

УДК 621.454.2:629.13.02.62-52.001.2

М. В. СИДОРЕНКО, И. Н. НИКИЩЕНКО*ГП «КБ «Южное», Днепрпетровск, Украина*

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ СИНТЕЗА СХЕМ ЖРД

В работе приведена система нелинейных алгебраических уравнений для расчета энергетического баланса жидкостного ракетного двигателя, которая решается модифицированным гибридным алгоритмом Пауэлла, используя конечноразностную аппроксимацию для вычисления матрицы Якоби. Отмечено, что начальные приближения и способ описания математической модели жидкостного ракетного двигателя существенно влияют на сходимость решения. Причиной является жесткость системы уравнений, сильная нелинейность и учет фазового перехода в теплофизических свойствах компонентов топлива. Данная методика реализована и используется в программном комплексе LRES (Liquid Rocket Engine Simulate), разработчиком которого является ГП «КБ «Южное».

Ключевые слова: энергетический баланс, невязка, система уравнений, математическая модель ЖРД, синтез ЖРД.

Введение

В наше время сложно представить проектные проработки сложного технического изделия без инженерных расчетов с применением ЭВМ. Существует целый ряд программного обеспечения (ПО) для моделирования сложных технических систем. Но, несмотря на целый ряд достоинств такого ПО при решении узконаправленных задач, оно является не достаточно эффективным, так как не учитывает ряд нюансов, касающихся конкретного направления. Поэтому актуальной задачей является разработка ПО, предназначенного для построения и анализа различных схем жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) на стадии проектирования и в процессе эксплуатации.

В настоящее время мало работ, посвященных разработке математических моделей как при создании новых ЖРД, так и анализе процессов, происходящих в уже существующих двигателях.

Проектную проработку нового двигателя часто называют синтезом. Как правило, результатом синтеза нового двигателя является протокол согласования параметров двигателя. Синтез ЖРД состоит из нескольких этапов: создание пневмогидравлической схемы двигателя, задание исходных данных (КПД насосов и турбин, предполагаемые перепады давления в магистралях и агрегатах двигателя, требуемая тяга, соотношение компонентов и т.д. на номинальном режиме), построение системы уравнений сети двигателя, решение системы.

Обобщая опыт, накопленный в ГП КБ «Южное», авторами описаны некоторые практические

рекомендации, по построению и решению системы уравнений сети ЖРД при его проектной проработке (синтезе).

Составление математической модели является необходимым при синтезе ЖРД для соблюдения балансной увязки параметров.

Математические модели ЖРД принято разделять на статические и динамические. Для синтеза ЖРД авторами предложено использовать статическую модель (когда движение жидкости и газа происходит с постоянными скоростями, частота вращения валов ТНА и БНА постоянна, отсутствуют газовые и жидкостные емкости).

При таком подходе ЖРД представляет собой пневмогидравлическую сеть, которую можно описать нелинейной системой алгебраических уравнений.

1. Принцип построения модели

Поскольку сеть ЖРД является достаточно сложной, ее математическую модель целесообразно строить по блочному принципу [1]. В соответствии с этим принципом, сложная модель ЖРД составляется из моделей отдельных, более простых и автономных блоков (агрегатов), которые затем соединяются в одну общую сеть (рис. 1). Совокупность математических моделей блоков, объединенных в общую сеть, представляет математическую модель ЖРД. Благодаря такому подходу можно проводить поэтапную отладку.

Все блоки должны иметь входные и (или) выходные порты, которые обеспечивают взаимодейст-

вие блоков с сетью. Для самого блока соблюдается принцип инкапсуляции. Порт блока содержит вектор сосредоточенных параметров (табл. 1). Параметр порта блока является объектом, который используется как неизвестная при составлении системы уравнений. Порты удобно разделить по физической сущности процессов: гидравлические, газовые и механические.

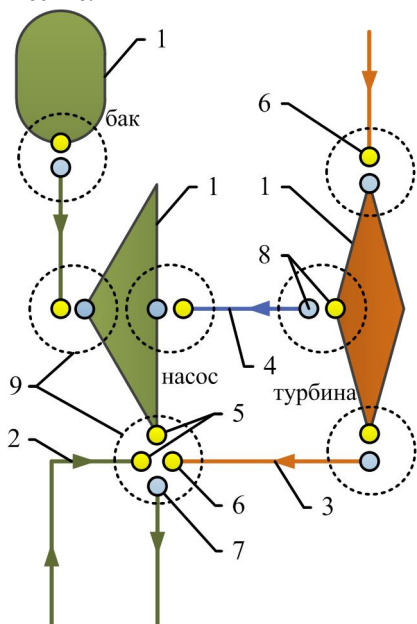


Рис. 1. Пример блочной схемы:

- 1 – блоки; 2 – соединительный блок (гидравлическая магистраль); 3 – соединительный блок (газовая магистраль); 4 – соединительный блок (вал);
- 5 – гидравлические выходные порты; 6 – газовый выходной порт; 7 – гидравлический выходной порт;
- 8 – механические порты; 9 – объект соединения портов

Таблица 1

Параметры портов блоков

№ п/п	Обозначение	Описание
Гидравлические порты		
1	P	Давление
2	E	Энтальпия
3	G	Массовый расход
Газовые порты		
1	P	Давление
2	E	Энтальпия
3	G	Массовый расход
4	R _ц	Газовая постоянная
5	χ	Показатель политропы
6	K _m	Массовое соотношение компонентов
Механические порты		
1	N	Мощность
2	n	Частота вращения

Если в каждом блоке определить приведенные параметры в портах (в зависимости от типа), то сис-

тема уравнений будет решена. Таким образом могут быть определены все остальные параметры, характеризующие ЖРД. Например, температура есть функция энтальпии и давления, а плотность – функция температуры и давления.

При таком подходе на языке C++ описание класса параметра будет выглядеть следующим образом:

```
class CParameterItem
{
public:
    double *pValue;
    double value;
    //Параметры, которые ссылаются на
    //объект этого класса
    vector<CParameterItem*> Senders;

    // Параметр, который ссылается на
    //объект этого класса
    CParameterItem* pTarget;

    //Родительский вектор параметров
    CConnectionParameters* pParent;

    //Конструктор по умолчанию
    CParameterItem()
    ::pValue(NULL), Target(NULL),
    pParent(NULL)
    {}

    inline operator double();
    inline double& operator=(_In_
    const double& val);
};
```

Пример использования объекта параметра:

```
CParameterItem Gsrc;
//Объявление неизвестной Psrc
SetUnknownVar(Psrc);
...
CParameterItem P[2];
//Объявление ссылки P[0] на Psrc
SetReferenceVar(P[0], Psrc);
//Объявление неизвестной P[1]
SetUnknownVar(P[1]);
...
//Перепад давления
double PressureLoss = 2.0;
//Запись невязки
F[0] = P[0] - PressureLoss - P[1];
...

```

Для связи блоков используются специальные (соединительные) блоки, которые снабжены дополнительной функцией. В зависимости от типа порта на подключаемом блоке их роль выполняют: валы, гидравлические и газовые магистрали. Например, для соединения насоса с баком потребуется гидравлическая магистраль. Она будет выполнять две функции:

- соединительную - бака с насосом;
- введение перепада давлений или параметров, определяющих гидравлическое сопротивление.

При создании одной или более связи между блоками создается объект соединения портов (см. рис. 1, поз. 9).

Объекты соединения портов должны подчиняться следующим правилам:

- объект соединения портов создается и существует при подключении к нему двух или более портов;
- допускается соединять газовые и жидкостные входные порты (выходные порты блоков);
- выходные порты (входные порты блоков) могут быть либо все газовые, либо все жидкостные, т.е. не могут быть комбинированными;
- если выходной порт (входной порт блока) газовый, то среди входов (выходные порты блоков) должен быть как минимум один газовый вход.

В качестве примера построения блочной схемы приведен бустерный насос с газовой турбиной (см. рис. 1). Входные порты окрашены в желтый цвет, а выходные – в синий. Насос имеет два гидравлических порта (входной и выходной) и еще один механический входной порт, так как насос является потребителем мощности. У турбины два газовых порта (входной и выходной) и один механический выходной порт, так как она является источником мощности.

Все внутренние переменные блоки рассчитываются непосредственно внутри блока, описывающего работу конкретного агрегата.

2. Принцип формирования системы уравнений и вектора неизвестных

Самым простым подходом является объявление всех параметров в портах неизвестными, но это влечет за собой сильное увеличение количества неизвестных и, соответственно, необходимых уравне-

ний, что приводит к ухудшению сходимости, точности и скорости решения. Рассмотрим более оптимальный способ формирования вектора неизвестных и уравнений.

Система уравнений будет формироваться из невязок, которые порождаются в блоках и объектах соединения портов. Невязка – уравнение, результат вычисления которого должен стремиться к нулю.

Количество невязок, которые порождает блок, не фиксировано и зависит от количества и типа входящих в блок портов. Также на количество порождаемых блоком невязок влияют локальные параметры блока.

Блок может и вовсе не порождать невязки, например, если в гидравлическом или газовом блоке не задан перепад давлений. При этом параметры выходного порта будут ссылаться на параметры входного порта. Данный подход позволяет существенно сократить количество уравнений в случаях, когда от соединительного блока (газовые, гидравлические магистрали и валы) требуется лишь функция связи.

Очень часто в сети ЖРД, присутствуют ветки, состоящие из последовательно соединенных газовых или гидравлических дипольных блоков (с одним входным и одним выходным портом). При статическом моделировании, в таких ветках расход в каждом блоке будет равен до ближайшего разветвления расхода. Соответственно параметры расхода во всех входных и выходных портах будут ссылаться на один и тот же параметр, который будет принадлежать порту блока, присоединенного к объекту соединения портов, в который входит более одного входного или выходного порта (рис. 2, а). Также этот параметр может принадлежать порту блока (соответственно рис. 2 б, в) – источнику расхода (бак, баллон) или порту блока с несколькими входными или выходными гидравлическими (газовыми) портами (газогенератор и дроссель с дренажем и т.д.).

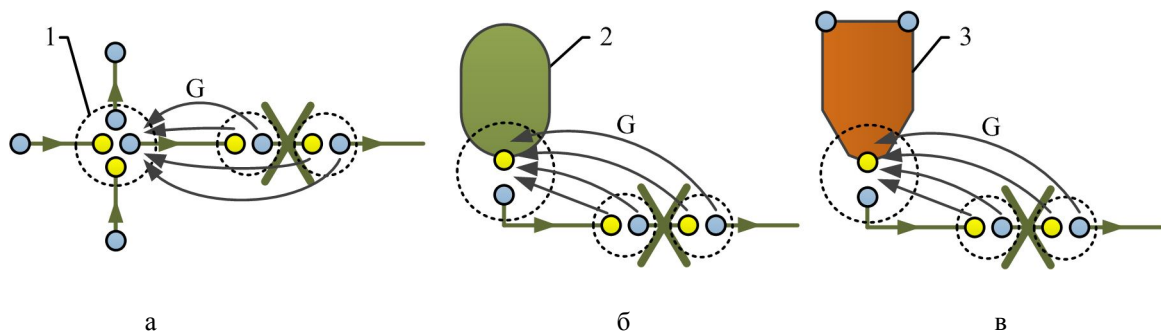


Рис. 2. Варианты ссылки параметра расхода:

- а – ссылка на порт блока, присоединенного к объекту соединения портов, в который входит более одного входного или выходного порта;
- б – ссылка на блок – источник расхода;
- в – ссылка на порт блока с несколькими входными или выходными гидравлическими (газовыми) портами

Ниже рассмотрим внутренне устройство некоторых основных блоков, которые понадобятся для расчета энергетического баланса ЖРД.

2.1 Объекты соединения портов

Объекты соединения портов порождают невязки и неизвестные в зависимости от количества выходящих (входящих портов блока) портов.

Для примера рассмотрим (рис. 3) объект соединения портов, состоящий только из гидравлических портов.

Если объект соединения портов содержит один входящий и один выходящий порт, то такой объект называется фиктивным. В таком случае параметр расхода в выходном порте будет ссылаться на соответствующий параметр входного порта $G_{\text{ВХ}} \leftarrow G_{\text{ВЫХ}}$.

В противном случае, согласно правилу Кирхгофа, необходимо записать невязку по расходу:

$$f_1 = \sum_{i=1}^k G_{\text{ВХ}}^i - \sum_{j=1}^m G_{\text{ВЫХ}}^j, \quad (1)$$

где k – количество входящих портов; m – количество выходящих портов.

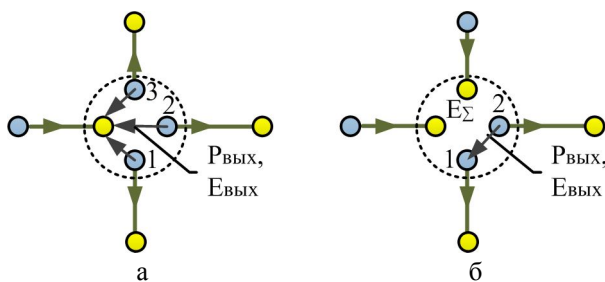


Рис. 3. Схемы формирования неизвестных в объектах соединения портов:

- а – при одном входном гидравлическом порте;
б – при двух и более входных портах

Если объект соединения портов содержит один входной порт (см. рис. 3, а), то нет необходимости порождать тривиальные невязки по энтальпии и давлению, такие как:

$$f_{i+1} = P_{\text{ВХ}} - P_{\text{ВЫХ}}^i \quad i = (1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$f_{j+1} = E_{\text{ВХ}} - E_{\text{ВЫХ}}^j \quad j = (n+1), (n+2), \dots, 2n, \quad (3)$$

где n – количество выходных портов.

В этом случае (см. рис. 3, а) параметры давления и энтальпии на всех выходящих портах будут ссылаться на соответствующие параметры входного порта, а система уравнений сети замкнется невязками в других блоках.

В случае если объект соединения портов содержит более одного входного порта (см. рис. 3, б), то параметры давления и энтальпии в выходящих

портах будут ссылаться на соответствующие параметры первого выходящего порта $P_{\text{ВЫХ}}^1$ и $E_{\text{ВЫХ}}^1$. Параметры $P_{\text{ВЫХ}}^1$ и $E_{\text{ВЫХ}}^1$ будут добавлены в вектор неизвестных. Для замыкания системы необходимо породить n невязок по давлению (4) и одну невязку по энтальпии (5):

$$f_{i+1} = P_{\text{ВХ}}^i - P_{\text{ВЫХ}}^1 \quad i = (1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где n – количество выходных портов;

$P_{\text{ВЫХ}}^1$ – давления в первом выходном порте.

Невязка по энтальпии выглядит следующим образом:

$$f_{n+2} = E_{\text{ВЫХ}}^1 - E_{\Sigma}, \quad (5)$$

где $E_{\text{ВЫХ}}^1$ – энтальпия в первом выходном порте;

E_{Σ} – суммарная входная энтальпия:

$$E_{\Sigma} = \frac{\sum_{i=1}^k (E_{\text{ВХ}}^i \cdot G_{\text{ВХ}}^i)}{\sum_{i=1}^k (G_{\text{ВХ}}^i)}, \quad (6)$$

где k – количество входящих портов;

$G_{\text{ВХ}}^i$ – параметр расхода в выходящих портах.

Формирование вектора неизвестных происходит в процессе анализа схемы (сети). Анализ сети происходит подобно построению бинарного дерева. Подобие заключается в наличии правой или левой связи в параметрах портов. Но в конце анализа сети для каждого параметра активна только одна связь – либо правая (вектор Senders), либо левая (pTarget).

Если в конце анализа сети, вектор Senders содержит указатели ссылающихся на него других параметров, то активна правая связь параметра порта. При этом данный параметр будет являться неизвестным, то есть его значением будет оперировать решатель в процессе решения системы уравнений. В этом случае переменная-член pValue будет ссылаться на элемент массива неизвестных решателя, а pTarget будет равен нулю.

Если активна левая связь, то параметр ссылается на другой параметр. При этом переменная-член pTarget не равна нулю, вектор Senders не будет содержать элементов, а pValue будет ссылаться на pValue объекта pTarget.

Данный подход разделяет описание уравнений от анализа сети. Разработчику модели становится проще оперировать параметрами портов при описании уравнений, не задумываясь, куда в действительности они ссылаются или будут ли они неизвестными для решателя. Анализ сети происходит при циклическом опросе блоков и объектов соединения портов. Это означает, что правила, как будет вести

себя блок в сети, описаны в самом блоке, при этом результат анализа сети не должен зависеть от порядка опроса блоков.

2.2. Гидравлическая магистраль

На этапе проектной проработки двигателя, как правило, гидравлические сопротивления узлов не известны. Поэтому, как правило, перепад давления ΔP в магистралях закладывается постоянным.

Изменение энтальпии определяется по уравнению [4]:

$$\Delta E = \frac{\Delta P}{\rho} \cdot \left[1 + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \right], \quad (7)$$

где ρ – средняя плотность между входом и выходом магистрали, $\rho = \frac{\rho_{ВХ} + \rho_{ВЫХ}}{2}$.

Если для требуемой жидкости существуют таблицы теплофизических свойств [6, 7, 9], то плотность определяется путем интерполяции таблично заданной функции $\rho_{ВХ} = f(E_{ВХ}, P_{ВХ})$. Аналогично определяется плотность на выходе.

Также по таблицам теплофизических свойств, определяется температура на входе $T_{ВХ} = f(E_{ВХ}, P_{ВХ})$ и выходе $T_{ВЫХ} = f(E_{ВЫХ}, P_{ВЫХ})$.

Если $\Delta P \neq 0$, то гидравлическая магистраль будет порождать две невязки:

$$\begin{aligned} f_1 &= P_{ВХ} - \Delta P - P_{ВЫХ}; \\ f_2 &= E_{ВХ} + \Delta E - E_{ВЫХ}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $P_{ВХ}$ и $P_{ВЫХ}$ – параметры давления во входном и выходном портах, $E_{ВХ}$ и $E_{ВЫХ}$ – параметры энтальпии во входном и выходном портах, ΔP – перепад давления в магистрали, ΔE – изменение энтальпии в магистрали.

Если $\Delta P = 0$, то гидравлическая магистраль фиктивная, а ее параметры в выходном порте будут ссылаться на параметры во входном порте:

$$\begin{aligned} P_{ВХ} &\leftarrow P_{ВЫХ}; \\ E_{ВХ} &\leftarrow E_{ВЫХ}; \\ G_{ВХ} &\leftarrow G_{ВЫХ}, \end{aligned} \quad (9)$$

где оператор « \leftarrow » означает, что параметр справа ссылается на параметр слева.

Если $\Delta P \neq 0$, то магистраль породит две неизвестные: $x_1 = P_{ВЫХ}$, $x_2 = E_{ВЫХ}$ и одну ссылку $G_{ВХ} \leftarrow G_{ВЫХ}$.

Если выходной порт магистрали не подключен в сеть, то порождается еще одна граничная невязка:

$$f_{n+1} = P_{ВЫХ} - P_{ВЫХ}^*, \quad (10)$$

где $P_{ВЫХ}^*$ – директивно заданное давление на выходе магистрали, n – количество порожденных уравнений в блоке.

В качестве граничной невязки может быть и любая другая невязка, например с директивно заданным расходом.

2.3. Газовая магистраль

В отличие от гидравлической магистрали, в газовой магистрали принято отсутствие изменения энтальпии.

Газовая магистраль может транспортировать два вида газа: продукты сгорания и «чистый» газ. Продукты сгорания порождает газогенератор, а источником «чистого» газа является газовый баллон.

Если транспортируется «чистый» газ, то плотность на входе $\rho_{ВХ} = f(E_{ВХ}, P_{ВХ})$ и выходе $\rho_{ВЫХ} = f(E_{ВЫХ}, P_{ВЫХ})$ определяется по таблицам теплофизических свойств. Аналогично определяется температура на входе $T_{ВХ} = f(E_{ВХ}, P_{ВХ})$ и выходе $T_{ВЫХ} = f(E_{ВЫХ}, P_{ВЫХ})$. Так как принято отсутствие изменения энтальпии, то на изменение плотности и температуры в газовой магистрали оказывает влияние только изменение давления.

Если по магистрали транспортируются продукты сгорания (смесь газов), то законы для этого газа в пределах магистрали принимаются как для идеального газа. В этом случае температура $T_{ВЫХ}$ на выходе равняется температуре на входе $T_{ВХ}$. Плотность определяется как:

$$\rho_{ВХ} = \frac{P_{ВХ}}{R_{\mu_{ВХ}} \cdot T_{ВХ}}, \quad (11)$$

где $R_{\mu_{ВХ}}$ – газовая постоянная (параметр входного газового порта).

Если $\Delta P \neq 0$, то газовая магистраль будет порождать одну неизвестную $x_1 = P_{ВЫХ}$ и одну невязку:

$$f_1 = P_{ВХ} - \Delta P - P_{ВЫХ}, \quad (12)$$

где $P_{ВХ}$ и $P_{ВЫХ}$ – параметры давления во входном и выходном портах, ΔP – перепад давления в магистрали.

Все остальные параметры в выходном порте будут ссылаться на параметры входного порта:

$$\begin{aligned} E_{ВХ} &\leftarrow E_{ВЫХ}; \\ R_{\mu_{ВХ}} &\leftarrow R_{\mu_{ВЫХ}}; \\ K_{m_{ВХ}} &\leftarrow K_{m_{ВЫХ}}; \\ \chi_{ВХ} &\leftarrow \chi_{ВЫХ}; \\ G_{ВХ} &\leftarrow G_{ВЫХ}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если $\Delta P = 0$, то к ссылкам (13) добавится еще одна ссылка: $P_{ВХ} \leftarrow P_{ВЫХ}$, а невязки вовсе не будут порождаться.

Аналогично гидравлической магистрали: если выходной порт магистрали не подключен в сеть, то

порождается вторая граничная невязка (10).

2.3. Топливный бак

Топливный бак (см. рис. 1, поз. 1) имеет один выходной гидравлический порт.

Топливный бак порождает одну неизвестную: $x_1 = G_{\text{ВЫХ}}$ и две ссылки:

$$\begin{aligned} P_{\text{ВЫХ}} &\leftarrow P_{\text{бак}}; \\ E_{\text{ВЫХ}} &\leftarrow E_{\text{бак}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $E_{\text{бак}} = f(T_{\text{бак}}, P_{\text{бак}})$ – энтальпия компонента в баке при директивно заданном давлению $P_{\text{бак}}$ и температуре $T_{\text{бак}}$ в баке. Определяется по таблице теплотехнических свойств для заданного компонента топлива.

2.4. Двухкомпонентный газогенератор

Двухкомпонентный газогенератор имеет три порта: два гидравлических входных и один газовый выходной.

В результате расчета по алгоритму [5] определяются равновесные параметры продуктов сгорания: $T_{\text{п.с.}}$ – температура, $R\mu_{\text{п.с.}}$ – газовая постоянная, $\chi_{\text{п.с.}}$ – показатель политропы. Исходными данными для данного расчета являются химические брутто формулы компонентов, их массовое соотношение, энтальпии и давление.

Массовое соотношение компонентов топлива:

$$Km_{\text{п.с.}} = \frac{G_{\text{ВХ}}^{\text{ox}} + G^{\text{oxfu}}}{G_{\text{ВХ}}^{\text{fu}} - G^{\text{oxfu}}}, \quad (15)$$

где $G_{\text{ВХ}}^{\text{ox}}$ – параметр расхода из входного порта, в который из сети поступил окислитель; $G_{\text{ВХ}}^{\text{fu}}$ – параметр расхода из входного порта, в который из сети поступило горючее; G^{oxfu} – директивно заданная доля примеси горючего в окислителе (как правило, образуется при сливании продуктов сгорания в гидравлическую магистраль окислителя после газовой турбины бустерного агрегата).

Передача массового соотношения компонентов топлива по сети объясняется необходимостью этого параметра при определении параметров слияния продуктов сгорания с жидкими компонентами и другими продуктами сгорания далее по сети, а также при определении свойств в камере сгорания с дожиганием генераторного газа.

Энтальпия продуктов сгорания определяется как для идеального газа:

$$E_{\text{п.с.}} = (T_{\text{п.с.}} - T_{E=0}) \cdot \frac{\chi_{\text{п.с.}}}{\chi_{\text{п.с.}} - 1} \cdot R\mu_{\text{п.с.}}, \quad (16)$$

где $T_{E=0}$ – температура, при которой энтальпия всех используемых в сети жидкостей и газов равна нулю. Данную температуру удобно принять равную 0 К.

Аналогично объекту соединения портов, который содержит более одного входного порта (см. рис. 3, б), для замыкания системы достаточно, чтобы газогенератор порождал одну невязку по расходу и две невязки по давлению, все остальные параметры газового выходного порта ссылались на переменные:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^k G_{\text{ВХ}}^i - \sum_{j=1}^m G_{\text{ВЫХ}}^j; \\ f_2 &= P_{\text{ВХ}}^1 - P_{\text{ВЫХ}}; \\ f_3 &= P_{\text{ВХ}}^2 - P_{\text{ВЫХ}}; \\ E_{\text{п.с.}} &\leftarrow E_{\text{ВЫХ}}; \\ R\mu_{\text{п.с.}} &\leftarrow R\mu_{\text{ВЫХ}}; \\ \chi_{\text{п.с.}} &\leftarrow \chi_{\text{ВЫХ}}; \\ Km_{\text{п.с.}} &\leftarrow Km_{\text{ВЫХ}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где параметры с индексом «вых» принадлежат выходному газовому порту, k – количество входящих портов; m – количество выходящих портов; $P_{\text{ВХ}}^1$ и $P_{\text{ВХ}}^2$ – параметры давления в первом и втором гидравлических портах.

Но при таком подходе наблюдается плохая сходимость решения сети ЖРД. Причиной является внесение больших возмущений в сеть при изменении параметров газогенератора в процессе решения. Для получения решения необходимо, чтобы начальные приближения были в очень узкой окрестности решения.

Улучшает ситуацию введение тривиальных уравнений. В таком случае газогенератор будет порождать семь невязок и семь неизвестных:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^k G_{\text{ВХ}}^i - \sum_{j=1}^m G_{\text{ВЫХ}}^j; \\ f_2 &= P_{\text{ВХ}}^1 - P_{\text{ВЫХ}}; \\ f_3 &= P_{\text{ВХ}}^2 - P_{\text{ВЫХ}}; \\ f_4 &= E_{\text{п.с.}} - E_{\text{ВЫХ}}; \\ f_5 &= R\mu_{\text{п.с.}} - R\mu_{\text{ВЫХ}}; \\ f_6 &= \chi_{\text{п.с.}} - \chi_{\text{ВЫХ}}; \\ f_7 &= Km_{\text{п.с.}} - Km_{\text{ВЫХ}}, \end{aligned} \quad (18)$$

где параметры с индексом «вых» принадлежат выходному газовому порту.

При этом в вектор неизвестных будут включены 6 неизвестных – все параметры выходного газового порта (см. табл. 1).

2.5. Газовая турбина

Газовая турбина имеет три порта: два газовых порта (входной и выходной) и один механический выходной порт.

Предполагается, что рабочим телом для турбины являются продукты сгорания из газогенератора, тогда располагаемая адиабатная работа, т. е. максимально возможная работа без потерь, определяется из соотношения, как для идеального газа:

$$L_{ад} = E_{вх} \cdot \left(1 - \pi^* \frac{\chi_{вх} - 1}{\chi_{вх}} \right), \quad (19)$$

где π^* – директивно заданная степень понижения давления; параметры с индексом «вх» принадлежат входному газовому порту.

Изменение энтальпии при этом определяется как:

$$\Delta E = L_{ад} \cdot \eta_T, \quad (20)$$

где η_T – коэффициент полезного действия турбины.

Как правило, когда проводится синтез двигателя, КПД–характеристика турбины турбонасосного агрегата еще неизвестна, поэтому КПД принимают константой.

Для определения параметров выходных портов в турбине порождается три невязки и четыре ссылки:

$$\begin{aligned} f_1 &= P_{вх} \cdot \pi^* - P_{вых}; \\ f_2 &= E_{вх} - \Delta E - E_{вых}; \\ f_3 &= N_{вых} - N_T; \\ R\mu_{вх} &\leftarrow R\mu_{вых}; \\ Km_{вх} &\leftarrow Km_{вых}; \\ \chi_{вх} &\leftarrow \chi_{вых}; \\ G_{вх} &\leftarrow G_{вых}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $N_{вых}$ – параметр мощности в выходном механическом порте; $N_T = G_{вх} \cdot \Delta E$ – механическая мощность турбины.

При этом в вектор неизвестных будут включены три неизвестных:

$$x_1 = P_{вых}; \quad x_2 = E_{вых}; \quad x_3 = N_{вых}. \quad (22)$$

2.6. Шнекоцентробежный насос

Шнекоцентробежный насос имеет три порта: два газовых порта (входной и выходной) и один механический входной порт.

Мощность насоса определяется из соотноше-

ния:

$$N_H = \frac{G_{вх}}{\rho} \cdot (P_{вых} - P_{вх}) \cdot \eta_H, \quad (23)$$

где ρ – средняя плотность между входом и выходом насоса (определяется аналогично гидравлической магистрали); η_H – коэффициент полезного действия насоса (аналогично турбине, принимают константой).

Величина подводимого извне тепла обычно пренебрежимо мала. Если пренебречь также обычно малыми изменениями кинетической энергии и энергии положения, то изменение энтальпии определяется по уравнению [3]:

$$\Delta E = \frac{P_{вых} - P_{вх}}{\rho} \cdot \frac{1}{\eta_H}. \quad (24)$$

Логично провести аналогию невязок и ссылок шнекоцентробежного насоса с гидравлической магистралью, которая имеет также один гидравлический вход и один гидравлический выход. Но в модели шнекоцентробежного насоса, которая применяется для синтеза ЖРД, будет отсутствовать невязка по давлению. Это значит, что напор насоса является искомой величиной и будет определен в результате решения системы. Для замыкания системы, недостающая невязка будет определена в камере сгорания.

При таком подходе шнекоцентробежный насос будет порождать две невязки и одну ссылку:

$$\begin{aligned} f_1 &= E_{вх} - \Delta E - E_{вых}; \\ f_2 &= N_{вх} - N_H; \\ G_{вх} &\leftarrow G_{вых}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $N_{вх}$ – параметр мощности во входном механическом порте; N_H – механическая мощность насоса.

При этом в вектор неизвестных будут включены, аналогично гидравлической магистрали, две неизвестных:

$$\begin{aligned} x_1 &= P_{вых}; \\ x_2 &= E_{вых}. \end{aligned} \quad (26)$$

2.7. Камера сгорания

Значительную роль в синтезе ЖРД играет камера сгорания, она замыкает систему уравнений.

Аналогично газогенератору, в результате расчета по алгоритму [5] определяются равновесные параметры: $T_{п.с.}$ – температура продуктов сгорания, $R\mu_{п.с.}$ – газовая постоянная продуктов сгорания, $\chi_{п.с.}$ – показатель политропы продуктов сгорания, I_{sp} – удельный импульс.

Камера сгорания ЖРД не порождает неизвестных и ссылок. При условии, что камера сгорания без дожигания генераторного газа, в первый входной

гидравлический порт приходит окислитель, а во второй – горючее, то в камере сгорания будут порождаться следующие невязки:

$$\begin{aligned} f_1 &= P_{\text{ВХ}}^1 - P_{\text{к}}^*; f_2 = P_{\text{ВХ}}^2 - P_{\text{к}}^*; \\ f_3 &= \frac{G_{\text{ВХ}}^1}{G_{\text{ВХ}}^2} - K_m^*; \\ f_4 &= G_{\text{ВХ}}^1 + G_{\text{ВХ}}^2 - \frac{T^* - T_{\text{с}}}{I_{\text{сп}}}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $P_{\text{к}}^*$ – требуемое полное давление в камере (директивно заданное); K_m^* – требуемое массовое соотношение компонентов (директивно заданное); T^* – требуемая тяга двигателя (директивно заданная); $T_{\text{с}}$ – тяга, создаваемая выхлопным соплом; $I_{\text{сп}}$ – удельный импульс камеры сгорания.

2.8. Выхлопное сопло

Выхлопное сопло (рис. 4, поз. 21) имеет один газовый входной порт. Также как и камера сгорания, выхлопное сопло не порождает неизвестных и ссылок.

$$f_1 = P_{\text{ВХ}} - P_{\text{к}}^*, \quad (28)$$

где $P_{\text{к}}^*$ – директивно заданное, требуемое полное давление перед соплом.

Адиабатическая скорость истечения определяется, как:

$$C_{\text{ад}} = \sqrt{2 \cdot E_{\text{ВХ}} \cdot \left(1 - \left(\frac{P_{\text{а}}}{P_{\text{к}}^*} \right)^{\frac{\chi_{\text{ВХ}} - 1}{\chi_{\text{ВХ}}} \right)}, \quad (29)$$

где $P_{\text{а}}$ – давление на срезе сопла.

Удельный импульс сопла определяется из соотношения:

$$I_{\text{сп}} = \frac{T_{\text{с}}}{G_{\text{ВХ}}}, \quad (30)$$

где $T_{\text{с}}$ – тяга, создаваемая соплом, рассчитывается без учета возможного скачка уплотнения [2]:

$$T_{\text{с}} = C_{\text{ад}} \cdot G_{\text{ВХ}} + F_{\text{а}} \cdot P_{\text{а}} - F_{\text{а}} \cdot P_{\text{н}}, \quad (31)$$

где $F_{\text{а}}$ – площадь среза сопла; $P_{\text{н}}$ – давление окружающей среды.

Давление на срезе сопла определяется из соотношения [2]:

$$P_{\text{а}} = \frac{P_{\text{к}}^*}{\left(1 + \frac{\chi_{\text{ВХ}} - 1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{\chi_{\text{ВХ}}}{\chi_{\text{ВХ}} - 1}}}, \quad (32)$$

где M – число Маха.

Число Маха на срезе сопла определяется из

трансцендентного уравнения:

$$M = \sqrt{\left(\frac{F_{\text{а}}}{F_{\text{кр}}} \cdot M \right)^{\frac{2 \cdot (\chi_{\text{ВХ}} - 1)}{\chi_{\text{ВХ}} + 1}} \cdot \frac{(\chi_{\text{ВХ}} + 1)}{\chi_{\text{ВХ}} - 1} - \frac{2}{\chi_{\text{ВХ}} - 1}}, \quad (33)$$

где $F_{\text{кр}}$ – площадь критического сечения.

Уравнение (33) решается итерационным способом с начальным приближением $M=2$.

Пример

Ниже (см. рис. 4) приведена примитивная расчетная схема ЖРД без дожигания генераторного газа. Для замыкания системы, кроме описанных выше блоков, необходимо ввести два настроечных жиклера (рис. 4, поз. 11, поз. 12). Система уравнений для такой схемы будет включать 41 уравнение.

В первом настроечном жиклере (поз. 11) необходимо породить две невязки: по массовому соотношению компонентов в газогенераторе и изменению энтальпии в жиклере:

$$f_1 = K_{m_{\text{п.с.гг}}} - K_{m_{\text{гг}}}^*, f_2 = E_{\text{ВХ}} + \Delta E - E_{\text{ВЫХ}}, \quad (34)$$

где $K_{m_{\text{п.с.гг}}}$ – параметр массового соотношения компонентов в газогенераторе; $K_{m_{\text{гг}}}^*$ – требуемое (директивно заданное) массовое соотношение компонентов топлива в газогенераторе.

Параметр $K_{m_{\text{п.с.гг}}}$ не является параметром портов, поэтому в блок – настроечный жиклер его необходимо передать другим способом.

Во втором настроечном жиклере (поз. 12) необходимо породить только одну невязку – по изменению энтальпии в жиклере. При этом в обоих жиклерах будут порождаться по две неизвестные: давление и энтальпия в выходных портах.

Объект соединения портов (см. рис. 4, поз. 23) порождает две неизвестных ($x_1 = N_{\text{ВЫХ}}^1$; $x_2 = N_{\text{ВЫХ}}^2$) и одну невязку:

$$f_1 = \sum_{i=1}^k N_{\text{ВХ}}^i - \sum_{j=1}^m N_{\text{ВЫХ}}^j, \quad (35)$$

где $k = 1$ – количество входящих механических портов; $m = 2$ – количество выходящих механических портов; $N_{\text{ВЫХ}}^1$ – мощность потребляемая насосом окислителя; $N_{\text{ВЫХ}}^2$ – мощность потребляемая насосом горючего.

В остальных объектах соединения портов не порождаются невязки и неизвестные, в них создаются только ссылки параметров, так как в них только один входной порт и один выходной порт. Аналогично и валы (см. рис. 4, поз. 15, поз. 16) не порожают невязки и неизвестные, в них только ссылается мощность с входного порта на выходной порт.

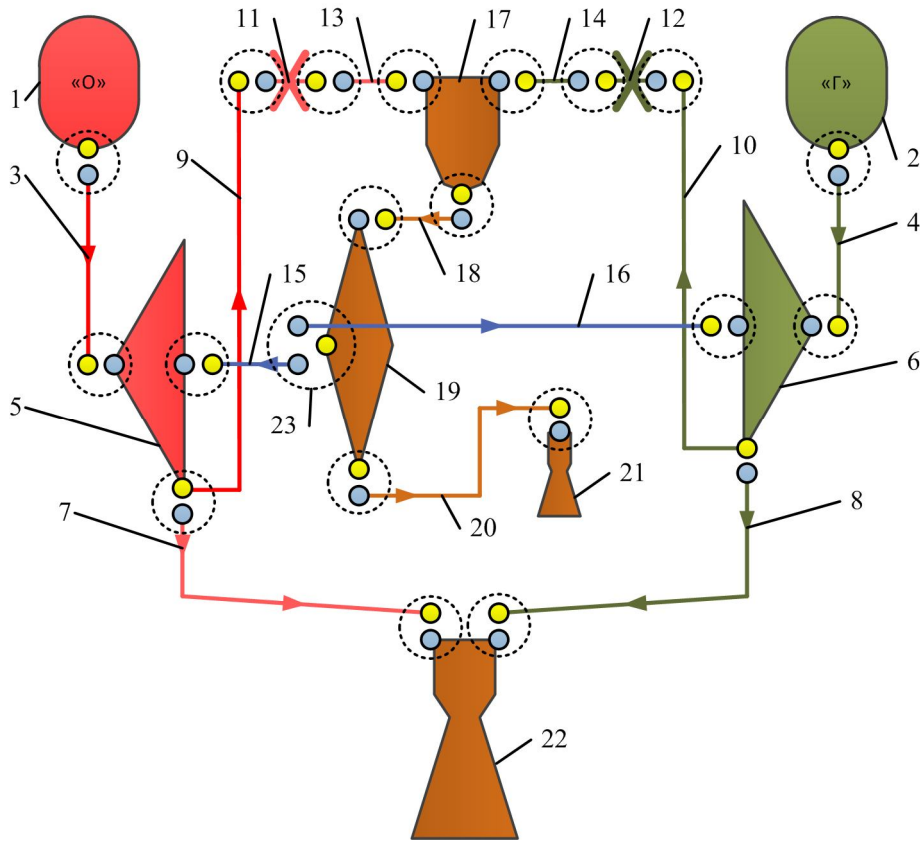


Рис. 4. Пример примитивной расчетной схемы ЖРД без дожигания генераторного газа:
 1, 2 – баки; 3, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 14 – гидравлические магистрали; 5, 6 – шнекоцентробежные насосы;
 11, 12 – настроечные гидравлические жиклеры; 15, 16 – валы; 17 – двухкомпонентный газогенератор;
 18, 20 – газовая магистраль; 19 – газовая турбина; 21 – выхлопное сопло; 22 – камера сгорания.

В результате расчета системы уравнений по приведенной схеме будут определены параметры портов во всех блоках, а следственно и расходы во всех ветках, требуемые напоры насосов, мощности насосов и турбины, температуры жидких компонентов и продуктов сгорания, удельный импульс, тяга и др. Проведя серию расчетов при различных давлениях в камере двигателя можно построить зависимость удельного импульса двигателя от давления в камере. Как известно, для ЖРД без дожигания генераторного газа, удельный импульс двигателя имеет максимум при определенном давлении в камере сгорания, тогда как удельный импульс камеры двигателя растет с ростом давления в камере.

Заключение

Подпрограмма для решения системы уравнений основана на процедуре HYBRD пакета MINPACK, использующая модификацию гибридного алгоритма Пауэлла. Описание алгоритма приведено в [8]. Модификация является вариантом метода Ньютона, с запретом больших величин шага и

увеличения невязки. При вычислении матрицы Якоби используется конечноразностная аппроксимация вперед с относительным шагом переменных равным 10^{-4} . Уменьшение шага приводит к дребезгу при определении равновесных параметров продуктов сгорания по алгоритму [5], что ухудшает сходимость системы. Получение частных производных для i -той переменной происходит при циклическом опросе блоков и объектов соединения портов. Для ускорения формирования якобиана, проверяется принадлежность i -той переменной текущему блоку или объекту соединения портов, что ускоряет время расчета примерно в три раза.

В процессе численных экспериментов отмечено, что газовые блоки вносят гораздо больше возмущения в систему, нежели гидравлические блоки, где плотность от давления не так сильно зависит. Способ описания внутренней математической модели блоков существенно влияет на сходимость решения. Причиной является жесткость системы уравнений, и сильная нелинейность. Также учет фазового перехода в теплофизических свойствах компонентов топлива приводит к резкому изменению частных

производных при формировании якобиана.

Описанная выше методика реализована и используется в программном комплексе LRES (Liquid Rocket Engine Simulate), разработчиком которого является ГП «КБ «Южное».

Литература

1. Беляев, Е. Н. Математическое моделирование рабочего процесса жидкостных ракетных двигателей [Текст] : учеб. / В. К. Чванов, В. В. Черваков. – М. : Изд-во МАИ, 1999. – 228 с.

2. Васильев, А. П. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей [Текст] : В 2 кн. кн. 2. Учебн. для авиац. спец. вузов / В. М. Кудрявцев, В. А. Кузнецов и др ; под ред. В. М. Кудрявцева. – 4-е изд. – М. : Высш. шк., 1993. – 368 с.

3. Сточек, Н. П. Гидравлика жидкостных ракетных двигателей [Текст] / Н. П. Сточек, А. С. Шапиро. – М. : «Машиностроение», 1978. – 128 с.

4. Юдаев, Б. Н. Техническая термодинамика. Теплопередача [Текст] : учеб. для неэнергетич. спец. вузов. / Б. Н. Юдаев. – М. : Высш. шк., 1988. – 479 с.

5. Инструкция к программе Астра «Моделирование химических и фазовых равновесий при высоких температурах» [Текст]. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. – 120 с.

6. Варгафтик, Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей [Текст] / Н. Б. Варгафтик. – М. : Наука, 1972. – 720 с.

7. Lemmon, E. W. NIST Standard Reference Database 23: Reference Fluid Thermodynamic and Transport Properties – REFPROP. Vers. 9.0 [Electronic resources] / E. W. Lemmon, V. L. Huber, M. O. McLinden. – Thermophysical Properties Division National Institute of Standards and Technology Boulder, Colorado 80305, 2010. – Access: <http://www.nist.gov/srd/upload/REFPROP9.pdf>. – 12.03.2015.

8. More, J. User guide for MINPACK-1 [Text] / J. More, Burton S. Garbow, Kenneth E. Hillstrom // Argonne National Labs Report ALN-80-74. – Argonne, Illinois, 1980. – 48 p.

9. Outcalt, S. L. Thermophysical Properties Measurements of Rocket Propellant RP-1 and RP-2 [Text] / Stephanie L Outcalt, Arno Laesecke, Karin J Brumback // Journal of Propulsion and Power. – 2009. – Vol. 25., No. 5. – P. 1032-1040.

Поступила в редакцию 5.05.2015, рассмотрена на редколлегии 17.06.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. каф. теплотехники В. А. Габринец, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. В. Лазаряна, Днепропетровск.

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ СИНТЕЗА СХЕМ ЖРД

М. В. Сидоренко, І. М. Нікіщенко

В роботі представлено систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для розрахунку енергетичного балансу рідинного ракетного двигуна, яка розраховується модифікованим гібридним алгоритмом Пауелла, з використанням скінченнорізницевої апроксимації матриці Якобі. Підкреслено, що початкові наближення та спосіб опису математичної моделі рідинного ракетного двигуна суттєво впливає на збіжність розв'язання. Причиною є жорсткість системи рівнянь, суттєва нелінійність та врахування фазового переходу в теплофізичних властивостях компонентів палива. Приведена методика реалізована та використовується в програмному комплексі LRES (Liquid Rocket Engine Simulate), розробником якої є ДП «КБ «Південне».

Ключові слова: енергетичний баланс, нев'язка, математична модель РРД, синтез РРД.

FEATURE OF MATHEMATICAL MODELING FOR LRE SCHEMATICS SYNTHESIS

M. V. Sydorenko, I. N. Nikishchenko

The system of the nonlinear algebraic equations for calculation of liquid rocket engine's power balance was presented at this work. The system is solved by the Powell modified hybrid algorithm with Jacobian forward finite-difference approximation. It's noted that the initial approximation and the definition of mathematical model of the liquid rocket engine essentially influences to solution convergence. The system of equations rigidity, strong nonlinearity and consider of thermal properties phase transition of fuel components are cause. This methodology is realized and used in software package LRES (Liquid Rocket Engine Simulate) developed by «Yuzhnoye» SDO.

Key words: energy balance, discrepancy, mathematical simulation LRE, synthesis LRE.

Сидоренко Максим Владимирович – инженер I к., ГП «КБ «Южное», Днепропетровск, Украина, e-mail: maksid@email.ua.

Никищенко Игорь Николаевич – зам. главного конструктора КБ-4 по САПР, ГП «КБ «Южное», Днепропетровск, Украина, e-mail: nik98@mail.ru.