УДК 532.526+621.6+629.735.33.064.3

Ю. А. КРАШАНИЦА, ЛИНЬ ЧУМЕН

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕАЛЬНОЙ СРЕДЫ В ПРОДУКТОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

В настоящее время для решения инженерных физических задач широко применяются различные численные методы. Их общими недостатками являются частность и трудоемкость решений, высокие требования к вычислительным ресурсам и, как следствие, сложность решения задач оптимизации и экономической целесообразности. Этих проблем можно избежать, используя точные или приближенные аналитические зависимости, которые позволяют решать некоторые востребованные проблемы исследования движения вязких сред в продуктопроводных системах широкого применения. Существующие методики расчетов гидрогазодинамических систем, основанные на идеологии математической модели движения идеальной среды без вязкого взаимодействия, не соответствуют реальным процессам и запросам практики. В статье представлена идеология гидродинамического проектирования систем, обеспечивающих функционирование летательных аппаратов

Ключевые слова: *гидравлические системы, движение вязких сред, точные аналитические решения, гидродинамические характеристики.*

Введение

Теория течений вязких несжимаемых жидкостей представляется одной из важнейших для практики и наиболее интересной для математических исследований в разделе гидродинамики [1, 2]. Не случайно именно в задачах динамики вязких течений J. Leray и J. Schauder сделали первые шаги по применению методов функционального анализа [3], а в последнее время уравнения Навье-Стокса стали одним из первых объектов применения численных методов. Теоретические основы современных технологий исследования течений вязких сплошных сред были заложены еще в середине минувшего столетия О. А. Ладыженской, J. -L. Lions, R. Temam, О. М. Белоцерковским, К. И. Бабенко и мн. др. [2, 4], проводившими также и численное моделирование движения тел в различных средах [5]. На сегодняшний день многими учеными проведены многочисленные исследования и получено много результатов, которые имеют отношение к данной работе. Среди них можно упомянуть исследования кавитации, аэрации, дегазации и сепарации от различного рода включений [6]. Масштабные исследования, в частности, проводили Н. И. Захаров, А. А. Приходько, К. К. Головкин; Ю. А. Крашаница, К. А. Черноус, S. J. Alter, N. T. Frink и другие.

Однако в связи с применением современных методов контроля технологических процессов во многих областях деятельности и творчества нужны все более корректные и точные исследования этих процессов. Это касается, в первую очередь, управления движением сплошных сред во многих областях промышленности, транспорта, быта и коммунального хозяйства. Вызывают все больший интерес исследования течений сред разного рода с посторонними включениями, например, парогазовыми и шлаковыми в литейном производстве, частицами: в охладительных системах энергетики, породы в обогатительной промышленности, химических соединений в химической промышленности, объектами транспортирования в гидро- и пневмотранспорте и во многих других областях.

В данной работе рассмотрена модельная задача определения гидродинамических характеристик движения потоков вязкой несжимаемой жидкости в трубопроводных системах произвольной пространственной конфигурации. К сожалению, в существующих методиках гидравлических расчетов трубопроводных систем [7, 8] основною моделью является модель идеальной среды, где невозможно определить такой существенный параметр как сопротивление движению, связанное с трением среды о границы потока. Поэтому здесь невозможно определить реальный расход и другие, в том числе и экономические показатели функционирования системы.

Метод, предложенный для решения рассмотренных задач, основанный на спектре точных аналитических решений общей краевой задачи для полной системы уравнений Навье-Стокса [4], может быть развит для решения многих видов задач по определению гидродинамических характеристик протекания вязких сред в ограниченных областях произвольной геометрической формы, таких как диффузоры и конфузоры, призматические и сложные трубопроводы.

1. Постановка задачи

Продуктопроводные системы широкого применения представляют собой достаточно сложные пространственные конфигурации (рис. 1).

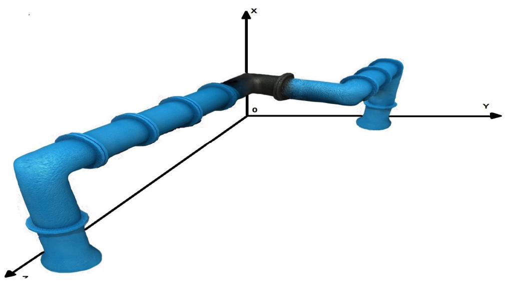

Рис. 1. Простой трубопровод гидросистемы самолета

Как правило, поперечные сечения имеют круговую форму, что позволяет создать алгоритмический процесс вычисления гидродинамических характеристик в структурированных элементах гидравлической системы достаточно малых продольных размеров (рис. 2).

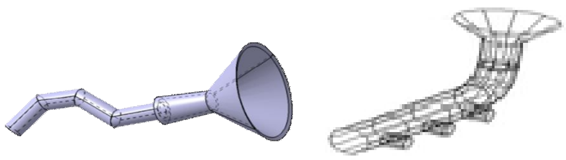

Рис. 2. Физический и расчетный фрагмент гидравлической системы

В локальных криволинейных координатах в пределах элементарного участка (рис. 3) трубопровода можно строить системы аналитических решений с целью определения всех необходимых характеристик таких как: кинематические и динамические параметры движения, расход с учетом реальных физических свойств среды. Из аналитической геометрии известно, что формулы перехода от базовой системы координат (x, y, z) к локальной (x’, y’, z’) выполнятся по формулам:

$$\begin{cases} x = a_i + \alpha_{11}x_i + \alpha_{21}y_i + \alpha_{31}z_i; \\ y = b_i + \alpha_{12}x_i + \alpha_{22}y_i + \alpha_{32}z_i; \\ z = c_i + \alpha_{13}x_i + \alpha_{23}y_i + \alpha_{33}z_i, \end{cases}$$

где (a_i, b_i, c_i,) – координаты вектора переноса от O к O_i, а коэффициенты α_{ij} задают взаимное расположение осей:

$$\alpha_{11} = \cos\left(\widehat{\mathbf{i}_i,\mathbf{i}}\right),\ \alpha_{12} = \cos\left(\widehat{\mathbf{i}_i,\mathbf{j}}\right),\ \alpha_{13} = \cos\left(\widehat{\mathbf{i}_i,\mathbf{k}}\right),$$

$$\alpha_{21} = \cos\left(\widehat{\mathbf{j}_i,\mathbf{i}}\right),\ \alpha_{22} = \cos\left(\widehat{\mathbf{j}_i,\mathbf{j}}\right),\ \alpha_{23} = \cos\left(\widehat{\mathbf{j}_i,\mathbf{k}}\right),$$

$$\alpha_{31} = \cos\left(\widehat{\mathbf{k}_i,\mathbf{i}}\right),\ \alpha_{32} = \cos\left(\widehat{\mathbf{k}_i,\mathbf{j}}\right),\ \alpha_{33} = \cos\left(\widehat{\mathbf{k}_i,\mathbf{k}}\right).$$

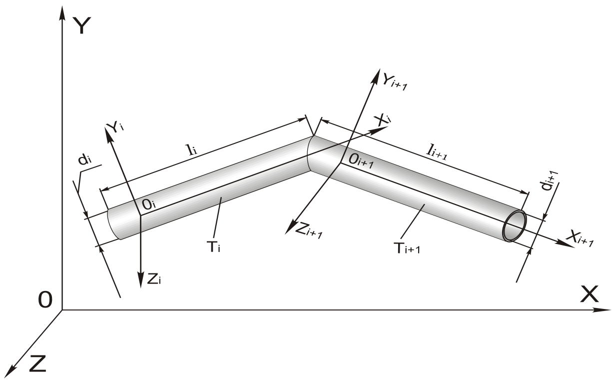

Рис. 3. Элементарный фрагмент трубопровода в локальных системах координат

Далее от локальных декартовых координат совершается переход к локальным цилиндрическим координатам:

$$x_i = r\cos\varphi_i,\quad y_i = r\sin\varphi_i,\quad z_i = z_i.$$

2. Математическая модель задачи

Наиболее достоверной и апробированной математической моделью движения несжимаемой нетеплопроводной жидкости является краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных Навье-Стокса [4, 5], которая состоит из системы уравнений сохранения для стационарного движения потока вязкой несжимаемой жидкости.

Принципиально, что векторы скорости **V** и завихренности **Ω** являются решениями основной задачи векторного анализа [5]:

$$(\nabla,\mathbf{V}) = q;\ [\nabla,\mathbf{V}] = \mathbf{\Omega};\ (\nabla,\mathbf{\Omega}) = 0, \tag{1}$$

где q – интенсивность возможных источников / стоков массы.

В дальнейшем основную задачу векторного анализа (1) целесообразно представить в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка [2, 5]:

$$\nabla(\nabla,\mathbf{V}) = \nabla q;\ \nabla(\nabla,\mathbf{\Omega}) = 0. \tag{2}$$

К сожалению, до настоящего времени не создан общий метод исследования и решения нелинейной дифференциальной системы законов сохранения в простейшем случае стационарного вязкого потока несжимаемой среды [2, 3]:

$$(\nabla,\mathbf{V}) = 0; \tag{3}$$

$$\left(\nabla,\left(\mathbf{VV}+\mathbf{I}\frac{p}{\rho}+\nu[\mathbf{I},\mathbf{\Omega}]\right)\right) = 0, \tag{4}$$

где в декартовом базисе $\mathbf{V} = \mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}w$ – вектор скорости потока среды; p –гидростатическое давление; ρ – плотность среды; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – коэффициент кинематической вязкости, а μ – коэффициент динамической вязкости.

Теоретическая аэрогидродинамика по определению посвящена изучению и исследованию кинематических и динамических характеристик движения и взаимодействия жидкостей или газов с границами потоков. Здесь определяющими являются фундаментальные положения векторно-тензорного анализа.

Поставленная задача решается в декартовой и цилиндрической системах координат (см. рис. 3), для которых основные дифференциальные операции векторного анализа [2], такие как дивергенция и ротор векторного поля скоростей, имеют вид:

- в декартовом базисе:

$$(\nabla,\mathbf{V}) = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}; \tag{5}$$

$$[\nabla,\mathbf{V}] = \mathbf{i}\left\{\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right\}+\mathbf{j}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+ \\ +\mathbf{k}\left\{\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right\}; \tag{6}$$

- в цилиндрических координатах (r, φ, z):

$$(\nabla,\mathbf{V}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}; \tag{7}$$

$$[\nabla,\mathbf{V}] = \frac{\mathbf{e}_r}{r}\left\{\frac{\partial w}{\partial\varphi}-\frac{\partial(vr)}{\partial z}\right\}+\mathbf{e}_\varphi\left\{\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}\right\}+ \\ +\frac{\mathbf{e}_z}{r}\left\{\frac{\partial(vr)}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right\}. \tag{8}$$

На этом основании можно показать, что в цилиндрической системе координат дифференциальная форма закона сохранения импульса (4) имеет вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{u}{r^2}\right); \\ u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+ \\ +\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v}{r^2}\right); \tag{9}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+w\frac{\partial w}{\partial z} = \\ = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right);$$

Учитывая, что в данном случае (см. рис. 3) осуществляется одномерное движение вдоль оси элемента, т.е. $\mathbf{V} = \mathbf{k}w(r)$, как это следует из закона сохранения массы (1) при отсутствии источников, то система уравнений (10) превращается в уравнение

$$\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \equiv \frac{d}{rdr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{10}$$

где правая часть этого обыкновенного дифференциального уравнения – постоянная и заданная величина.

Выполняя последовательно интегрирования уравнения (11), получим общее решение

$$w = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2+C_1\ln r+C_2. \tag{11}$$

Так как определяемая скорость *w* должна быть конечной при всех значениях радиуса *r*, а найденное общее решение (11) обращается в бесконечность при *r* = 0, т.е. на оси трубы, то необходимо считать $C_1 = 0$. Учитывая тот факт, что граничным условием является прилипание вязкой среды к стенке трубы, т.е. $w = 0$ при $r = \mathrm{R}$, получим:

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}R^2.$$

Таким образом, распределение скоростей по сечению цилиндрического элементарного отрезка будет параболическим

$$w = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\left(R^2 - r^2\right). \qquad (12)$$

Распределение же плотности вязкого взаимодействия, приходящееся на единицу площади по сечению, будет линейным

$$\tau = \mu\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{2}r\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (13)$$

Через элементарное кольцо ширины dr проходит количество жидкости $2\pi r$ dr w. Следовательно, полный расход определяется выражением:

$$Q = 2\pi\int_0^R w\,r\,dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (14)$$

Интересно отметить, что этот закон для расхода был экспериментально установлен Poiseuille J. в 1840 г. при систематических исследованиях движения воды в тонких трубах.

При расчетах реальных трубопроводных систем, которые компонуются набором элементарных цилиндрических отрезков, краевое (входное) значение параметров последующего элемента определяется выходными параметрами (12 – 14) предыдущего отрезка.

Такой подход позволяет расширить этот круг задач, которые могут быть востребованы при исследованиях гидродинамических характеристик смазочных слоев между движущимися цилиндрическими поверхностями типа «поршень-цилиндр». Рассмотрим кольцевую трубу, ограниченную двумя концентрическими цилиндрами, где радиус внутреннего цилиндра равен R_0, а внешнего – R_1. В предположениях, что здесь установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости является прямолинейно-осесимметричным, как и в предшествующем случае, для единственной составляющей вектора скорости, имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (10)

Граничные условия прилипания частиц к твердым стенкам в данном случае имеют вид

- при $r = R_0$ $\quad w = 0$,
- при $r = R_1$ $\quad w = 0$.

Общим решением уравнения, как и выше, является выражение (11), где произвольные постоянные определятся из граничных условий:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}R_0^2 + C_1\ln R_0 + C_2 = 0,\\ \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}R_1^2 + C_1\ln R_1 + C_2 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Подстановка решений этой линейной системы алгебраических уравнений в общее решение (11) приводит к окончательному решению поставленной задачи

$$w = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\left\{\left(R_1^2 - R_0^2\right)\left(\frac{\ln r/R_0}{\ln R_1/R_0}\right) - \left(r^2 - R_0^2\right)\right\}. \qquad (15)$$

Причем легко заметить, что в предельном случае исчезновения внутренней трубы при $R_0 = 0$ это решение совпадает с выражением (12).

Кроме этого интересным может быть и случай взаимного перемещения цилиндрических поверхностей с заданными скоростями либо их относительным и независимым вращением вокруг общей оси (в этом случае в уравнениях сохранения импульса (9) $u = w = 0$, а с учетом закона сохранения массы (7) и $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$), что отражается в граничных условиях.

Заключение

Представление трубопроводной системы сколь угодно сложной пространственной конфигурации набором как последовательных, так и параллельных простейших элементов, включая наличие необходимых переходных диффузорно/конфузорных конструкций.

Показанные геометрическое представление и дискретизация систем, спектр аналитических решений позволяют выполнять гидродинамическое проектирование продуктопроводных систем с движущимися средами с реальными физико-химическими свойствами. При этом знание этих кинематических и динамических характеристик позволяет достигнуть проектирования оптимальных систем, что может иметь весомый экономический эффект [8].

Исследование гидродинамических характеристик движущихся сред внутри геометрически сложных систем целесообразно проводить методом граничных интегральных уравнений путем триангуляции ограничивающих поверхностей [5 6]. Здесь можно строить также и процессы взаимодействия потока с различными включениями как твердых, так и газовых типов с учетом внешних массовых воздействий.

Литература

1. *Ландау, Л. Д. Гидродинамика [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 736 с.*
2. *Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] /Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1970. – 904 с.*
3. *Galdi, G. P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations [Text] / G. P. Galdi. - New York; Dordrecht; Heidelberg; London : Springer, 2011. – 1018 p.*
4. *Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / Н. А. Слезкин. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 519 с.*
5. *Krashanytsya, Y. Method of boundary integral equations for fluid applications [Text] / Y. Krashanytsya. – Lambert Academic Publishing GmbH & Co. KG, Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121, Saarbrücken, Germany, 2013. – 238 p.*
6. *Крашаница, Ю. А. Математическое и графическое моделирование объектов технологического оборудования литейного производства [Текст] / Ю. А. Крашаница, В. А. Грищенко, Д. В. Кириченко // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – 2003. – № 38(3). – С. 23 –28.*
7. *Чугаев, Р. Р. Гидравлика. Учебник для вузов [Текст] / Р. Р. Чугаев. – Л. : Энергоиздат, 1982. – 672 с.*
8. *Матвиенко, А. М. Проектирование гидравлических систем летательных аппаратов [Текст] / А. М. Матвиенко, Н. И. Зверев. – М. : Машиностроение, 1982. – 290 с.*

Поступила в редакцию 1.02.2016, рассмотрена на редколлегии 15.02.2016

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТІК РЕАЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА В ПРОДУКТОПРОВОДНИХ СИСТЕМАХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Ю. О. Крашаниця, Лінь Чумен

В даний час для вирішення інженерних фізичних завдань широко застосовуються різні чисельні методи. Їх загальними недоліками є частковість та трудомісткість рішень, високі вимоги до обчислювальних ресурсів, і, як наслідок, складність вирішення задач оптимізації та економічної доцільності. Цієї проблеми можна уникнути, використовуючи точні чи наближені аналітичні залежності, які дозволяють вирішувати деякі затребувані проблеми дослідження руху в'язких середовищ в продуктопроводних системах широкого застосування. Існуючі методики розрахунків гідрогазодинамічних систем, які засновано на ідеології математичної моделі руху ідеального середовища без вузької взаємодії, не відповідають реальним процесам і запитам практики. У статті представлено ідеологію створення системи гідродинамічного забезпечення функціонування літальних апаратів

Ключові слова: гідравличні системи, в’язкі середовища, загальна система рівнянь збереження, аналітичне визначення гідродинамічних характеристик.

ANALYTICAL DETERMINATION OF THE HYDRODYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE ACTUAL ENVIRONMENT IN PRODUCTS ARE WIRE SYSTEMS OF AIRCRAFT

Y. A. Krashanytsya, Lin Chumeng

At the present time to solve engineering physical problems are widely used various numerical methods. Their disadvantages are common particularity and complexity of making high demands on computing resources, and as a result, the complexity of solving optimization problems and economic feasibility. This problem can be avoided by using the exact or approximate analytical relationships that allow us to solve some problems in the study claimed the motions of viscous fluids in products are wire systems wide application. Existing methods of calculation hydrosystems, based on the ideology of the mathematical model of motion of an ideal medium without viscous interaction, do not meet the demands of real processes and practices. The article presents the ideology of creating a system of hydrodynamic the operation of aircraft.

Key words: hydraulic systems, viscous media, the general system of conservation laws, analytical determination of the hydrodynamic characteristics.

Крашаница Юрий Александрович – д-р техн. наук, проф., профессор кафедры аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

Линь Чумен – студент каф. аэрогидродинамики, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.