

УДК 532.526

ЮЕ ПЕН

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ТЕЛЕСНЫХ ПРОФИЛЕЙ В ОГРАНИЧЕННОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Современное численное решение начально-краевых задач механики сплошных сред базируется на создании математической модели и построении расчётных сеток на геометрической форме. Данная статья посвящена комплексному исследованию создания системы алгебраических уравнений на базе обобщённых потенциалов, оригинального аппарата векторно-тензорного анализа и систематического применения метода граничных интегральных уравнений. Представлены результаты вычислительного эксперимента определения распределённых аэродинамических характеристик (давлений и завихренностей) при обтекании системы телесных профилей ограниченным потоком вязкой несжимаемой жидкости в контрольной области и на каждый профиль, расположенный вблизи поверхности раздела.

**Ключевые слова:** аэродинамические характеристики, системы телесных профилей, алгебраические уравнения, дискретизация геометрических границ, схема иллюстрирования течения воздушных потоков.

### 1. Постановка задачи

Современные несущие системы летательных аппаратов широкого применения представляют собой развитую систему многоразрезных крыльев. В полной мере эффективность таких систем реализуется на режимах взлёта-посадки летательного аппарата. Причём в силу начального периода движения скорость не превышает 40 м/с, и математической моделью процессов является классическая система законов сохранения динамики вязкой несжимаемой жидкости [1].

Представлено направление решения задачи исследования обтекания произвольной системы профилей телесной формы в плоской области ( $\tau$ ) реальным потоком несжимаемой среды (рис. 1). В связи с возможным присутствием плоской поверхности раздела на режимах взлёта-посадки самолёта, поле скоростей набегающего потока  $V_\infty$  считается существенно завихренным.

Необходимо подчеркнуть, что современные исследования проблемных и востребованных задач меха-

ники сплошных сред и, в частности, аэрогидродинамики опираются на развитые аппараты функционального и векторно-тензорного анализов [1], что в полной мере эффективно эксплуатируется и способствует развитию численных методов решения всего спектра востребованных задач механики.

### 2. Математическая модель задачи

Наиболее достоверной и апробированной математической моделью движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости является краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных Навье-Стокса [1, 2], которая состоит из системы уравнений сохранения для стационарного движения потока вязкой несжимаемой жидкости.

Принципиально, что векторы скорости  $\mathbf{V}$  и завихренности  $\mathbf{\Omega}$  являются решениями основной задачи векторного анализа [2, 4, 5]:

$$(\nabla, \mathbf{V}) = q; [\nabla, \mathbf{V}] = \mathbf{\Omega}; (\nabla, \mathbf{\Omega}) = 0, \quad (1)$$

где  $q$  – интенсивность возможных источников / стоков массы.

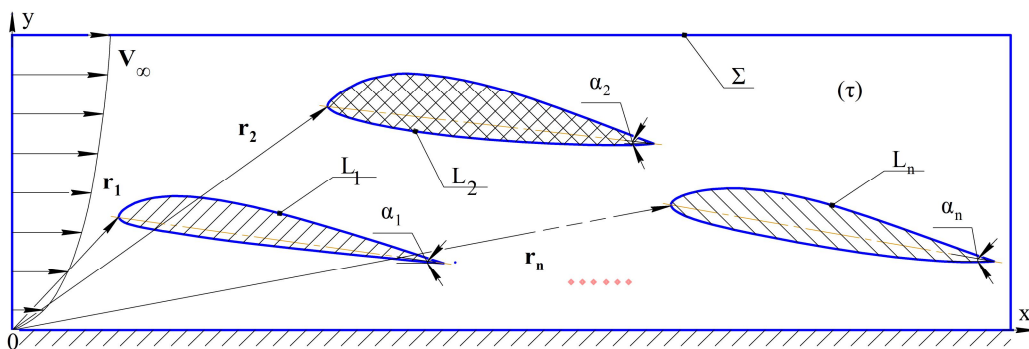


Рис. 1. Система телесных профилей в стационарном вязком потоке вблизи поверхности раздела, где  $L_1, L_2, \dots, L_n$  – границы профилей;  $\Sigma$  – граница контрольного объёма;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – углы атаки профилей;  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  – векторы положений профилей;  $\mathbf{V}_\infty(y)$  – вектор скорости набегающего потока

В дальнейшем основную задачу векторного анализа (1) целесообразно представить в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка [2, 4]:

$$\nabla(\nabla, \mathbf{V}) = \nabla q; \nabla(\nabla, \mathbf{\Omega}) = 0. \quad (2)$$

К сожалению, до настоящего времени не создан общий метод исследования и решения нелинейной дифференциальной системы законов сохранения в простейшем случае стационарного вязкого потока несжимаемой среды [2, 4]:

$$(\nabla, \mathbf{V}) = 0; \quad (3)$$

$$\left( \nabla, \left( \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I} \frac{p}{\rho} + \nu [\mathbf{I}, \mathbf{\Omega}] \right) \right) = 0, \quad (4)$$

где в плоском случае течения в декартовом базисе  $\mathbf{V} = i\mathbf{u} + j\mathbf{v}$  – вектор скорости потока среды;  $p$  – гидростатическое давление;  $\rho$  – плотность среды;  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – коэффициент кинематической вязкости, а  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

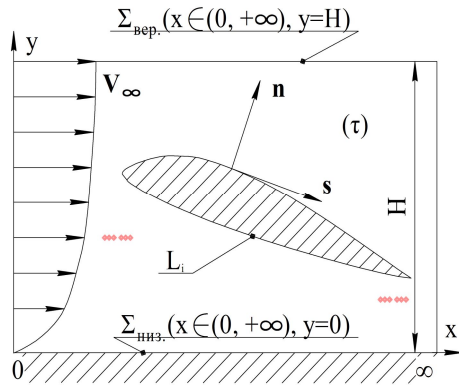


Рис. 2. Границы области течения вязкой среды

Искомые характеристики плоского обтекания: давление –  $p$  и завихренность –  $\omega$ , определяются граничными условиями для вектора скорости [4, 5]:

$$\mathbf{V}|_{L_i} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

и компонент скорости на границе  $\Sigma$ :

$$\mathbf{u}|_{\Sigma} = \begin{cases} u|_{x=0, y \in (0, H)} = -\frac{V_{\infty} y^2}{H^2} + \frac{2V_{\infty}}{H} y; \\ u|_{y=0, x \in (0, \infty)} = 0; \\ u|_{y=H, x \in (0, \infty)} = V_{\infty}; \end{cases} \quad (6)$$

$$v|_{\Sigma} = 0.$$

Тем не менее, современное развитие методов решения задач математической физики, основанных на методе граничных интегральных уравнений в применении к краевым задачам механики [3], и, в первую очередь, аэрогидродинамики [2], позволяют выходить на аналитические решения определённых классов нелинейных задач.

### 3. Интегральные представления решений задачи

Тензор  $\Gamma(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) = \mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{k}\psi]$ , где функции  $\varphi$  и  $\psi$  – решения уравнения Лапласа, являются консервативными:  $(\nabla, \Gamma) = 0$  и потенциальными:  $[\nabla, \Gamma] = 0$ . Особенно важно выделить тот факт, что тензор  $\Gamma$  является фундаментальным решением дифференциального оператора второго порядка в уравнениях (2) [2, 4]:

$$\nabla(\nabla, \Gamma) = \Delta \Gamma + [\nabla, [\nabla, \Gamma]] = \mathbf{I}\Delta \varphi. \quad (7)$$

Интегральные представления решений краевых задач математической физики для дифференциальных уравнений, в данном случае, второго порядка строятся путём интегрирования комбинации операторов в уравнениях (2, 7) для вектора скорости  $\mathbf{V}$  с необходимыми дифференциальными свойствами и тензора  $\Gamma$  по области  $(\tau)$  (рис. 1).

$$\mathbf{V} = \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) + ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{V}]], \Gamma) \right\} d\sigma - \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left( \mathbf{V}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma \quad (8)$$

и завихренности [5]:

$$\omega = 2 \oint_{\Sigma_{L_i+\Sigma}} \left( \left( \frac{\partial^* \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}}, \nabla \psi \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{s}}, \nabla \varphi \right) \right) d\sigma. \quad (9)$$

### 4. Дискретизация геометрических границ

Анализ методом граничных интегральных уравнений для решения плоских задач начинается с дискретизации исследуемой границы области (области задачи) и делении её на ячейки сетки, на которых физические величины считаем постоянными.

Аппроксимирующий полином одномерной ячейки для решения данной задачи [6]:

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i, \quad (10)$$

где  $N_1 = \frac{1-\xi}{2}$ ,  $N_2 = \frac{1+\xi}{2}$  – функции формы;  $\xi$  – координата локальной системы;  $x$  – координата глобальной системы;  $x_i$  – координата глобальной системы конечных точек каждой ячейки.

### 5. Алгебраические уравнения к численному решению задачи

Используя известные интегралы потенциалов простого и двойного слоя  $\int_L \varphi d\sigma$ ;  $\int_L \psi d\sigma$ ;  $\int_L \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} d\sigma$ , применяя (4), (8) и с учётом векторного потенциала за-

кона сохранения импульса [2], получаем линейные системы алгебраических уравнений для компонента скорости

$$\begin{aligned}
 u_{L_i} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\nu\rho} \sum_{k=1}^K p_k S_k^i + \sum_{k=1}^K \omega_k T_k^i \right) + \\
 &+ \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{\nu\rho} \sum_{m=1}^M p_m S_m^i + \sum_{m=1}^M \omega_m T_m^i \right) + \frac{3}{2} C_i; \\
 v_{L_i} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\rho\nu} \sum_{k=1}^K p_k T_k^i - \sum_{k=1}^K \omega_k W_k^i \right) + \\
 &+ \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{\nu\rho} \sum_{m=1}^M p_m T_m^i - \sum_{m=1}^M \omega_m W_m^i \right) + \frac{3}{2} D_i; \\
 u_{\Sigma_i} &= \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{\nu\rho} \sum_{k=1}^K p_k S_k^i + \sum_{k=1}^K \omega_k T_k^i \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\nu\rho} \sum_{m=1}^M p_m S_m^i + \sum_{m=1}^M \omega_m T_m^i \right) + \frac{1}{2} C_i; \\
 v_{\Sigma_i} &= \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{\rho\nu} \sum_{k=1}^K p_k T_k^i - \sum_{k=1}^K \omega_k W_k^i \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\nu\rho} \sum_{m=1}^M p_m T_m^i - \sum_{m=1}^M \omega_m W_m^i \right) + \frac{1}{2} D_i, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где  $K$  – число элементов на границе обтекаемых профилей ( $L$ );  $M$  – число элементов на границе контрольной области ( $\tau$ ); коэффициенты между конечными точками элементов  $a_j, b_j$ , получены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 C_i &= \sum_{m=M_2+1}^{M_3} R_m^i + \sum_{m=M_1+1}^{M_2} \left( R_m^i - \frac{1}{\nu} u_m^2 F_m^i \right) + \\
 &+ \sum_{m=M_3+1}^M \left( R_m^i + \frac{1}{\nu} u_m^2 F_m^i \right); \\
 D_i &= \sum_{m=M_2+1}^{M_3} Q_m^i + \sum_{m=M_1+1}^{M_2} \left( Q_m^i + \frac{1}{\nu} u_m^2 F_m^i \right) + \\
 &+ \sum_{m=M_3+1}^M \left( Q_m^i - \frac{1}{\nu} u_m^2 F_m^i \right); \\
 S_j^i &= n_{xj} F_j^i - n_{yj} G_j^i; \quad T_j^i = n_{yj} F_j^i - n_{xj} G_j^i;
 \end{aligned}$$

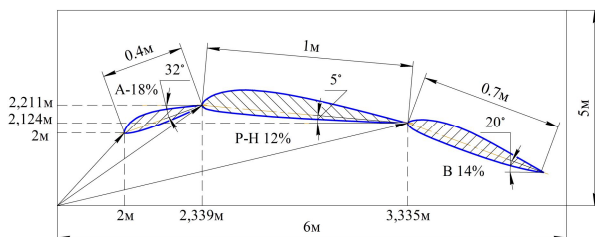


Рис. 3. Расположение системы телесных профилей «А-18%», «В-14%» и «РН-12%»

$$\begin{aligned}
 W_j^i &= n_{xj} F_j^i + n_{yj} G_j^i; \quad R_j^i = -\frac{u_j^2}{\nu} n_{xj} F_j^i + \frac{u_j^2}{\nu} n_{yj} G_j^i - u_j H_j^i; \\
 Q_j^i &= -\frac{u_j^2}{\nu} n_{yj} F_j^i + \frac{u_j^2}{\nu} n_{xj} G_j^i - u_j H_j^i; \\
 F_j^i &= \int_{a_j}^{b_j} \varphi d\sigma; \quad G_j^i = \int_{a_j}^{b_j} \psi d\sigma; \quad H_j^i = \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned}$$

### 6. Численное решение задачи

Используя функции «сплайн» для построения ячеек необходимых количеств на геометрических границах с целью повышения точности полученных результатов. Вместе граничные условия (5), (6), дискретизация (10) и алгебраические уравнения с нужными интегралами (11), получена система линейных уравнений

$$\{A\} \cdot \{x\} = \{b\}, \quad (12)$$

где  $\{A\}$  – матрица интегральных коэффициентов;  $\{x\}$  – столбец неизвестных значений из давлений  $p$  и завихреностей  $\omega$  в границах;  $\{b\}$  – столбец свободных элементов. Исходные данные примерного расчёта показаны в табл. 2, расположение профилей в контрольной области на рис. 3. Численные решения, полученные после решения системы линейных уравнений (12) с помощью программы «Matlab» [8], показаны на рис. 4–10.

Таблица 2

Исходные данные к примерному расчёту

Первый профиль	«А-18%»
Второй профиль	«В-14%»
Третий профиль	«РН-12%»
Скорости набегающего потока	60 м/с
Критерий Рейнольдса	1000
Длина контрольной области	6м
Высота контрольной области	6м
Количества ячеек на границе каждого профиля	60
Количества ячеек на границе контрольной области	120

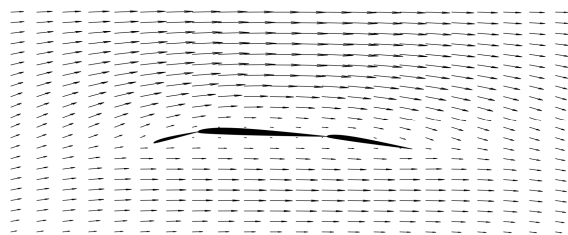


Рис. 4. Схема обтекания системы профилей воздушным потоком вязкой среды

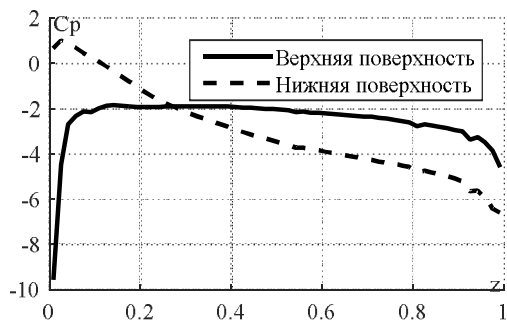


Рис. 5. Распределение давлений на границе первого профиля как предкрылок профиля

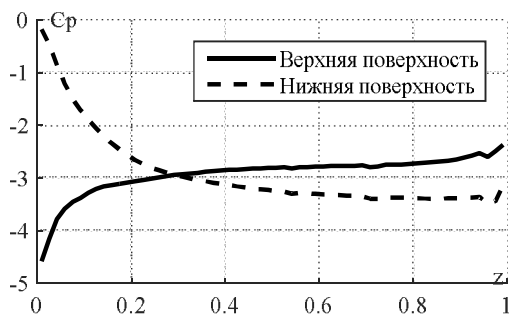


Рис. 6. Распределение давлений на границе второго профиля как профиль крыла

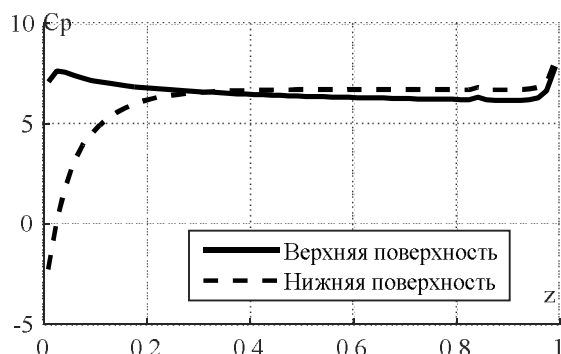


Рис. 7. Распределение давлений на границе третьего профиля как закрылок профиля крыла

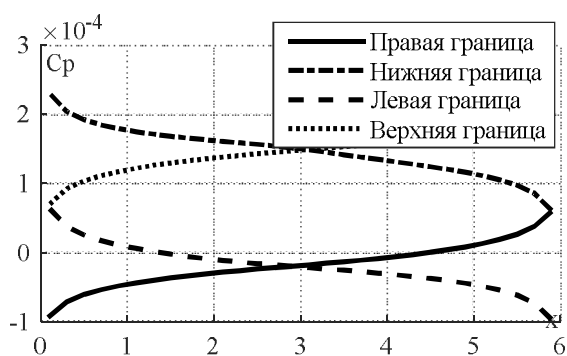


Рис. 8. Распределение давлений на границах контрольной области

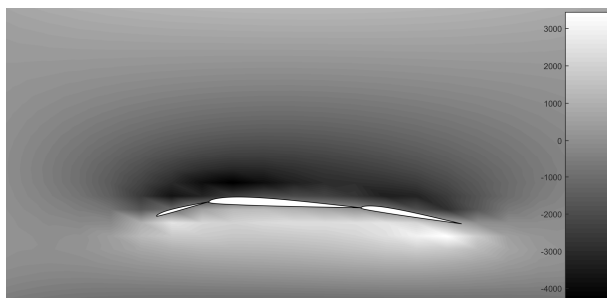


Рис. 9. Распределение завихренностей в контрольной области в  $1/c$

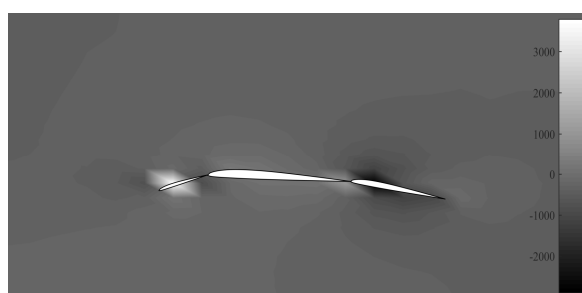


Рис. 10. Распределение давлений в контрольной области в Па

### Заключение

В работе представлены алгоритмические основы и результаты численной реализации метода граничных интегральных уравнений с целью определения распределенных аэродинамических характеристик системы телесных профилей в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Для этого создан пакет прикладных программ на базе развитого аппарата векторно-тензорного анализа, алгоритма дискретизации геометрических границ и вычисления интегралов типа потенциалов простого и двойного слоя, а также сингулярных в интегральных представлениях решений.

Полученные результаты в сравнении с данными экспериментами и данными других методов показали хорошее совпадение с допустимыми погрешностями.

Итак, вычислительная гидродинамика является отдельной дисциплиной [2], отличной от экспериментальной и теоретической гидродинамики и дополняющей их. Она имеет свои собственные методы, трудности и сферу приложения, открывая новые перспективы для изучения физических процессов.

## Литература

1. Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости [Текст] / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1970. – 288 с.
2. Крашаница, Ю. А. Теория обобщённых гидродинамических потенциалов и метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах гидродинамики [Текст] / Ю. А. Крашаница. – К. : Наук. думка, 2013. – 215 с.
3. Мазья, В. Г. Граничные интегральные уравнения. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления [Текст] / В. Г. Мазья // ВИНТИ. – 1988. – Т. 27. – С. 131–228.
4. Крашаница, Ю. А. Математическое моделирование обтекания несущих систем ограниченным потоком вязкой жидкости методом граничных интегральных уравнений [Текст] / Ю. А. Крашаница, Пен Юе // Евразийский союз учёных. – М., 2015. – № 4(13), Ч. 12. – С. 128–131.
5. Крашаница, Ю. А. Обобщённые операции векторно-тензорного анализа, интегральные представления решений плоских задач обтекания в ограниченном потоке вязкой среды [Текст] / Ю. А. Крашаница, Пен Юе // Вестник ХНТУ «ХПИ» : сб. науч. тр. – Вып. 3(50). – Х., 2014. – С. 316–321.
6. Логачев, И. Н. Аэродинамические основы аспирации [Текст] / И. Н. Логачев, К. И. Логачев. – С. : Химиздат, 2005. – 659 с.
7. Yang, D. Theory and application of the boundary element method [Text] / D. Yang. – Beijing : Publishing house of beijing institute of technology, 2002. – 314 p.
8. Vasilios, N. K. Matlab: a fundamental tool for scientific computing and engineering applications [Text] / N. K. Vasilios. – Croatia : InTech, 2012. – 1314 p.

Поступила в редакцию 05.06.2015, рассмотрена на редколлегии 17.06.2015

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. каф. А. В. Амброжевич, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

## АЕРОДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ ТІЛЕСНИХ ПРОФІЛІЙ ОБМЕЖЕНИМ ПОТОКОМ В'ЯЗКОГО СЕРЕДОВИЩА

*Юе Пен*

Сучасне чисельне рішення початково-крайових задач механіки суцільних середовищ базується на створенні адекватної математичної моделі і побудові розрахункових методів на геометричній формі. Дана стаття присвячена комплексному дослідженню створення системи алгебраїчних рівнянь на базі узагальнених потенціалів, оригінального апарату векторно-тензорного аналізу і систематичного застосування методу граничних інтегральних рівнянь. Представлено результати обчислювального експерименту визначення розподілених аеродинамічних характеристик (тисків і завихрення) при обтіканні системи тілесних профілів обмеженим потоком в'язкої нестисливої рідини в контрольній області і на кожен профіль, розташований поблизу поверхні розділу.

**Ключові слова:** аеродинамічні характеристики, системи тілесних профілів, алгебраїчні рівняння, дискретизація геометричних границь, схема ілюстрування течії повітряних потоків.

## AERODYNAMIC CHARACTERISTICS SYSTEM, CORPORAL PROFILE FLOW RESTRICTION VISCOUS MEDIA

*Yue Peng*

Modern numerical solution of initial value problems of continuum mechanics is based on the creation of an adequate mathematical models and computational methods for constructing a geometric shape. This article is devoted to the complex study of the creation of a system of algebraic equations based on the generalized potential of the original unit vector-tensor analysis and systematic application of the method of boundary integral equations. The results of computational experiments determining the distributed aerodynamic characteristics (pressure and swirls) in the flow of bodily profiles limited flow of viscous incompressible fluid in the control area and for each profile, located near the interface.

**Key words:** aerodynamic characteristics of physical profiles, algebraic equations, geometric sampling boundaries, the diagram illustrating the flow of air streams.

**Юе Пен** – аспирант каф. аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.