε Launder-Sharma наведені в роботі [16].

Початкові умови:

$$\begin{cases} T(\mathbf{X}) = T_0; \\ \mathbf{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}_0; \\ p(\mathbf{X}) = p_0; \\ k(\mathbf{X}) = k_0; \\ \varepsilon(\mathbf{X}) = \varepsilon_0, \end{cases} \quad (11)$$

де  $\mathbf{X}(x, y, z) \in \Omega$  – Декартові координати, м;

$\Omega$  – розрахункова область.

Граничні умови:

– на вході газового потоку (12) і на виході – (13)

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{V}_{inlet}; \\ p = p_{inlet}; \\ T = T_{inlet}; \\ k = k_{inlet}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{inlet}, \end{cases} \quad (12)$$

де  $\mathbf{n}$  – вектор нормалі до поверхні контакту;

$$\begin{cases} p_{outlet} = 0; \\ T = T_{outlet}; \\ k = k_{outlet}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{outlet}, \end{cases} \quad (13)$$

– на поверхні профілю крила (14)

$$\begin{cases} \mathbf{V} = 0; \\ \mathbf{n} \cdot \nabla p = 0; \\ \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0. \end{cases} \quad (14)$$

### Теоретичні співвідношення для ідеальної надзвукової течії

Для порівняння характеристик профілю крила, при його обтіканні надзвуковим повітряним потоком, застосовано рівняння теорії надзвукових течій [11]:

– для випадку утворення косоного стрибка ущільнення (рис. 2а) рівняння для знаходження тиску, температури та числа Маха мають наступний вигляд:

$$p_2 = p_1 \left( 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right), \quad (11)$$

$$T_2 = T_1 \left( 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right) \frac{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \beta}, \quad (12)$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{\frac{M_1^2 \sin^2 \beta + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 \sin^2 \beta - 1}}}{\sin(\beta - \theta)}, \quad (13)$$

де  $M = \frac{V}{a}$  – число Маха;

$\beta$  – кут між вектором швидкості та косою хвилею ущільнення, рад;

$\theta$  – кут підйому увігнутого краю профілю, рад.

Для визначення значення кута  $\beta$  використовуються наступні співвідношення:

$$\beta = \arctan \frac{M_1^2 - 1 + 2\lambda \cos\left(\frac{4\pi\delta + \arccos(\chi)}{3}\right)}{3\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \tan\theta}, \quad (14)$$

де  $\lambda$  – приведена безрозмірна швидкість;

$\chi$  – приведений кут;

$$\lambda = \sqrt{(M_1^2 - 1)^2 - 3\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)\left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M_1^2\right) \tan^2 \theta}, \quad (15)$$

$$\chi = \frac{(M_1^2 - 1)^3}{\lambda^3} - 9\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \times \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 + \frac{\gamma+1}{4} M_1^2\right) \tan^2 \theta}{\lambda^3}, \quad (16)$$

де  $\delta$  – величина, яка набуває значення 0 (для слабкої хвилі ущільнення) або 1 (для сильної хвилі ущільнення);

– для випадку утворення розрідження середовища (течія Прандтля-Майєра) (рис. 2б) рівняння для знаходження тиску, температури та числа Маха мають такий вигляд:

$$p_2 = p_1 \left[ \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (17)$$

$$T_2 = T_1 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}, \quad (18)$$

$$f(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) - \arctan \sqrt{M^2 - 1}, \quad (19)$$

$$\theta = f(M_2) - f(M_1). \quad (20)$$

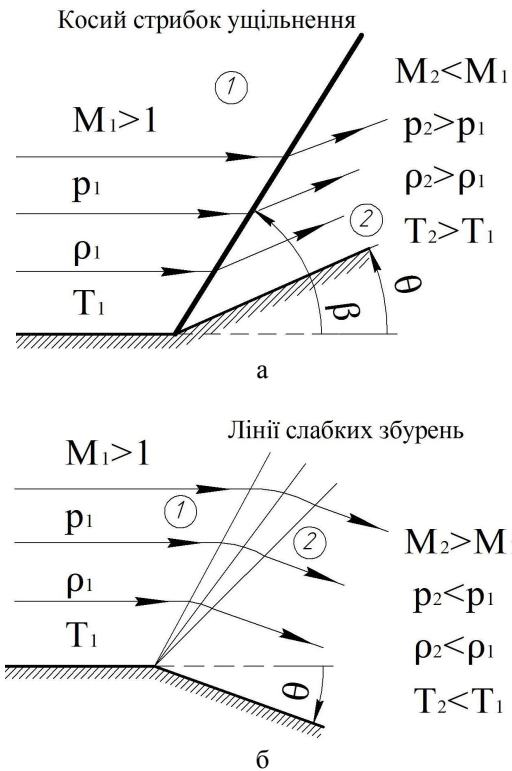


Рис. 2. Течія надзвукового потоку через увігнутий (а) або випуклий (б) край профілю крила

#### 4. Вихідні дані

Вихідні дані для побудови числових моделей включають: модель профілю крила; фізичні властивості повітряного середовища; початкові та граничні умови, задані параметричними величинами. Побудова моделі виконувалася на підставі даних, наведених у [17], і представлена схематично на рис. 3.

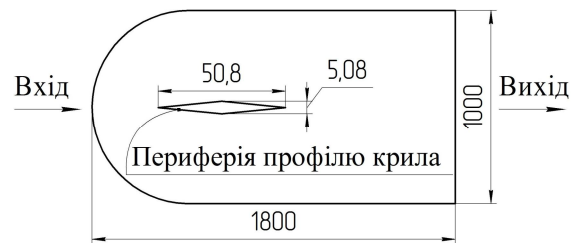


Рис. 3. Геометрична модель для проведення числових розрахунків (розміри вказані в мм)

Модель побудована в 2D постановці з припущенням, що крило має безкінечну довжину.

Фізичні властивості повітря бралися з [18] і наведені в табл. 1.

Таблиця 1  
Фізичні властивості повітря

Властивості	Величини
Молярна маса, кг/моль	0,02896
Температура відліку, К	288,15
Динамічна в'язкість, Па·с	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Число Прандтля	0,713
Питома теплоємність, Дж/(кг·К)	1005
Показник адіабати	1,4

Параметричні величини при проведенні розрахунків варіювалися у таких межах:

- кут атаки: 2°; 4°; 6°; 8°; 10°; 12°;
- число Маха: 1,86; 2,48.

Для проведення числового аналізу вихідна розрахункова область (рис. 3) була дискретизована на ~12000 та ~77000 гексадричних розрахункових комірок.

## 5. Методика проведення числових експериментів

Для числової реалізації сформульованої задачі використано вільний відкритий програмний код OpenFOAM. Дискретизація системи рівнянь в даному обчислювальному пакеті проводиться за методом скінченних об'ємів (МСО). Для розв'язання поставленої задачі було використано два розв'язувачі: sonicFoam і rhoCentralFoam.

Розв'язувач sonicFoam, побудований на базі PIMPLE методу числового розв'язання осереднених рівнянь Нав'є-Стокса з врахуванням турбулентності потоку за допомогою двох скалярних рівнянь (6)–(10) при крайових умовах (11)–(14). Метод PIMPLE являє собою комбінацію алгоритмів SIMPLE і PISO [19, 20]. Алгоритм SIMPLE використовується для розв'язання нестационарної задачі, де більш важливим є отримання значень швидкості, порівняно зі значенням величини тиску при розв'язанні системи дискретних рівнянь МСО. Оскільки кожна ітерація відповідає псевдоінтервалу за часом, то властивості знаходяться у відповідності із значенням релаксації для того, щоб стабілізувати метод і покращити збіжність. Надалі, для повного розв'язання системи тиск-швидкість для кожного інтервалу часу використовується алгоритм PISO. Даний алгоритм передбачає зменшення нелінійної пульсації швидкості за рахунок використання малого кроку інтегрування за часом, який визначається числом Куранта.

На відміну від sonicFoam, у розв'язувачі rhoCentralFoam використовується «центрально-протипотокова» схема А. Курганова для апроксимації конвективних членів (6)–(10) [21]. Перевага зазначеної схеми полягає у тому, що, застосовуючи

відповідну техніку зменшення схемної в'язкості, можна досягти збіжності розв'язку як для розривних рішень ударних хвиль, так і для рішень, де основну роль відіграють в'язкі явища [22].

Для проведення порівняльного аналізу використано три моделі турбулентності: k- $\omega$  SST (KWSST), k- $\epsilon$  Launder-Sharma (KELS) та k- $\epsilon$  Realizable (KER).

Початкові значення кінетичної енергії турбулентності та її дисипації обчислювалися за формулами (21)–(23):

$$k = \frac{3}{2} (VI)^2, \quad (21)$$

$$\epsilon = C_{\mu}^{\frac{3}{4}} \frac{k^2}{L}, \quad (22)$$

$$\omega = C_{\mu}^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{L} k^2, \quad (23)$$

де k – кінетична енергія турбулентності, м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;

I – інтенсивність кінетичної турбулентної енергії;

$\epsilon$  – коефіцієнта турбулентної дисипації, м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup>;

L – характерний масштаб турбулентності, м;

$C_{\mu} = 0,09$  – константа моделі турбулентності;

$\omega$  – питома дисипація, с<sup>-1</sup>.

Граничні умови, що задавалися в числовій моделі з використанням OpenFOAM, наведені в табл. 2.

Таблиця 2

### Граничні умови

Границя	Змінна	Тип граничної умови
чільна і тильна	V, p, T, $\mu_t$ , $\alpha_t$ , $\epsilon$ , k, $\omega$	empty
на вході та виході	T, $\epsilon$ , k	inletOutlet
на вході та виході	$\mu_t$ , $\alpha_t$	calculated
на вході	V	supersonicFreestream
на виході	V	inletOutlet
на вході	p	zeroGradient
на виході	p	waveTransmissive
периферія профілю крила	V	slip
	T, p	zeroGradient
	$\mu_t$	mutkWallFunction
	$\alpha_t$	compressible::alphiat-WallFunction
	$\epsilon$	compressible::epsilon-WallFunction
	k	compressible::kqRWallFunction
$\omega$	compressible::omega-WallFunction	

Для генерації та перевірки сітки використовувалися стандартні утиліти OpenFOAM – blockMesh, checkMesh та засоби інтерпретатора мови програмування Python [23]. Для обробки даних використовувалися стандартна утиліта OpenFOAM – sample та програма для побудови графіків Gnuplot [24].

### 6. Аналіз результатів числового експерименту

Для оцінки похибки обраних моделей турбулентності при моделюванні процесу обтікання конструкції надзвуковим повітряним потоком використано порівняння результатів числового аналізу з експериментальними [17] і теоретичними (точними розв'язками) [11] даними при числах Маха 1,86 та 2,48 (табл. 3 і табл. 4).

Таблиця 3

Відносна середня похибка розрахованих і теоретичних значень порівняно з експериментом [17]

Розв'язувач	Модель турбулентності	p, %	$C_{y_0}$ , %	$C_{x_0}$ , %
sonicFoam	KELS	3,2-8,0	2,7	9,5
	KER	3,9-9,8	3,8	9,5
	KWSST	4,1-10,3	3,4	9,6
rhoCentralFoam	KELS	2,5-8,7	9,3	10,2
	KER	3,1-10,2	9,7	10,7
	KWSST	3,2-10,4	9,8	10,9
Теоретичні значення [11]	-	7,6-12,3	10,5	9,6

Таблиця 4

Відносна середня похибка розрахованих значень порівняно з теоретичними даними [11]

Розв'язувач	Модель турбулентності	p, %	T, %	M, %	$C_{y_0}$ , %	$C_{x_0}$ , %
sonicFoam	KELS	6,0-10,9	5,6-12,4	5,3-10,0	11,1	17,2
	KER	4,4-7,6	4,9-10,2	4,5-8,4	8,8	14,6
	KWSST	3,8-6,7	4,3-8,6	3,8-7,5	8,9	12,6
rhoCentralFoam	KELS	2,8-5,3	2,6-5,4	2,7-6,1	5,7	10,9
	KER	2,4-3,6	1,4-2,8	1,5-3,0	7,6	8,0
	KWSST	2,6-3,4	1,4-2,8	1,3-3,1	8,5	7,6

Отримані значення похибок показують, що експериментальні дані найкраще описуються k-ε Launder-Sharma моделлю турбулентності. В той же час дана модель призводить до найбільших розбіж-

ностей з теоретичними результатами. Найменшу похибку порівняно з теоретичними даними дають моделі турбулентності k-ω SST і k-ε Realizable із використанням розв'язувача rhoCentralFoam.

Враховуючи вище вказані переваги та недоліки моделей турбулентності, отримані результати з оцінки похибок, найкраще описують надзвукове обтікання симетричного ромбовидного профілю моделі турбулентності k-ω SST і k-ε Realizable із застосуванням розв'язувача rhoCentralFoam. Тому подальший порівняльний аналіз результатів представлений лише для цих моделей турбулентності.

Графіки залежності коефіцієнтів підйомної сили та аеродинамічного опору від кута атаки наведені на рис. 4 і рис. 5.

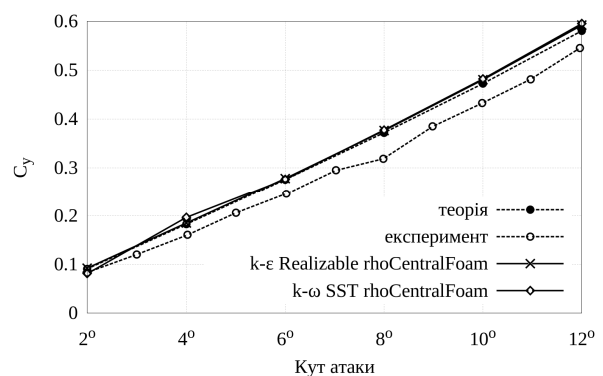


Рис. 4. Залежність коефіцієнта підйомної сили від кута атаки

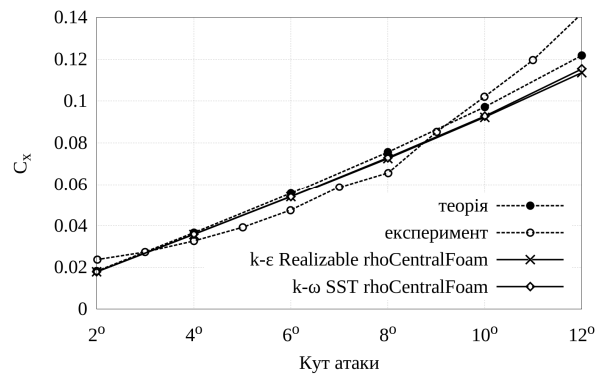


Рис. 5. Залежність коефіцієнта аеродинамічного опору від кута атаки

Як видно з наведених графіків, моделі турбулентності k-ω SST і k-ε Realizable із застосуванням розв'язувача rhoCentralFoam корелюються з теоретичними значеннями (11)–(20).

Розрахований коефіцієнт підйомної сили показує приблизно на 8 % завищені результати, а коефіцієнт аеродинамічного опору має лінійну залежність, хоч експериментальні дані мають явну експоненціальну залежність від кута атаки. Наведені від-

хилення пов'язані із припущеннями, що використані у числових моделях: не враховується дисипація енергії від внутрішнього тертя в'язкого потоку та шорсткість поверхні симетричного ромбовидного профілю крила.

Подальше дослідження стосується визначення характеру розподілу значень числа Маха, температури і тиску на поверхні профілю крила. Для цього обрано значення кута атаки  $6^\circ$  і  $8^\circ$  та модель турбулентності  $k-\omega$  SST із використанням вирішувача rhoCentralFoam. Результати для верхньої поверхні профілю крила приведені на рис. 6, 7.

Результати числового аналізу при огинанні потоком випуклого краю профілю крила показують значну похибку порівняно з теоретичними значеннями. Отриману похибку можна зменшити за допомогою використання більш дрібної розрахункової сітки (рис. 7).

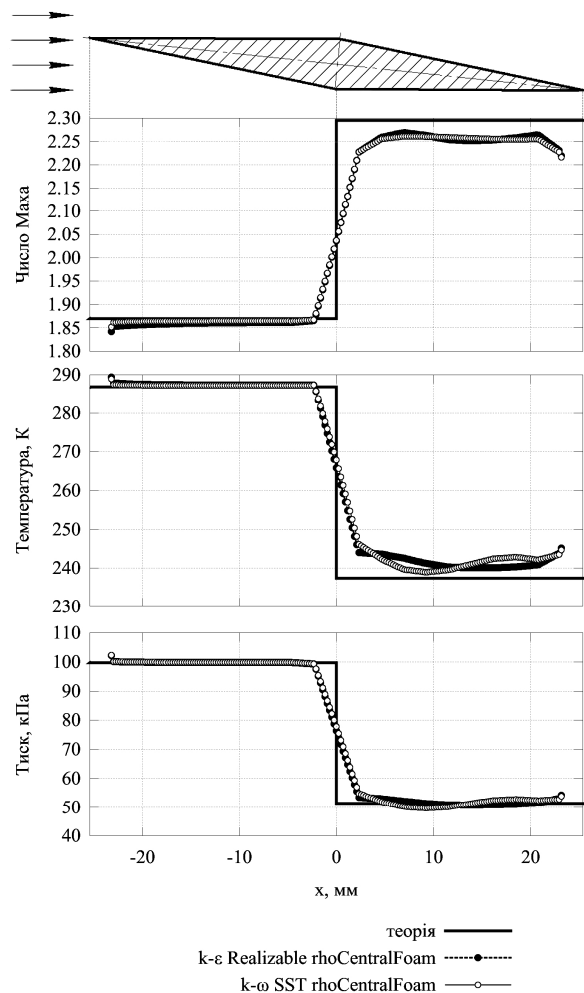


Рис. 6. Розподіл значень числа Маха, температури і тиску по верхній поверхні профілю крила при куті атаки  $6^\circ$

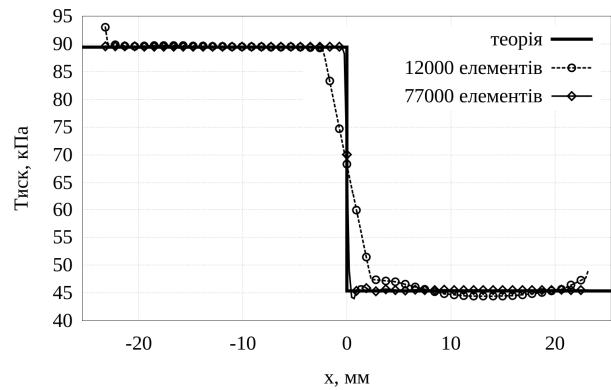


Рис. 7. Розподіл значень тиску по верхній поверхні профілю крила при куті атаки  $8^\circ$  для різної дискретизації розрахункової області

Використання більш дрібної сітки значно зменшує похибку отриманих результатів порівняно з результатами, отриманими на грубій сітці.

Проте варто відзначити, що при проходженні надзвукового потоку через вигнутий чи вигнутий гострий край ребра реальним газом, мають місце дисипативні перехідні процеси, які створюють картину плавного переходу значень фізичних полів [17].

## Висновки

Результати теоретичних досліджень надзвукового обтікання симетричного ромбовидного профілю крила ЛА показали можливість застосування вільного відкритого коду OpenFOAM. Встановлено, що найменші відхилення результатів числового аналізу фізичних полів, порівняно з даними точного розв'язку, спостерігаються при використанні розв'язувача rhoCentralFoam із застосуванням  $k-\omega$  SST і  $k-\epsilon$  Realizable моделей турбулентності. При цьому для нескладних конструкцій ЛА при обтіканні їх потоком із невеликим числом Рейнольдса ( $Re < 10^5$ ) доцільно використовувати розв'язувач sonicFoam із застосуванням  $k-\epsilon$  Launder-Sharma моделі турбулентності, що підтверджується порівнянням з експериментальними даними.

Подальше дослідження даної проблеми потребує визначення розподілу значень фізичних полів по поверхні ускладненої конструкції ЛА з врахуванням конфігурацій інтерференцій різної природи. Також важливим є врахування тертя в'язкого потоку при обтіканні шорсткої поверхні та ефекту нагрівання самого ЛА.



## Література

1. Рудычева, Н. Linux: победное шествие началось? [Электронный ресурс]. / Н. Рудычева, Мещеряков В. – Режим доступа : <http://www.cnews.ru/reviews/free/gov2009/articles/linux.shtml>. – 01.12.2014.
2. OpenFOAM. The Open Source CFD Toolbox [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.openfoam.org/>. – 01.12.2014.
3. Kolluru, R. Numerical Study of Navier-Stokes Equations in Supersonic Flow over a Double Wedge Airfoil using Adaptive Grids [Text] / R. Kolluru, V. Gopal // COMSOL Conference, Bangalore, 2012. – 6 p.
4. Gutierrez Marcantoni, L. F. High speed flow simulation using OpenFOAM [Text] / L. F. Gutierrez Marcantoni, J. P. Tamagno, S. A. Elaskar // Mecánica Computacional. – 2012. – Vol. 31. – P. 2939–2959.
5. Булат, П. В. Особенности применения моделей турбулентности при расчете течений в сверхзвуковых трактах перспективных воздушно-реактивных двигателей [Текст] / П. В. Булат, О. Н. Засухин, Н. В. Продан // Двигатель. – 2012. – Т. 79, № 1. – С. 20–23.
6. Kollgaard Voigt, L. P. Comparison of Turbulence Models for Numerical Calculation of Airflow in an annex 20 Room [Text] / L. P. Kollgaard Voigt. – Denmark : Technical University of Denmark, 2000. – 39 p. – ISBN 87-7475-225-1.
7. Bardina, J. E. Turbulence Modeling Validation, Testing, and Development [Text] : Technical Memorandum / J. E. Bardina, P. G. Huang, T. J. Coakley. – California, 1997. – 90 p. – No. A-976276.
8. Poroseva, S. V. Simulating separated flows using the  $k-\epsilon$  model. [Text] / S. V. Poroseva, G. Iaccarino // Annual Research Briefs : Center for Turbulence Research., NASA, Ames/Stanford Univ., 2001 – P. 375–383.
9. Menter, F. R. Zonal two-equation  $k-\omega$  turbulence model for aerodynamic flows. [Text] / F. R. Menter // 24th Fluid Dynamics Conference : Paper 93-2906, July 6-9, 1993. – 21 p.
10. Волков, К. Н. Течение и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. [Текст] / К. Н. Волков, В. Н. Емельянов. – М. : ФИЗМАЛИТ, 2010. – 488 с. – ISBN 978-5-9221-1182-9.
11. Anderson, J. D. Fundamental of aerodynamics [Text] / J. D. Anderson. – 5nd ed. – New York : McGraw-Hill, 2010. – 792 p. – ISBN 0-0733981-0-1.
12. Favre, A. Statistical equations of turbulent gases [Text] / A. Favre // Problems of hydrodynamics and continuum mechanics. – 1969. – P. 231–266.
13. Wilcox, D. C. Turbulence modeling for CFD [Text] / D. C. Wilcox. – California : DCW Industries, 1994. – 456 p. – ISBN 0-9636051-00.
14. Poinso, T. Theoretical and numerical combustion / T. Poinso, D. Veynante. – 2<sup>nd</sup> ed. – Philadelphia : Edwards, 2005. – 522 p.
15. A New  $k-\epsilon$  Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Development and Validation [Text] / T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, J. Zhu // Computers Fluids. – 1995. – Vol. 24, No. 3. – P. 227–238.
16. Asproulias, I. RANS Modelling for Compressible Turbulent Flows Involving Shock Wave Boundary Layer Interactions [Text] / I. Asproulias. – Manchester, UK : The University of Manchester, 2014. – 213 p.
17. Beastall, D. Wind-tunnel Tests on Two-dimensional Supersonic Aerofoils at  $M = 1.86$  and  $M = 2.48$  : A.R.C. Technical Report [Text] / D. Beastall, R. J. Pallant. – London : HMSO. – 1954. – 21 p.
18. Физические величины : справочник [Текст] / под ред. И. С. Григорьева. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
19. Patankar, S. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. (Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences) [Text] / S. Patankar. – New York : McGraw-Hill, 1980. – 198 p. – ISBN 0-07-048740-5.
20. Issa, R. J. Solution of the implicitly discretized reacting flow equations by operator splitting [Text] / R. J. Issa // Journal of computational physics. – 1986. – P. 40–65.
21. Kurganov, A. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection – diffusion equations. [Text] / A. Kurganov, E. Tadmor // Journal of Computational Physics. – 2000. – Vol. 160(1) – P. 241–282, – Way of Access : DOI : 10.1006/jcph.2000.6459.
22. Разработка и организация математического моделирования обтекания неподвижной лопатки энергетической установки [Текст] / А. Е. Бондарев, В. Т. Жуков, К. В. Мануковский, Н. Д. Новикова, О. Б. Феодоритова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2014. – 19 с.
23. Python [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.python.org/>. – 01.12.2014.
24. Gnuplot homepage [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.gnuplot.info/>. – 01.12.2014.

Поступила в редакцию 1.12.2014, рассмотрена на редколлегии 20.03.2015

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА  
СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ПРОГРАММНОГО КОДА OPENFOAM**

*Е. Н. Панов, А. Я. Карвацкий, А. Ю. Педченко, И. В. Пулинец, Т. В. Лазарев*

Разработана математическая модель гидродинамического состояния обтекания профиля крыла сверхзвуковым потоком. Исследовано влияние изменения угла атаки, скорости набегающего воздушного потока, выбора модели турбулентности на распределение полей давления, скорости, температуры, коэффициенты подъемной силы и аэродинамического сопротивления. Проведен сравнительный анализ числовых результатов с экспериментальными данными и данными аналитического решения уравнений течения Прандтля-Майера и для случая косоугольного скачка уплотнения. На базе полученных результатов предложена эффективная методика выбора оптимальных параметров решения задачи сверхзвукового обтекания конструкции летательных аппаратов с применением свободного открытого программного кода OpenFOAM.

**Ключевые слова:** OpenFOAM, сверхзвуковой поток, течение Прандтля-Майера, косоугольный скачок уплотнения, ромбовидный профиль.

**NUMERICAL MODELING OF SUPERSONIC FLOW OVER THE AIRFOIL  
WITH THE USE OF OPENFOAM**

*Ye. N. Panov, A. Ya. Karvatskii, A. Yu. Pedchenko, I. V. Pulinets, T. V. Lazarev*

The mathematical model of hydrodynamic state of the supersonic flow over the airfoil was developed. The influence of changes in the angle of impact, airspeed, choice of turbulence model on the pressure field division, velocity, temperature, lift and drag coefficients were investigated. The comparative analysis between numerical results and experimental data and with data of analytical solutions for the Prandtl-Meyer flow equations and for the case of oblique shock was held. On the basis of received data the effective method of the choice of optimal parameters of problem solution of supersonic flow over the aircraft construction with the usage of free open source software OpenFOAM was introduced.

**Key words:** OpenFOAM, supersonic flow, Prandtl-Meyer flow, oblique shock, wedge airfoil.

**Панов Свген Миколайович** – д-р техн. наук, проф., декан інженерно-хімічного факультету, завідувачий каф. хімічного, полімерного та силікатного машинобудування, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна, e-mail: admin@rst.kiev.ua.

**Карвацький Антон Янович** – д-р техн. наук, проф., професор каф. хімічного, полімерного та силікатного машинобудування, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна, e-mail: anton@rst.kiev.ua.

**Педченко Анатолій Юрійович** – аспірант каф. хімічного, полімерного та силікатного машинобудування, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна, e-mail: anatolek@rst.kpi.ua.

**Пулинець Ігор Валерійович** – канд. техн. наук, наук. співробітник науково-дослідного центру «Ресурсозберігаючі технології», Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна, e-mail: i\_pulinets@rst.kiev.ua.

**Лазарев Тарас Валерійович** – аспірант каф. хімічного, полімерного та силікатного машинобудування, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна, e-mail: t\_lazarev@rst.kpi.ua.