

УДК 629.7

С. В. ФИЛИПКОВСКИЙ

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРА С ДИСКОМ НА КОНСОЛЬНОМ КОНЦЕ ПРИ ВИБРАЦИИ ОПОР

Разработана новая расчётная модель ротора с диском, закреплённым на консольном конце вала. Прогнбы вала и упругие деформации радиально-упорных шарикоподшипников являются величинами одного порядка. Колебания возбуждаются одновременным действием дисбаланса ротора и вибрации опор. Построены амплитудно-частотная характеристика, фазовые траектории и отображения Пуанкаре на режиме, когда частота вращения ротора находится в диапазоне частот вибрации опор. Анализ нелинейной динамики ротора показал, что кроме основного резонанса на низких частотах возникают суперрезонансные колебания. На неустойчивых режимах наблюдаются седло-узловые бифуркации, приводящие к биениям.

Ключевые слова: ротор, радиально-упорный шарикоподшипник, упругая деформация, нелинейные колебания, амплитудно-частотная характеристика, бифуркация.

Введение

Роторы с диском, закреплённым на консольном конце вала, широко распространены в машинах, в частности в авиационной технике. В большинстве исследований анализируются колебания роторов с диском, расположенным посередине между подшипниками, вызванные дисбалансом или дефектами подшипников. При этом кроме нелинейности контактных напряжений учитывается зазор между шариками и канавками качения в подшипниках [1,2].

Для авиационных конструкций характерны малая жёсткость и большие мощности источников вибрации, поэтому важно рассмотреть колебания, вызванные одновременным действием дисбаланса диска и вибрации опор. Чтобы избежать при колебаниях роторов раскрытия зазоров между шариками и канавками качения, которое приводит к ударным нагрузкам, в авиационной технике, как правило, применяют предварительное поджатие радиально-упорных шарикоподшипников. Колебания недеформируемого ротора на таких подшипниках исследовано в [3]. В статье [4] исследованы нелинейные колебания, вызванные дисбалансом ротора на шарикоподшипниках с предварительной осевой нагрузкой. В работе [5] рассмотрено влияние величины угла контакта в шарикоподшипнике и осевой нагрузки на нелинейную динамику ротора.

В зависимости от соотношения величин прогибов вала и упругих деформаций подшипников могут рассматриваться модели колебаний недеформируемого ротора на упругих опорах, упругого вала на жёстких опорах или упругого вала на упругих под-

шипниках [6]. Последняя задача в нелинейной постановке остаётся наименее исследованной.

Целью настоящей работы является построение математической модели упругого ротора с диском на консольном конце вала, вращающегося в нелинейно упругих шарикоподшипниках, и анализ его колебаний при совместном действии дисбаланса и вибрации опор.

1. Расчётная модель

Для аппроксимации оси деформированного вала применяем метод конечных элементов (МКЭ). Участки вала постоянного сечения аппроксимируем одномерными конечными элементами с двумя узлами и четырьмя степенями свободы в узле. Узловыми значениями являются перемещения сечений вала вдоль координатных осей и повороты сечений вокруг поперечных осей. Диски и опоры ротора помещены в узлах. Расчётная модель ротора, на которой цифрами обозначены номера узловых сечений, представлена на рис. 1. Силы и моменты сил инерции диска, а также контактные силы, возникающие в подшипниках, рассматриваем как граничные условия в соответствующих узлах.

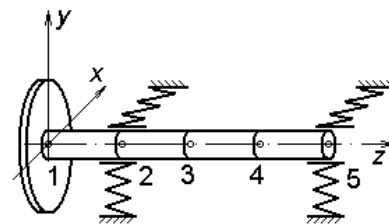


Рис. 1. Конечные элементы и узлы ротора

Координатные оси направлены, как показано на рис. 1. Узловыми значениями конечных элементов являются перемещения вдоль координатных осей и углы поворота сечений вокруг осей x и y i -го узла. Обобщённые координаты, которыми являются элементы вектора узловых значений, будем располагать в следующем порядке: $u_{i,1} = u_{i,x}$, $u_{i,2} = \theta_{i,y}$, $u_{i,3} = u_{i,y}$, $u_{i,4} = \theta_{i,x}$, $u_{i,5} = u_{i,z}$. Интерполяционными полиномами конечного элемента являются функции изогнутой оси балки при единичных перемещениях узловых сечений [7].

2. Уравнения колебаний ротора

Уравнения колебаний вала получены методом Галёркина при одновременной аппроксимации уравнений и граничных условий [8]

$$\int_O W_e R_O dO + \int_\Gamma \bar{W}_e R_\Gamma d\Gamma = 0, \quad (1)$$

где R_O и R_Γ – невязки решения уравнения и в граничных условиях,

W_e и \bar{W}_e – весовые функции в области и на границе конечного элемента с номером e . В качестве весовых функций в данном методе берутся интерполяционные полиномы $W_e \equiv N_e$.

Уравнения свободных колебаний участка вала постоянного сечения можно записать следующим образом [9]:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u_x}{\partial \zeta^4} + \rho F \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial \zeta^4} + \rho F \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где I и F – диаметральный момент инерции и площадь сечения вала,

E и ρ – модуль упругости и плотность материала. Подстановка (2) в первый интеграл (1) приводит к следующим интегралам по длине элемента:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [N_e]^T \left(EI \frac{\partial^4 u_x}{\partial \zeta^4} + \rho F \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right) d\zeta, \\ \int_0^1 [N_e]^T \left(EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial \zeta^4} + \rho F \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right) d\zeta. \end{aligned} \quad (3)$$

Выполнив в (3) интегрирование по частям для слагаемых с производными по осевой координате получаем

$$\int_0^1 [N_e]^T \left(EI \frac{\partial^4 u_x}{\partial \zeta^4} \right) d\zeta = [K_e] [u_{i,1} \quad u_{i,2} \quad u_{i+1,1} \quad u_{i+1,2}]^T,$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [N_e]^T \left(EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial \zeta^4} \right) d\zeta = \\ = [K_e] [u_{i,3} \quad u_{i,4} \quad u_{i+1,3} \quad u_{i+1,4}]^T, \end{aligned} \quad (4)$$

где $[K_e]$ – матрица жёсткости конечного элемента. Для интегралов с производными по времени в (3) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 [N_e]^T \left(\rho F \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right) d\zeta = \\ = [M_e] [\ddot{u}_{i,1} \quad \ddot{u}_{i,2} \quad \ddot{u}_{i+1,1} \quad \ddot{u}_{i+1,2}]^T, \\ \int_0^1 [N_e]^T \left(\rho F \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right) d\zeta = \\ = [M_e] [\ddot{u}_{i,3} \quad \ddot{u}_{i,4} \quad \ddot{u}_{i+1,3} \quad \ddot{u}_{i+1,4}]^T, \end{aligned} \quad (5)$$

где $[M_e]$ – матрица масс конечного элемента.

Граничным условием на конце вала с диском является равенство изгибающего момента сил инерции диска и поперечной силы инерции диска.

$$\begin{aligned} \left[EI \frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta \partial t^2} + I_0 \Omega \frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta \partial t} \right]_{\zeta=0} &= 0, \\ \left[EI \frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta^2} + I_1 \frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta \partial t^2} - I_0 \Omega \frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta \partial t} \right]_{\zeta=0} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left[EI \frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta^3} + m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right]_{\zeta=0} &= 0, \\ \left[EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta^3} + m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right]_{\zeta=0} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где I_1 и I_0 – диаметральный и полярный моменты инерции диска,

Ω – угловая скорость ротора,

m_0 – масса диска.

Подставив во второй интеграл (1) выражения (6) и $\zeta = 0$, получаем добавку к матрице масс $[M_{II}]$ и матрицу гироскопических моментов $[G_I]$

$$\begin{aligned} [N_e]^T I_1 \frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta \partial t^2} \Big|_{\zeta=0} + [N_e]^T I_1 \frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta \partial t^2} \Big|_{\zeta=0} = \\ = [M_{II}] [\ddot{u}_{1,1} \quad \ddot{u}_{1,2} \quad \ddot{u}_{1,3} \quad \ddot{u}_{1,4}]^T, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [N_e]^T I_0 \Omega \frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta \partial t} \Big|_{\zeta=0} + [N_e]^T I_0 \Omega \frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta \partial t} \Big|_{\zeta=0} = \\ = [G_I] [\dot{u}_{1,1} \quad \dot{u}_{1,2} \quad \dot{u}_{1,3} \quad \dot{u}_{1,4}]^T. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив во второй интеграл (1) выражения (7) и $\zeta = 0$ получаем добавку к матрице масс $[M_{mI}]$

$$[N_e]^T m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=0} + [N_e]^T m_0 \frac{\partial^3 u_y}{\partial t^2} \Big|_{\zeta=0} = (10)$$

$$= [M_{m1}] [\ddot{u}_{1,1} \quad \ddot{u}_{1,2} \quad \ddot{u}_{1,3} \quad \ddot{u}_{1,4}]^T.$$

Для диска, закреплённого с эксцентриситетом a , силы инерции будут

$$\left[EI \frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta^3} + m_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right]_{\zeta=0} - m_0 a \Omega^2 \cos \Omega t = 0,$$

$$\left[EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta^3} + m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right]_{\zeta=0} - m_0 a \Omega^2 \sin \Omega t = 0. (11)$$

Подставив во второй интеграл (1) выражения (11) и $\zeta = 0$ кроме добавки к матрице масс получим вектор правой части уравнений вынужденных колебаний $\{H_{D1}(\Omega, t)\}$, который обусловлен дисбалансом диска

$$\{H_{D1}(\Omega, t)\} = m_0 a \Omega^2 [\cos \Omega t \quad 0 \quad \sin \Omega t \quad 0]^T. (12)$$

Для узла, закреплённого в подшипнике, граничные условия по осям x, y имеют вид

$$-\left(EI \frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta^3} \right)_i + \left(EI \frac{\partial^3 u_x}{\partial \zeta^3} \right)_{i+1} - P_x(u_x, u_y, u_z) = 0,$$

$$-\left(EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta^3} \right)_i + \left(EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial \zeta^3} \right)_{i+1} - P_y(u_x, u_y, u_z) = 0. (13)$$

Подставив во второй интеграл (1) выражения (13) и $\zeta = 0$, если это левый узел элемента, или $\zeta = 1$, если это правый узел элемента, получаем вектор-функцию сил упругости подшипника

$$[N_e]_i^T P_{x,i}(u_x, u_y, u_z) \Big|_{\zeta=1} + [N_e]_i^T P_{y,i}(u_x, u_y, u_z) \Big|_{\zeta=1} = (14)$$

$$= [P_{x,i}(u_{i,1}, u_{i,3}, u_z) \quad 0 \quad P_{y,i}(u_{i,1}, u_{i,3}, u_z) \quad 0]^T = \{K_{\Pi}(U)\}.$$

Функции $P_{x,i}$ и $P_{y,i}$ получены в работе [10].

Если вынужденные колебания вызываются вибрацией основания, то вектор кинематического возбуждения колебаний определяется так [11]:

$$\{H_{\Pi}(\omega, t)\} = -[M]\{A_{\Pi}(\omega, t)\}, (15)$$

где $[M]$ – матрица масс,

$\{A_{\Pi}(\omega, t)\}$ – вектор виброускорений опор,

ω – круговая частота вибрации опор. Анализ вынужденных колебаний обычно проводится с учётом сил демпфирования, вектор которых имеет такую же структуру, как вектор $\{K_{\Pi}(U)\}$, потому, что силы сопротивления движению сосредоточены в под-

шипниках. После объединения полученных матриц и векторов элементов (4), (5), (8) – (10), (12), (14) в систему по правилам сборки МКЭ [8] уравнение колебаний примет вид

$$[M]\{\ddot{U}\} + [G]\{\dot{U}\} + [C]\{U\} + [K]\{U\} + \{K_{\Pi}(U)\} = \{H_D(\Omega, t)\} + \{H_{\Pi}(\omega, t)\}. (16)$$

3. Амплитудно-частотная характеристика

Умножение (16) на $[M]^{-1}$ приводит уравнения к следующему виду:

$$\{\ddot{U}\} + [G']\{\dot{U}\} + [C']\{U\} + [K']\{U\} + [K'_{\Pi}(U)] = (17)$$

$$= [M]^{-1}\{H_D(\Omega, t)\} - \{A_{\Pi}(\omega, t)\},$$

где $[M]^{-1}[G] = [G']$, $[M]^{-1}[K] = [K']$, $[M]^{-1}[C] = [C']$,

$$[M]^{-1}[K_{\Pi}(U)] = [K'_{\Pi}(U)].$$

Для дальнейших исследований введём безразмерные параметры: $\bar{x}_n = x_n/z_0$, $\bar{y}_n = y_n/z_0$, $\bar{z} = z/z_0$, $\bar{\omega} = \omega/\omega_1$, $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_1$, $\tau = t \cdot \omega_1$, где ω_1 – основная резонансная частота линеаризованной системы и запишем (17) в виде нелинейной вектор-функции $\{f\}$.

$$\{\ddot{U}\} = \{f(\{U\}, \{\dot{U}\}, \bar{\omega}, \tau)\}. (18)$$

Частоту вращения ротора Ω считаем фиксированной, частота вибрации опор ω изменяется в заданном диапазоне. Для построения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) выполняем анализ уравнения (18) методом продолжения по параметру [10]. Начальная точка каждой ветви АЧХ определялась решением линеаризованного уравнения в стороне от резонансных частот, которые были определены при анализе свободных колебаний. Далее поиск решений продолжался в сторону резонанса.

На каждом шаге как прямой, так и инвертированной задачи метода продолжения периодические решения уравнения колебаний уточнялись итерационным методом Ньютона. В конце итераций вычислялась матрица монодромии, мультипликаторы которой определяют устойчивость и характер бифуркаций периодического решения уравнения.

Проанализированы колебания ротора со следующими параметрами: $L = 0,34$ м – длина вала; $l = 0,06$ м – длина консольного конца; $d_1 = 0,025$ м – диаметр консольного конца вала; $d_2 = 0,032$ м – диаметр вала между опорами; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па и $\rho = 0,3$ модуль упругости и плотность материала вала; $m = 5,0$ кг, $I_x = 0,1$ кг·м², $I_z = 0,2$ кг·м² – масса и центральные моменты инерции диска; частота вращения ротора – $f_{\Omega} = \Omega / 2\pi = 50$ Гц. Колебания возбуждаются дисбалансом диска, эксцентриситет которого $a = 0,008$ мм, и

вибрацией опор, амплитуды которой – $A_{ГК} = 0$, $A_{ПУ} = 2g$. Частота вибрации меняется в диапазоне от 20 до 2000 Гц.

Ротор вращается в радиально-упорных подшипниках со следующими параметрами: $\alpha = 15^\circ$ – угол контакта (угол между линией, соединяющей точки контакта шариков с канавками качения, и плоскостью, перпендикулярной оси вращения); $R_2 = 27,525$ мм – радиус внешней канавки качения; $R_1 = 16,000$ мм – радиус внутренней канавки качения; $R_K = 5,930$ мм – радиус поперечного сечения канавок качения; $d_B = 11,510$ мм – диаметр шариков; $N_B = 7$ – количество шариков; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па – модуль упругости; $\mu = 0,3$ – коэффициент Пуассона.

АЧХ колебаний ротора изображена на рис. 2. Резонанс 1 соответствует форме колебаний, когда цапфы вала находятся с противоположных сторон от оси симметрии подшипников и в процессе колебаний их центры движутся по соответствующим траекториям в сторону вращения вала. Резонансы 2 – 6 соответствуют форме колебаний, когда цапфы вала находятся с одной стороны от оси симметрии подшипников и в процессе колебаний также движутся в сторону вращения вала. При этом пики 3 – 6 отражают суперрезонансы порядка $2/1$ – $5/1$. Резонансные колебания по форме, когда центры цапф движутся навстречу вращению вала, не наблюдаются.

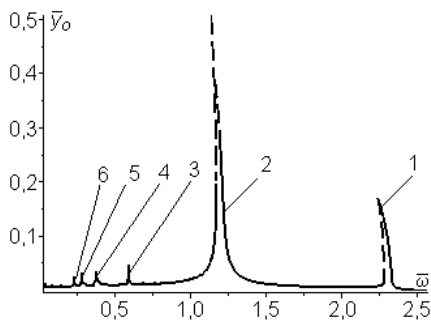


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика

4. Анализ устойчивых режимов колебаний

Траектории центров диска и цапф при резонансных колебаниях по основным формам близки к эллиптическим, как показано на рис. 3 для точки АЧХ в окрестности резонанса 2. Для суперрезонансных частот за один период колебаний центры описывают столько петель, во сколько раз частота ниже основной частоты для этой формы, как показано на рис. 4 для точки в окрестности резонанса 3.

Суперрезонансные колебания имеют относительно малые амплитуды, а траектории центра диска более сложные, как показано на рис. 4 и рис. 5. По-видимому, такая сложность траекторий в рассмот-

ренном примере обусловлена тем, что возникают суперрезонансы обеих форм колебаний. При этом частота основного резонанса второй формы приблизительно вдвое больше соответствующей частоты первой формы. В результате происходит наложение колебаний разных форм.

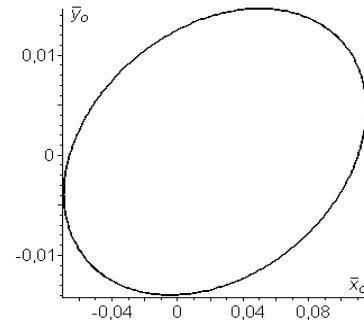


Рис. 3. Траектория центра диска на частоте $\bar{\omega} = 1,2466$ в окрестности резонанса 2

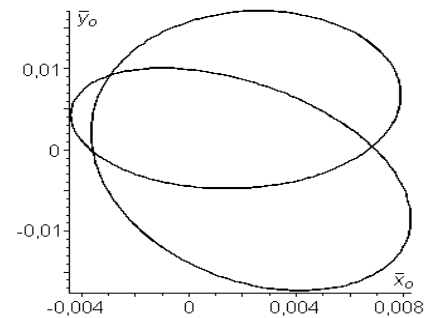


Рис. 4. Траектория центра диска на частоте $\bar{\omega} = 0,6236$ в окрестности резонанса 3

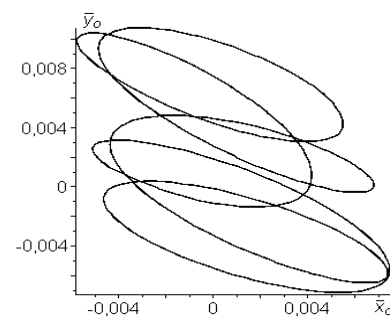


Рис. 5. Траектория центра диска на частоте $\bar{\omega} = 0,2493$ в окрестности резонанса 6

5. Анализ неустойчивых режимов колебаний

На левых ветвях основных резонансов осуществляются седло-узловые бифуркации [12]. Амплитуды колебаний остаются ограниченными, но относительно медленно меняются со временем. На рис. 6 показана траектория центра диска за десять перио-

дов на левой ветви резонанса 2. Для уточнения характера колебательного процесса построено отображение Пуанкаре, которое представлено на рис. 7. Оно показывает, что переходный процесс приводит к биениям.

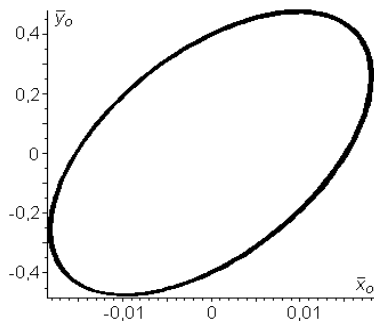


Рис. 6. Траектория центра диска на частоте $\bar{\omega} = 1,2142$ в окрестности резонанса 2

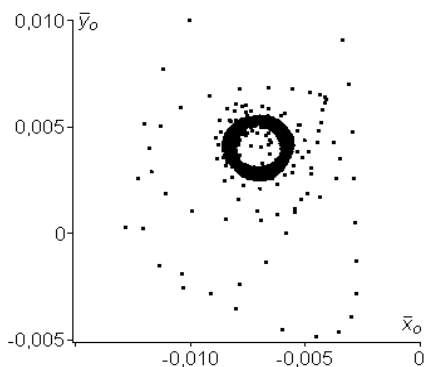


Рис. 7. Отображение Пуанкаре на частоте $\bar{\omega} = 1,2142$ в окрестности резонанса 2

На больших размахах левой ветви резонанса 2 осуществляются бифуркации двумерного тора [12], которые приводят к аналогичным биениям.

Заключение

Колебания вала на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным осевым поджатием имеют мягкую характеристику. При совместном действии дисбаланса и вибрации опор проявляются резонансы двух основных форм колебаний ротора, а также суперрезонансы порядка 2/1, 3/1, и т.д. Поэтому с точки зрения резонансных колебаний опасным является весь диапазон частот ниже основной резонансной частоты.

Резонансы, когда цапфы ротора находятся с разных сторон от оси подшипников, имеют больший размах и меньшую частоту, чем резонансы, когда цапфы находятся с одной стороны от оси подшипников. На основном резонансе первой формы колебаний наблюдается потеря устойчивости на левой и

правой ветвях АЧХ, а на резонансе второй формы – только на левой ветви.

Литература

1. Yadav, H. K. Study of Effect of Unbalanced Forces for High Speed Rotor [Text] / H. K. Yadav, S. H. Upadhyay, S. P. Harsha // *Procedia Engineering*. – 2013. – V. 64. – P. 593–602.
2. Babu, C. K. Nonlinear vibration analysis of an elastic rotor supported on angular contact ball bearings considering six degrees of freedom and waviness on balls and races [Text] / C. K. Babu, N. Tandon, R. K. Pandey // *Journal of Vibration and Acoustics*. – 2014. – Vol. 136(4). – P. 044503-1-5.
3. Филипповский, С. В. Свободные нелинейные колебания многодисковых роторов на шарикоподшипниках [Текст] / С. В. Филипповский, К. В. Аврамов // *Проблемы прочности*. – 2013. – № 3. – С. 86–96.
4. Bai, C. Effects of axial preload of ball bearing on the nonlinear dynamic characteristics of a rotor-bearing system [Text] / C. Bai, H. Zhang, Q. Xu // *Nonlinear Dynamics*. – 2008. – Vol. 53. – P. 173–190.
5. Cui, L. Nonlinear vibration and stability analysis of a flexible rotor supported on angular contact ball bearings [Text] / Li Cui, Jargon Zheng // *Journal of Vibration and Control*. – 2014. – Vol. 20. – P. 1767-1782.
6. Хронин, Д. В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов [Текст] / Д. В. Хронин. – М. : Машиностроение, 1970. – 412 с.
7. Бидерман, В. Л. Теория механических колебаний [Текст] / В. Л. Бидерман – М. : Высшая школа, 1980. – 408 с.
8. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 320 с.
9. Диментберг, Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов [Текст] / Ф. М. Диментберг. – М. : Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.
10. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
11. Филипповский, С. В. Нелинейные колебания ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках [Текст] / С. В. Филипповский, А. С. Беломятцев // *Вестник ХНАДУ*. – 2014. – Вып. 64. – С. 66–73.
12. Анищенко, В. С. Сложные колебания в простых системах [Текст] / В. С. Анищенко. – М. : Наука, 1990. – 312 с.

References

1. Yadav, H. K., Upadhyay, H. Study of effect of unbalanced forces for high speed rotor. *Procedia Engineering*, 2013, vol. 64, pp. 593–602.
2. Babu, C. K., Tandon, N.R., Pandey, K. Nonlinear vibration analysis of an elastic rotor supported on

angular contact ball bearings considering six degrees of freedom and waviness on balls and races. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2014, vol. 136(4), pp. 044503-1-5.

3. Filipkovskii, S. V., Avramov, K. V. Nonlinear Free Vibrations of Multi-Disk Rotors on Ball Bearings. *Strength of Materials*, 2013, vol. 45, no. 3, pp. 316–323.

4. Bai, C., Zhang, H., Xu, Q. Effects of axial preload of ball bearing on the nonlinear dynamic characteristics of a rotor-bearing system. *Nonlinear Dynamics*, 2008, vol. 53, pp. 173–190.

5. Cui, L., Zheng, J. Nonlinear vibration and stability analysis of a flexible rotor supported on angular contact ball bearings. *Journal of Vibration and Control*, 2014, vol. 20, pp. 1767–1782.

6. Hronin, D. V. *Teoriya i raschet kolebanij v dvigateljah letatel'nyh apparatov* [Theory and calculation of oscillations in engines of aircraft], Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 412 p.

7. Biderman, V. L. *Teoriya mehanicheskikh kolebanij* [Theory of mechanical oscillations], Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1980. 408 p.

8. Zienkiewicz, O. C., Morgan, K. *Finite elements and approximation*. John Wiley & Sons Publ., 1983. 350 p.

9. Dimentberg, F. M. *Izhibnye kolebanija vrashhajushhijhsja valov* [Flexural oscillations of the rotating shafts]. Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ., 1959. 248 p.

10. Timoshenko, S. P., Young, D. H., Weaver, W. *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley & Sons Publ., 1974. 664 p.

11. Filipkovskii S. V., Belomytcev A. S. *Nelinejnye kolebanija rotora na radial'no-upornyh sharikopodshipnikah* [Nonlinear vibration of a rotor on the angular contact ball bearings]. *Vestnik HNADU*, 2014, vol. 64, pp. 66–73.

12. Anishhenko, V.S. *Slozhnye kolebanija v prostykh sistemah* [Complicated oscillations in simple systems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 312 p.

Поступила в редакцию 12.04.2016, рассмотрена на редколлегии 12.05.2016

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ РОТОРА З ДИСКОМ НА КОНСОЛЬНОМУ КІНЦІ ПРИ ВІБРАЦІЇ ОПОР

С. В. Філіпковський

Розроблено нову розрахункову модель ротора з диском, закріпленим на консольному кінці вала. Прогини вала й пружні деформації радіально-упорних шарикопідшипників є величинами одного порядку. Коливання збуджуються одночасною дією дисбалансу ротора й вібрації опор. Побудовано амплітудно-частотну характеристику, фазові траєкторії й відображення Пуанкаре на режимі, коли частота обертання ротора перебуває в діапазоні частот вібрації опор. Аналіз нелінійної динаміки ротора показав, що крім основного резонансу на низьких частотах виникають суперрезонансні коливання. На нестійких режимах спостерігаються сідло-вузлові біфуркації, що приводять до биттів.

Ключові слова: ротор, радіально-упорний шарикопідшипник, пружна деформація, нелінійні коливання, амплітудно-частотна характеристика, біфуркація.

NONLINEAR FLUCTUATIONS OF A ROTOR WITH A DISK ON THE CONSOLE END AT VIBRATION OF SUPPORT

S. V. Filipkovsky

The new design model of a rotor with the disk fixed on the console end of a shaft is developed. Deflections of a shaft and elastic deformations of angular contact ball bearings are of the same order. Oscillations are excited by simultaneous action of the rotor imbalance and vibration of supports. The frequency response, phase trajectories and Poincaré maps on the mode when rotor speed is in the frequency range of vibration of support are constructed. The analysis of nonlinear dynamics of a rotor has shown that besides the main resonance at low frequencies there are super-resonant oscillations. On unstable modes are observed a saddle-node bifurcations leading to beats.

Key words: rotor, angular ball bearing, elastic straining, nonlinear vibrations, frequency response, bifurcation.

Філіпковський Сергій Владимирович – канд. техн. наук, ст. науч. сотр., доцент кафедри теоретической механики и гидравлики, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Харьков, Украина, e-mail: svfil@inbox.ru.

Filipkovsky Sergey Vladimirovich – Candidate of Technical Science, Assistant Professor of Dept. of Theoretical Mechanics and hydraulics, Kharkov National Automobile and Highway University, Ukraine, e-mail: svfil @inbox.ru.