УДК 539.376

Ю. М. КОБЗАРЬ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины

К ОЦЕНКЕ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ГЛАДКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ОДНООСНОМ СИММЕТРИЧНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Предложена модель усталости, в основу которой положено уменьшение несущей массы вещества в полуцикле сжатия и увеличение плотности в полуцикле растяжения. Среднее напряжение и объемная деформация связаны линейной зависимостью Гука. Аналитическим путем для каждого цикла получены изменения массы и плотности, а также изменения напряжений, в зависимости от упругих свойств стержня, его начальных массы, плотности и объема. Пределы применимости модели ограничиваются циклом, при котором амплитудные значение напряжений достигают предела упругости. Предложенный алгоритм модели реализовано в программной среде, с помощью которой можно определять усталостное разрушение и предел усталости. Полученные расчетные значения кривой отличаются от кривой усталости исследуемого серого чугуна. Это связано с тем, что в модели не заложено рассеивание приложенной энергии на внутреннее трение и нагрев.

Ключевые слова: *симметричное растяжение-сжатие, модель усталости, предел усталости, критерий усталостного разрушения.*

Введение

Усталость материалов проявляется под действием периодических нагрузок в деталях механизмов и машин, находящихся в длительной эксплуатации. Модели усталости для гладких образцов, даже в случае простых симметричных периодических нагрузок, не предложены. Существующие расчетные схемы используют аппроксимирующие выражения, параметры которых заимствованы из экспериментов на усталость. В основном они описывают стадию, когда появляется видимая магистральная трещина или концентратор напряжения присутствует изначально. В основе расчетных схем лежат зависимости скорости продвижения фронта трещины в виде степенного одночлена, как в зависимости Париса или неизвестной функции многих переменных в других схемах. Но все эти неизвестные функции и входящие параметры определяются из экспериментов на усталость.

Существует модель усталости, в которой перед движущимся фронтом макротрещины учитывается влияние повреждений на всех стадиях разрушения. Это позволило найти длительность инкубационного периода, скорость продвижения макротрещины и время разрушения тела [1].

В настоящей работе предлагается для хрупких материалов простая модель усталости стержня под действием мягкого симметричного нагружения в виде растяжение-сжатие, когда возникающие амплитудные напряжения меньше предела пропорциональности. Критерием усталостного разрушения стержня принимается, при полуцикле растяжения и полуцикле сжатия, достижение напряжением величины предела прочности. На цикле, в котором напряжения станут равными пределу прочности или достигается база испытаний, расчеты прекращаются.

Подобные подходы использовались и были предложены в моделях хрупкого разрушения стержней в процессе ползучести при статических растяжениях и сжатиях [2, 3].

1. Постановка задачи

Пусть на стержень длиной l_0, площадью начального сечения F_0, длительное время действует симметричная периодическая растягивающе-сжимающая нагрузка $P(i)$ с амплитудным значением P_a меньшая критической нагрузки $P_{кр}(t)$, приложенная на торцах образца при неизменной температуре θ. Предполагается, что $\frac{P_a}{F_0} = \sigma_0 \le \sigma_{пц}$, где $\sigma_{пц}$ - предел пропорциональности.

В каждый j-й полуцикл i-го цикла, возникающие растягивающе-сжимающие напряжения $\sigma_j(i)$ определяются соотношением

$$\sigma_j(i) = \sigma_{aj}(i)\sin\omega t\,, \qquad (1.1)$$

где $\sigma_{aj}(i) = P_{aj} / F_{aj}(i)$;

$F_{aj}(i)$ – амплитудное значение поперечного сечения стержня на каждом j-м полуцикле i-го цикла;

P_a – амплитудная величина нагрузки.

В каждом цикле упруго деформированный изотропный стержень объемом V находится в стадии сжатия в первом ($j=1$) полуцикле i-го цикла и в стадии растяжения во втором ($j=2$) полуцикле этого цикла. В процессе сжатия происходит приращение объема микротрещин за счет увеличения пространства между зерен. Новые объемы образовываются, при разрыве на части зерен и кристаллов, составляющих зерна. Поэтому суммарный объем ΔV (вначале $t=0$, объем принят равным нулю) микротрещин внутри стержня растет и вызывает изменение малых упругих деформаций. При сжатии также имеет место уменьшение общей несущей массы стержня, которая является суммой непересекающихся связанных локальных несущих масс. Под локальной несущей массой подразумевается максимальная часть всей несущей массы образца любого вида в сечении толщиной Δh, отсутствие которой в данный момент времени в этом сечении, приведет к дефрагментации образца под действием приложенной нагрузки, т.е. к его разрушению как целого. Такое уменьшение несущей массы происходит внутри за счет деления стержня на части, потерявшие с ним непрерывный контакт. Эти части образовываются путем выкалывания, крошения, несогласованности проскальзывания, проворачивания (вследствие потери устойчивости) зерен, но остаются в пространстве трещин, которое произрастает между стыками зерен, внутри зерен и в разделенных кристаллах. Общая несущая масса уменьшается как на внутреннюю, так и на внешнюю часть, которая отделяется от внешней границы тела.

В процессе растяжения, как и при сжатии, происходит приращение объема микротрещин, но за счет слияния пор при диффузии вакансий из тела зерна к его границам. Причиной образования точечных дефектов (вакансий) являются движения дислокаций. На границах зерен в результате слияния пор образуются микротрещины, вследствие чего также растет суммарный объем микротрещин ΔV внутри стержня, часть трещин выклинивается на поверхность.

При малых деформациях стержня зависимость деформаций от напряжений при одноосном сжатии-растяжении в пределах упругости описывается зависимостью среднего напряжения σ_{cp} от объемной деформации ε_V

$$\sigma_{cpj}(i) = \frac{E}{3(1-2\mu)}\varepsilon_{Vj}(i)\,, \qquad (1.2)$$

где μ – коэффициент Пуассона;

E – модуль упругости.

Полученная стержнем энергия не рассеивается на пластическое деформирование и тепловой нагрев.

2. Модель усталостного разрушения

Объемная деформация ползучести $\varepsilon_{Vj}(i)$ связана с продольной линейной деформацией ползучести $\varepsilon_{xj}(i)$ при сжатии или растяжении соотношением

$$\varepsilon_{Vj}(i) = (1-2\mu)\varepsilon_{xj}(i)\,. \qquad (2.1)$$

Пусть в начальный момент времени $t=0$, стержень имеет массу m_0, объем $V_0 = F_0 l_0$ и плотность ρ_0. Рассмотрим рекуррентный процесс накопления усталости на каждом цикле.

2.1. Сжатие $j=1$, $i=1$

Под действием сжимающей нагрузки (1.1) в первом полуцикле $j=1$ первого цикла $i=1$ стержень упруго деформирован. В процессе сжатия прутка в любом цикле полагается, что изменяются его общая несущая масса и объем, но сохраняется плотность. При этом плотность $\rho_1(1)$ в этой части цикла считаем равной начальной плотности

$$\rho_0 = \rho_1(1)\,. \qquad (2.2)$$

Подобное предположение выполняется для всего процесса циклического нагружения относительно плотности. Для произвольных двух ближайших циклов, $i-1$-го в полуцикле растяжения $j=2$ и i-го в полуцикле сжатия $j=1$, искомая плотность $\rho_2(i-1)$ в предыдущем цикле равна плотности $\rho_1(i)$ последующего цикла, т.е.

$$\rho_2(i-1) = \rho_1(i)\,. \qquad (2.3)$$

Начальное состояние стержня и состояние при первом полуцикле сжатии $j=1$ в первом цикле $i=1$ связывают равенства

$$1 = \frac{\rho_0 V_0}{m_0} = \frac{\rho_1(1)V_1(1)}{m_1(1)} = \frac{\rho_0(V_0 - \Delta V_1(1))}{m_1(1)}\,, \qquad (2.4)$$

где $m_1(1)$ – несущая масса стержня;

$V_1(1)$ – занимаемый объем и приращение $\Delta V_1(1) = V_0 - V_1(1)$ объема.

Зависимость между текущей несущей массой $m_1(1)$ и объемной деформацией $\varepsilon_{V1}(1)$ этого цикла получается из равенств (2.2), (2.4) и будет

$$\frac{m_1(1)}{m_0} = 1 - \varepsilon_{V1}(1). \qquad (2.5)$$

Заменив площади сечения стержня, начальную, $F_0 = \dfrac{P_a}{\sigma_{xa0}}$ и измененную $F_1(1) = \dfrac{P_a}{\sigma_{xa1}(1)}$ в полуцикле сжатия их зависимостями от нагрузки и напряжения в соответствующих частях равенств (2.4), следует, что

$$\frac{1}{P_a} = \frac{l_0}{m_0\sigma_{xa0}} = \frac{l_1(1)}{m_1(1)\sigma_{xa1}(1)};$$

$$l_1(1)/l_0 = 1 + \varepsilon_{x1}(1). \qquad (2.6)$$

Ввиду равенств (2.6), зависимость между напряжениями приобретает вид

$$\sigma_{xa1}(1) = (1 + \varepsilon_{x1}(1))\frac{m_0}{m_1(1)}\sigma_{xa0}. \qquad (2.7)$$

Линейную деформацию ползучести ε_{x1} и отношение масс $m_1(1)/m_0$ связывает равенство

$$\varepsilon_{x1}(1) = \frac{1}{1-2\mu}\left(1 - \frac{m_1(1)}{m_0}\right), \qquad (2.8)$$

полученное из (2.1) и (2.5).

Соотношение (2.7), после замены сомножителя $1 + \varepsilon_{x1}(1)$ с учетом (2.8), представляется равенством

$$\sigma_{xa1}(1) = \left(\frac{m_0}{m_1(1)}\left(1 + \frac{1}{1-2\mu}\right) - \frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa0}. \qquad (2.9)$$

Среднее напряжение для произвольного j-го полуцикла ($j=1$ – сжатие, $j=2$ – растяжение) любого i-го цикла можно также представить в виде

$$\sigma_{\text{сер}\,j}(i) = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xaj}(i)\left(1 - \frac{4\mu G}{E}\right) + 2\lambda\varepsilon_{Vj}(i)\right), \qquad (2.10)$$

где $\lambda = \dfrac{2\mu G}{1-2\mu}$.

Используем соотношения (2.5), (2.9) в (2.10) в результате получим

$$\sigma_{\text{сер}} = \frac{1}{3}\left(\left(1 - \frac{4\mu G}{E}\right)\left(\frac{m_0}{m_1(1)}\left(1 + \frac{1}{1-2\mu}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa0} + 2\lambda\left(1 - \frac{m_1(1)}{m_0}\right)\right). \qquad (2.11)$$

С другой стороны среднее напряжение и отношения масс связаны посредством

$$\sigma_{\text{сер}} = K\left(1 - \frac{m_1(1)}{m_0}\right), \qquad (2.12)$$

где K – коэффициент объемного расширения.

Исключив из (2.11) и (2.12) среднее напряжение получим уравнение

$$E\left(\frac{m_1(1)}{m_0}\right)^2 - (E + \sigma_{xa0})\frac{m_1(1)}{m_0} + 2(1-\mu)\sigma_{xa0} = 0, \qquad (2.13)$$

из которого находим нормированное соотношение масс $m_1(1)/m_0$, которое позволяет из (2.9) определить амплитудное напряжение $\sigma_{xa1}(1)$. Плотность (2.2) на этом полуцикле первого цикла по предположению не изменялась.

2.2. Растяжение $j=2$, $i=1$

Во втором полуцикле $j=2$ первого цикла $i=1$, когда происходит растяжение, полагаем, что масса в нем не изменяется и равна массе $m_1(1)$, найденной в первом полуцикле сжатия этого цикла

$$m_1(1) = m_2(1), \qquad (2.14)$$

а для плотностей выполняется (2.2).

Это предположение, относительно массы, в процессе усталости выполняется для полуциклов произвольного цикла

$$m_1(i) = m_2(i). \qquad (2.15)$$

Во втором полуцикле состояние стержня связано с его предыдущими состояниями, начальным, и в первом полуцикле этого цикла равенствами

$$1 = \frac{\rho_0 V_1(1)}{m_1(1)} = \frac{\rho_2(1)V_2(1)}{m_2(1)} =$$

$$= \frac{\rho_2(1)(V_1(1) - \Delta V_2(1))}{m_2(1)}, \qquad (2.16)$$

где $\rho_2(1)$ – истинная плотность и $V_2(1)$ – объем стержня во время второго полуцикла первого цикла. Зависимость между истинной плотностью этого полуцикла $\rho_2(1)$ и объемной деформацией $\varepsilon_{V2}(1)$ получается из равенств (2.16) и будет

$$\frac{\rho_0}{\rho_2(1)} = 1 - \varepsilon_{V2}(1). \qquad (2.17)$$

После замены соответствующих площадей сечения стержня соотношениями $F_1(1) = \dfrac{P_a}{\sigma_{xa1}(1)}$ в первом полуцикле сжатия и измененной $F_2(1) = \dfrac{P_a}{\sigma_{xa2}(1)}$ во втором полуцикле растяжения в соответствующих частях равенств (2.16), следует, что

$$\frac{m_1(1)}{P_a} = \frac{\rho_0 l_1(1)}{\sigma_{xa1}(1)} = \frac{\rho_2(1)l_2(1)}{\sigma_{xa2}(1)};$$

$$\frac{l_2(1)}{l_1(1)} = 1 + \varepsilon_{x2}(1). \qquad (2.18)$$

Ввиду равенств (2.18), зависимость между напряжениями $\sigma_{xa1}(1)$ и $\sigma_{xa2}(1)$, соответственно первого и второго полуциклов первого цикла, приобретает вид

$$\sigma_{xa2}(1) = (1 + \varepsilon_{x2}(1))\frac{\rho_2(1)}{\rho_0}\sigma_{xa1}(1). \quad (2.19)$$

Линейную деформацию ползучести ε_{x2} и отношение плотностей $\rho_0/\rho_1(1)$ связывает равенство

$$\varepsilon_{x2}(1) = \frac{1}{1-2\mu}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2(1)}\right), \quad (2.20)$$

полученное из (2.1) и (2.17).

Зависимость (2.19), когда сомножитель $1+\varepsilon_{x2}(1)$ заменен в соответствии с (2.20), представляется равенством

$$\sigma_{xa2}(1) = \left(\frac{\rho_2(1)}{\rho_0}\left(1 + \frac{1}{1-2\mu}\right) - \frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa1}(1), \quad (2.21)$$

где $\rho_2(1)$ – истинная плотность стержня при растяжении во втором полуцикле первого цикла.

Зависимость (2.10) можно представить для полуцикла растяжения $j=2$ первого цикла $i=1$ в виде

$$\sigma_{cep2}(1) = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xa2}(1)\left(1 - \frac{4\mu G}{E}\right) + 2\lambda\varepsilon_2(1)\right). \quad (2.22)$$

Используем соотношения (2.17), (2.21) в (2.22) в результате получим

$$\sigma_{cep2}(1) = \frac{1}{3}\left(\left(1 - \frac{4\mu G}{E}\right)\left(\frac{\rho_2(1)}{\rho_0}\left(1 + \frac{1}{1-2\mu}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa1}(1) + 2\lambda\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2(1)}\right)\right). \quad (2.23)$$

С другой стороны среднее напряжение и отношения плотностей связаны посредством

$$\sigma_{cp2}(1) = K\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2(1)}\right). \quad (2.24)$$

Исключив из (2.23) и (2.24) среднее напряжение, получим уравнение

$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(1)\left(\frac{\rho_2(1)}{\rho_0}\right)^2 -$$

$$-(E + \sigma_{xa1}(1))\frac{\rho_2(1)}{\rho_0} + E = 0, \quad (2.25)$$

из которого находим нормированное отношение плотностей $\rho_2(1)/\rho_0$, которое позволяет из (2.21) определить амплитудное напряжение $\sigma_{xa2}(1)$. Масса (2.14) на этом полуцикле растяжения ($j=2$) первого цикла по предположению не изменялась.

2.3. Сжатие $j=1$, $i=2$

В первом полуцикле $j=1$ сжатия второго цикла $i=2$ полагаем, что плотность в этой части цикла $\rho_1(2)$ равна плотности найденной в первом цикле

$$\rho_2(1) = \rho_1(2), \quad (2.26)$$

а для масс выполняется (2.15).

В первом полуцикле второго цикла стержень находится в состоянии сжатия и с первым циклом его связывают равенства

$$1 = \frac{\rho_2(1)V_2(1)}{m_2(1)} = \frac{\rho_1(2)V_1(2)}{m_1(2)} =$$

$$= \frac{\rho_1(2)(V_2(1) - \Delta V_1(2))}{m_1(2)}, \quad (2.27)$$

где $m_1(2)$ – несущая масса стержня;

$V_1(2)$ – занимаемый объем, приобретаемый стержнем во время первого полуцикла второго цикла.

Зависимость между несущей массой этого цикла $m_1(2)$ и объемной деформацией $\varepsilon_{V1}(2)$ получается из равенств (2.27) и будет

$$\frac{m_1(2)}{m_2(1)} = 1 - \varepsilon_{V1}(2). \quad (2.28)$$

После замены соответствующих площадей сечения стержня соотношениями $F_2(1) = \dfrac{P_a}{\sigma_{xa2}(1)}$ во втором полуцикле растяжения первого цикла и измененной $F_1(2) = \dfrac{P_a}{\sigma_{xa1}(2)}$ в первом полуцикле сжатия второго цикла в соответствующих частях равенств (2.27) их значениями через амплитудные значения приложенных усилий и напряжений, следует, что

$$\frac{1}{\rho_2(1)P_a} = \frac{l_2(1)}{m_1(1)\sigma_{xa2}(1)} = \frac{l_1(2)}{m_1(2)\sigma_{xa1}(2)};$$

$$\frac{l_1(2)}{l_2(1)} = 1 + \varepsilon_{xa1}(2). \quad (2.29)$$

Ввиду равенств (2.29), зависимость между напряжениями $\sigma_{xa1}(2)$ и $\sigma_{xa2}(1)$, соответственно первого полуцикла второго цикла и второго полуцикла первого цикла, приобретает вид

$$\sigma_{xa1}(2) = (1 + \varepsilon_{xa1}(2))\frac{m_1(1)}{m_1(2)}\sigma_{xa2}(1). \quad (2.30)$$

Линейную деформацию ползучести $\varepsilon_{xa1}(2)$ и отношение масс $m_1(2)/m_1(1)$ связывает равенство

$$\varepsilon_{xa1}(2) = \frac{1}{1-2\mu}\left(1 - \frac{m_1(2)}{m_1(1)}\right), \quad (2.31)$$

полученное из (2.1) и (2.28).

Зависимость (2.30), где деформация $\varepsilon_{xa1}(2)$ заменена в соответствии с (2.31), представляется равенством

$$\sigma_{xa1}(2)=\left(\frac{m_1(1)}{m_1(2)}\left(1+\frac{1}{1-2\mu}\right)-\frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa2}(1), \quad (2.32)$$

где $m_1(2)$ – несущая масса стержня при сжатии в первом полуцикле второго цикла.

Зависимость (2.10) можно представить для полуцикла сжатия $j=1$ второго цикла $i=2$ в виде

$$\sigma_{cep1}(2)=\frac{1}{3}\left(\sigma_{xa1}(2)\left(1-\frac{4\mu G}{E}\right)+2\lambda\varepsilon_{V1}(2)\right). \quad (2.33)$$

Используем соотношения (2.28), (2.32) в (2.33) в результате получим

$$\sigma_{cep1}(2)=\frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{4\mu G}{E}\right)\left(\frac{m_1(1)}{m_1(2)}\left(1+\frac{1}{1-2\mu}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa2}(1)+2\lambda\left(1-\frac{m_1(2)}{m_1(1)}\right)\right). \quad (2.34)$$

С другой стороны среднее напряжение и отношения масс связаны посредством

$$\sigma_{cep1}(2)=K\left(1-\frac{m_1(2)}{m_1(1)}\right). \quad (2.35)$$

Исключив из (2.34) и (2.35) среднее напряжение, получим уравнение

$$E\left(\frac{m_1(2)}{m_1(1)}\right)^2-\left(E+\sigma_{xa2}(1)\right)\frac{m_1(2)}{m_1(1)}+$$
$$+2(1-\mu)\sigma_{xa2}(1)=0, \quad (2.36)$$

из которого находим соотношение масс $m_1(2)/m_1(1)$, которое позволяет из (2.32) определить амплитудное напряжение $\sigma_{xa1}(2)$. Плотность (2.2) на этом полуцикле второго цикла по предположению не изменялась и совпадает с плотностью определенной на предыдущем цикле при полуцикле растяжения.

2.4. Растяжение $j=2$, $i=2$

Во втором полуцикле $j=2$ второго цикла $i=2$, когда происходит растяжение, полагаем, что масса в нем не изменяется и равна массе $m_1(2)$, найденной в первом полуцикле сжатия этого цикла

$$m_1(2)=m_2(2). \quad (2.37)$$

Во втором полуцикле второго цикла стержень находится в состоянии растяжения и с начальным состоянием, и первым полуциклом этого цикла его связывают равенства

$$1=\frac{\rho_1(2)V_1(2)}{m_1(2)}=\frac{\rho_2(2)V_2(2)}{m_2(2)}=$$
$$=\frac{\rho_2(1)(V_1(2)-\Delta V_2(2))}{m_1(2)}, \quad (2.38)$$

где $\rho_2(2)$ – истинная плотность и $V_2(2)$ – объем стержня, которые следует определить. Зависимость между истинной плотностью этого полуцикла $\rho_2(2)$ и объемной деформацией $\varepsilon_{V2}(2)$ получается из равенств (2.38) и будет

$$\frac{\rho_2(1)}{\rho_2(2)}=1-\varepsilon_{V2}(2). \quad (2.39)$$

После замены соответствующих площадей сечения стержня соотношениями $F_1(2)=\frac{P_a}{\sigma_{xa1}(2)}$ в первом полуцикле сжатия и измененной $F_2(2)=\frac{P_a}{\sigma_{xa2}(2)}$ во втором полуцикле растяжения в соответствующих частях равенств (2.16), следует, что

$$\frac{m_1(2)}{P_a}=\frac{\rho_2(1)l_1(2)}{\sigma_{xa1}(2)}=\frac{\rho_2(2)l_2(2)}{\sigma_{xa2}(2)};$$
$$\frac{l_2(2)}{l_1(2)}=1+\varepsilon_{x2}(2). \quad (2.40)$$

Ввиду равенств (2.40), зависимость между напряжениями $\sigma_{xa1}(2)$ и $\sigma_{xa2}(2)$, соответственно первого и второго полуциклов первого цикла, приобретает вид

$$\sigma_{xa2}(2)=(1+\varepsilon_{x2}(2))\frac{\rho_2(2)}{\rho_2(1)}\sigma_{xa1}(2). \quad (2.41)$$

Линейную деформацию ползучести $\varepsilon_{x2}(2)$ и отношение плотностей $\rho_0/\rho_1(1)$ связывает равенство

$$\varepsilon_{x2}(1)=\frac{1}{1-2\mu}\left(1-\frac{\rho_2(1)}{\rho_2(2)}\right), \quad (2.42)$$

полученное из (2.1) и (2.39).

Зависимость (2.41), когда деформация $\varepsilon_{x2}(2)$ заменена в соответствии с (2.42), представляется равенством

$$\sigma_{xa2}(2)=\left(\frac{\rho_2(2)}{\rho_2(1)}\left(1+\frac{1}{1-2\mu}\right)-\frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa1}(2), \quad (2.43)$$

где $\rho_2(2)$ неизвестная истинная плотность стержня при растяжении во втором полуцикле второго цикла.

Зависимость (2.10) можно представить для этого случая растяжения в виде

$$\sigma_{cep2}(2)=\frac{1}{3}\left(\sigma_{xa2}(2)\left(1-\frac{4\mu G}{E}\right)+2\lambda\varepsilon_{V2}(2)\right). \quad (2.44)$$

Используем соотношения (2.39), (2.43) в (2.44) в результате получим

$$\sigma_{\text{сер}2}(2)=\frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{4\mu G}{E}\right)\left(\frac{\rho_2(2)}{\rho_2(1)}\left(1-\frac{1}{1-2\mu}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa1}(2)+2\lambda\left(\frac{\rho_2(1)}{\rho_2(2)}-1\right)\Bigg). \quad (2.45)$$

С другой стороны среднее напряжение и отношения плотностей связаны посредством

$$\sigma_{\text{ср}2}(2)=K\left(1-\frac{\rho_2(1)}{\rho_2(2)}\right). \quad (2.46)$$

Исключив из (2.45) и (2.46) среднее напряжение, получим уравнение

$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(2)\left(\frac{\rho_2(2)}{\rho_2(1)}\right)^2-$$

$$-(E+\sigma_{xa1}(2))\frac{\rho_2(2)}{\rho_2(1)}+E=0\,, \quad (2.47)$$

из которого находим соотношение плотностей $\rho_2(2)/\rho_2(1)$, которое позволяет из (2.43) определить амплитудное напряжение $\sigma_{xa2}(2)$. Масса (2.37) на этом полуцикле $j=2$ второго цикла по предположению не изменялась.

Такие же рекуррентные расчеты производятся для каждого из последующих циклов и для произвольных $i-1$-го и i-го циклов процедура вычисления несущей массы, истинных плотностей, напряжений, их связей будет следующей.

2.5. Сжатие $j=1$ в произвольном i-м цикле

В первом полуцикле $j=1$ сжатия i-го цикла полагаем, что плотность в этой части цикла $\rho_1(i)$ равна плотности найденной в предыдущем $i-1$-м цикле

$$\rho_2(i-1)=\rho_1(i)\,, \quad (2.48)$$

а для масс выполняется

$$m_1(i-1)=m_2(i-1)\,. \quad (2.49)$$

В целом, состояния стержня в $i-1$-м и i-м циклах связывают равенства

$$1=\frac{\rho_2(i-1)V_2(i-1)}{m_2(i-1)}=\frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)}=$$

$$=\frac{\rho_1(i)(V_2(i-1)-\Delta V_1(i))}{m_1(i)}\,, \quad (2.50)$$

где $m_1(i)$ – несущая масса и $V_1(i)$ – объем стержня во время первого полуцикла i-го цикла. Зависимость между несущей массой этого цикла $m_1(i)$ и объемной деформацией $\varepsilon_{V1}(i)$ получается из равенств (2.50) и будет

$$\frac{m_1(i)}{m_2(i-1)}=1-\varepsilon_{V1}(i)\,. \quad (2.51)$$

После замены площадей сечения стержня соотношением $F_2(i-1)=\dfrac{P_a}{\sigma_{xa2}(i-1)}$ во втором полуцикле растяжения $i-1$-го цикла и соотношением $F_1(i)=\dfrac{P_a}{\sigma_{xa1}(i)}$ в первом полуцикле сжатия i-го цикла в соответствующих частях равенств (2.51) амплитудными значениями усилий и напряжений, следует, что

$$\frac{1}{\rho_2(i-1)P_a}=\frac{l_2(i-1)}{m_1(i-1)\sigma_{xa2}(i-1)}=\frac{l_1(i)}{m_1(i)\sigma_{xa1}(i)}\,;$$

$$\frac{l_1(i)}{l_2(i-1)}=1+\varepsilon_{xa1}(i)\,. \quad (2.52)$$

Ввиду равенств (2.52), зависимость между напряжениями $\sigma_{xa1}(i)$ и $\sigma_{xa2}(i-1)$, соответственно первого полуцикла i-го цикла и второго полуцикла $i-1$-го цикла, приобретает вид

$$\sigma_{xa1}(i)=(1+\varepsilon_{xa1}(i))\frac{m_1(i-1)}{m_1(i)}\sigma_{xa2}(i-1)\,. \quad (2.53)$$

Линейную деформацию ползучести $\varepsilon_{xa1}(i)$ и отношение масс $m_1(i)/m_1(i-1)$ связывает равенство

$$\varepsilon_{xa1}(i)=\frac{1}{1-2\mu}\left(1-\frac{m_1(i)}{m_1(i-1)}\right), \quad (2.54)$$

полученное из (2.1) и (2.51).

Зависимость (2.53), где деформация $\varepsilon_{xa1}(i)$ заменена в соответствии с (2.54), представляется равенством

$$\sigma_{xa1}(i)=\left(\frac{m_1(i-1)}{m_1(i)}\left(1+\frac{1}{1-2\mu}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa2}(i-1)\,, \quad (2.55)$$

где $m_1(i)$ – несущая масса стержня при сжатии в первом полуцикле i-го цикла.

Зависимость (2.10) можно представить для полуцикла сжатия $j=1$, i-го цикла в виде

$$\sigma_{\text{ср}1}(i)=\frac{1}{3}\left(\sigma_{xa1}(i)\left(1-\frac{4\mu G}{E}\right)+2\lambda\varepsilon_{V1}(i)\right). \quad 2.56)$$

Используем соотношения (2.54), (2.55) в (2.56) в результате получим

$$\sigma_{\text{ср}1}(i)=\frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{4\mu G}{E}\right)\left(\frac{m_1(i-1)}{m_1(i)}\left(1+\frac{1}{1-2\mu}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa2}(i-1)+2\lambda\left(1-\frac{m_1(i)}{m_1(i-1)}\right)\Bigg). \quad (2.57)$$

С другой стороны среднее напряжение и отношения масс связаны посредством

$$\sigma_{cp1}(i) = K\left(1 - \frac{m_1(i)}{m_1(i-1)}\right). \qquad (2.58)$$

Исключив из (2.57) и (2.58) среднее напряжение, получим уравнение

$$E\left(\frac{m_1(i)}{m_1(i-1)}\right)^2 - \left(E + \sigma_{xa2}(i-1)\right)\frac{m_1(2)}{m_1(1)} +$$
$$+2(1-\mu)\sigma_{xa2}(i-1) = 0, \qquad (2.59)$$

из которого находим соотношение масс $m_1(i)/m_1(i-1)$, которое позволяет из (2.32) определить амплитудное напряжение $\sigma_{xa1}(i)$. Плотность (2.49) на этом полуцикле i-го цикла по предположению не изменялась и совпадает с плотностью определенной на предыдущем $i-1$-м цикле при полуцикле $j=2$ растяжения.

2.6. Растяжение $j = 2$ в произвольном i-м цикле

Во втором $j=2$ полуцикле i-го цикла, когда происходит растяжение, полагаем, что масса в нем не изменяется и равна массе $m_1(i)$ найденной в первом полуцикле сжатия этого цикла

$$m_1(i) = m_2(i), \qquad (2.60)$$

а для плотностей выполняется

$$\rho_1(i) = \rho_2(i-1). \qquad (2.61)$$

Состояние стержня в первом и втором полуцикле i-го цикла связывают равенства

$$1 = \frac{\rho_1(i)V_1(i)}{m_1(i)} = \frac{\rho_2(i)V_2(i)}{m_2(i)} =$$
$$= \frac{\rho_2(i)(V_1(i) - \Delta V_2(i))}{m_2(i)}, \qquad (2.62)$$

где $\rho_2(i)$ – истинная плотность и $V_2(i)$ – объем стержня, которые требуется определить. Зависимость между истинной плотностью этого полуцикла $\rho_2(i)$ и объемной деформацией $\varepsilon_{V2}(i)$ получается из равенств (2.62) и будет

$$\frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)} = 1 - \varepsilon_{V2}(i). \qquad (2.63)$$

После замены соответствующих площадей сечения стержня соотношениями $F_1(i) = \dfrac{P_a}{\sigma_{xa1}(i)}$ в первом полуцикле сжатия и $F_2(i) = \dfrac{P_a}{\sigma_{xa2}(i)}$ во втором полуцикле растяжения в соответствующих частях равенств (2.62), следует, что

$$\frac{m_1(i)}{P_a} = \frac{\rho_1(i)l_1(i)}{\sigma_{xa1}(i)} = \frac{\rho_2(i)l_2(i)}{\sigma_{xa2}(i)};$$

$$\frac{l_2(i)}{l_1(i)} = 1 + \varepsilon_{x2}(i). \qquad (2.64)$$

Ввиду равенств (2.64), зависимость между напряжениями $\sigma_{xa1}(i)$ и $\sigma_{xa2}(i)$, соответственно первого и второго полуциклов i-го цикла, приобретает вид

$$\sigma_{xa2}(i) = (1 + \varepsilon_{x2}(i))\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)}\sigma_{xa1}(i). \qquad (2.65)$$

Линейную деформацию ползучести $\varepsilon_{x2}(i)$ и отношение плотностей $\rho_2(i-1)/\rho_2(i)$ связывает равенство

$$\varepsilon_{x2}(i-1) = \frac{1}{1-2\mu}\left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)}\right), \qquad (2.66)$$

полученное из (2.1) и (2.63).

Зависимость (2.65), когда деформация $\varepsilon_{x2}(i)$ в соответствии с (2.66), представляется равенством

$$\sigma_{xa2}(i) = \left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)}\left(1 + \frac{1}{1-2\mu}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa1}(i), \qquad (2.67)$$

где $\rho_2(i)$ – неизвестная истинная плотность стержня при растяжении во втором полуцикле i-го цикла.

Зависимость (2.10) можно представить для полуцикла растяжения $j=2$ i-го цикла в виде

$$\sigma_{cp2}(i) = \frac{1}{3}\left(\left(1 - \frac{4\mu G}{E}\right)\sigma_{xa2}(i) + 2\lambda\varepsilon_{V2}(i)\right). \qquad (2.68)$$

Используем соотношения (2.63), (2.67) в (2.68) в результате получим

$$\sigma_{cp2}(i) = \frac{1}{3}\left(\left(1 - \frac{4\mu G}{E}\right)\left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)}\left(1 + \frac{1}{1-2\mu}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{1-2\mu}\right)\sigma_{xa1}(i) + 2\lambda\left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)}\right)\right). \qquad (2.69)$$

С другой стороны среднее напряжение и отношения плотностей связаны посредством

$$\sigma_{cp2}(i) = K\left(1 - \frac{\rho_2(i-1)}{\rho_2(i)}\right). \qquad (2.70)$$

Исключив из (2.69) и (2.70) среднее напряжение, получим уравнение

$$2(1-\mu)\sigma_{xa1}(i)\left(\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)}\right)^2 -$$
$$-\left(E + \sigma_{xa1}(i)\right)\frac{\rho_2(i)}{\rho_2(i-1)} + E = 0, \qquad (2.71)$$

из которого находим $\rho_2(i)/\rho_2(i-1)$, которое позволяет из (2.67) определить амплитудное напряжение $\sigma_{xa2}(i)$.

3. Расчет на усталость при осевом циклическом нагружении

На каждом полуцикле вычисляемые амплитудные значения напряжений сравниваются с пределом прочности. Если предел превышается, вычисления останавливаются. Критерием хрупкого разрушения при усталости принято достижение текущими нормальными напряжениями предела прочности, а пределом выносливости считается начальное напряжение, при котором предел прочности не превосходится амплитудными напряжениями на заданной базе испытаний.

Апробация модели происходила на задаче расчета кривой усталости стержня при различных уровнях приложенных циклических нагрузок с частотой $f = 36$ гц при температуре $\theta = 20^0 C$. Для исследуемого стержня, известны начальные – плотность ρ_0, масса m_0, геометрические размеры – длина l_0, площадь сечения F_0. Модуль упругости E, коэффициент Пуассона μ, предел прочности $\sigma_в$ найдены из стандартных испытаний на упругость. Физико-механические характеристики материала стержня приведены в табл. 1.

Стержень отобран в форме цилиндрических прутков диаметром 5 мм, изготовленных из серого чугуна СЧ 18-36 [4].

В рамках модели проведены расчеты зависимостей начальных амплитудных напряжений, при которых достигается предел прочности материала, от количества циклов нагружения. Найдены показатели наклона $m_N = (\lg N_1 - \lg N_2)/(\lg\sigma_2 - \lg\sigma_1)$ и m_{N1}, левой и правой веток кривой усталости на базе из $N_б = 10^6$ циклов, а также определена точка перелома N_G. Показатели наклона, точки перелома экспериментальной и расчетной кривых, приведены в табл. 2 [4].

Заключение

Расчетная кривая усталости при симметричном циклическом нагружении состоит из двух ветвей: первая наклонена к оси количества циклов под углом 69 градусов, вторая – под углом в 36 градусов.

Основная особенность модели состоит в том, что в одном полуцикле изменяется масса и не изменяется плотность, а в следующем полуцикле все происходит наоборот. Эта особенность и другие не очевидные зависимости потребовали детального изложения всего рекуррентного процесса, а также его последовательного рассмотрения на начальных циклах.

В периодически деформируемом линейно упругом теле энергия теряется в виду несовершенств материала (внутреннее трение).

Гипотезы, заложенные в модель, предполагают, что материал хрупкий, идеально упругий и в нем отсутствуют потери энергии. Последнее приводит к тому, что рассчитанные по модели усталостные разрушения происходят на более ранних циклах, чем в эксперименте. По-видимому, дальнейшее развитие модели будет направлено на учет рассеиваемой энергии.

Таблица 1

Физико-механические характеристики материала

Материал	$\sigma_в$	σ_R	μ	E	m_0	ρ_0	l_0	F_0
Серый чугун СЧ 18-36	MPa	MPa		MPa	кг	$кг/м^3$	м	$м^2$
	180	80	0,25	12000	0,006762	6900	0,05	0,0000196

Таблица 2

Результаты расчета

Серый чугун 8-36	N_G цикл	m_N	m_{N_1}
Расчет	227644	0,38094	1,33334
Эксперимент	350000	3,1	…

Литература

1. Голуб, В. П. Феноменологическая модель роста усталостной трещины на кинетику роста трещины в идеально пластических бесконечных пластинках при одноосном симметричном знакопеременном нагружении [Текст] / В. П. Голуб, А. В. Плащинская // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41(51), № 12. – С. 116-127.

2. Кобзарь, Ю. М. Модель хрупкого разрушения стержней в условиях ползучести при растяжении [Текст] / Ю. М. Кобзарь, А. Ю. Кобзарь // Проблемы оптимального проектирования сооружений : сб. докл. 2-й Всероссийской конф. – Новосибирск, 2011. – С. 162-169.

3. Кобзарь, Ю. М. Модель хрупкого разрушения конструкционных материалов при сжатии в условиях длительной ползучести [Текст] / Ю. М. Кобзарь // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 7(114). – С. 132-136.

4. Трощенко, В. Т. Сопротивление усталости металлов и сплавов [Текст] : справ. в 2-х т. / В. Т. Трощенко, Л. А. Сосновский. – К. : Наук. думка, 1987. – Т. 1 – 510 с. : Т. 2. – 825 с.

Поступила в редакцию 1.06.2015, рассмотрена на редколлегии 22.06.2015

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. В. С. Кирилюк, Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина.

ДО ОЦІНКИ ДОВГОВІЧНОСТІ ПРИ ВТОМІ ГЛАДКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ СТЕРЖНІВ ПРИ ОДНОВІСНОМУ СИМЕТРИЧНОМУ РОЗТЯГУ-СТИСКУ

Ю. М. Кобзар

Запропоновано модель втоми, в основу якої покладено зменшення несучої маси речовини в напівциклі стиску та збільшення її щільності в напівциклі розтягу. Середнє напруження та об'ємна деформація зв'язані лінійною залежністю Гука. Аналітичним шляхом для кожного циклу отримано зміни маси та щільності, а також зміни напруження, в залежності від пружних властивостей стержня, його початкових маси, щільності та об'єму. Межею застосування моделі є цикл при якому амплітудні значення напружень досягають межі пружності. Запропонований алгоритм моделі реалізовано в програмному середовищі з допомогою якого визначається руйнування від втоми та межу втоми. Отримані розрахункові значення кривої відрізняються від кривої втоми сірого чавуну, що досліджувався. Це пов'язано з тим, що в модель не закладено розсіювання прикладеної енергії на внутрішнє тертя та нагрів.

Ключові слова: симетричний розтяг-стиск, модель втоми, межа втоми, критерій руйнування при втомі.

TO ASSESS THE DURABILITY TO FATIGUE SMOOTH CYLINDRICAL RODS UNDER UNIAXIAL SYMMETRIC STRETCH – COMPRESSION

Ju. M. Kobzar

The model of fatigue, which is based on reducing the weight carrier substance for half-cycle compression and increase its density half-cycle stretching. High tension and volume deformation related linear dependence Hooke. Analytically, for each cycle, received mass and density changes and stress changes depending on the elastic properties of the rod, its initial mass, density and volume. Limit the use of the model is a cycle in which amplitude values stress reaches the elastic limit. The proposed algorithm models implemented in software environment with which the destruction is determined fatigue limit and fatigue. The resulting design value curve different from the curve of fatigue gray iron that was investigated. This is due to the fact that the model is not laid scattering applied energy on internal friction and heating.

Key words: symmetric tension-compression fatigue model, fatigue limit criterion in fatigue fracture.

Кобзарь Юрий Михайлович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., ст. науч. сотр. отдела механики ползучести, Институт механики НАН Украины, Киев, Украина, e-mail: Poderey@gmail.com.