

УДК 629.13

С. В. СЮТКИНА-ДОРОНИНА

Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины, Днепр, Украина

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТНОГО ОБЪЕКТА С РАКЕТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ НА ТВЁРДОМ ТОПЛИВЕ

Выполнена постановка комплексной задачи совместной оптимизации программ управления и проектных параметров одноступенчатого управляемого ракетного объекта (УРО) с маршевым ракетным двигателем на твёрдом топливе (РДТТ). Задача сформулирована как задача теории оптимального управления с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей. В состав оптимизируемых параметров включены проектные параметры УРО, параметры, определяющие программы управления движением УРО, а также параметры, характеризующие движение на активном участке траектории. Приведены элементы математической модели УРО, позволившие свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей. Предложен модифицированный автором градиентный метод оптимизации для решения сформулированной задачи, позволяющий на начальном этапе проектирования определять оптимальные в заданном классе функций программы управления движением и рациональные значения оптимизируемых параметров УРО.

Ключевые слова: *управляемый ракетный объект (УРО), маршевый ракетный двигатель на твёрдом топливе (РДТТ), начальный этап проектирования, оптимизируемые параметры, проектные параметры, программы управления движением, целевой функционал, оптимизация, допустимые диапазоны изменений оптимизируемых параметров.*

Введение

Проектирование, разработка и создание управляемых ракетных объектов (УРО) связано с большими затратами, материальных, финансовых и технических ресурсов. Необходимость учета этих факторов при проектировании предъявляет повышенные требования к качеству принимаемых проектных решений. Следует отметить, что неверные (нерациональные) проектные решения, принятые на начальном этапе проектирования УРО, приводят в конечном итоге к снижению эффективности выполнения целевых задач, росту затрат на разработку и изготовление УРО, увеличению сроков его создания [1].

Под управляемым ракетным объектом далее понимаются одноступенчатые управляемые ракеты различного назначения, предназначенные для доставки полезного груза в заданную точку пространства с требуемыми значениями кинематических параметров движения. В качестве маршевых силовых установок на УРО рассматриваются ракетные двигатели, работающие на твердом топливе (РДТТ).

Для успешного решения проектных задач, связанных с разработкой УРО, особое значение приобретает создание современного методического, алгоритмического и программного обеспечения, которое позволяет на начальном этапе проектирования с не-

обходимой для проектных исследований точностью определять:

- оптимальные (рациональные) значения оптимизируемых параметров и основных характеристик УРО;
- программы управления движением;
- количественные оценки показателей эффективности с учетом особенностей целевого применения УРО.

При этом следует отметить, что разработка методического обеспечения для решения задач начального этапа проектирования УРО является одной из основных предпосылок для осуществления корректного и научно обоснованного принятия проектных решений при проектировании УРО, а также создания эффективных методов решения проектных задач, что собственно и определяет актуальность исследований, проводимых в данном направлении.

Вопросам проектирования и разработки управляемых объектов ракетно-космической техники (РКТ), уделено большое внимание в отечественной и зарубежной научной и технической литературе см., например, монографии [2–8], в которых рассмотрены математические модели функционирования УРО в целом, основных элементов и подсистем, а также вопросы, связанные с оптимизацией проектных параметров, программ управления УРО различного назначения.

Так в [2, 3] и ряде других работ рассмотрены вопросы, связанные с разработкой и проектированием РДТТ, а также математические модели для определения основных характеристик последних на различных этапах проектирования.

В монографии [4] в вариационной постановке сформулирована задача и предложен алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата.

В работах [5, 6] приведены математические модели движения УРО, предложены программы управления движением на всех участках траектории для УРО различного назначения.

В [7], а также в ряде других работ, рассмотрены вопросы проектирования баллистических ракет с двигательными установками, работающими как на жидких компонентах ракетного топлива, так и на твердом ракетном топливе.

В монографии [8] рассмотрены отдельные вопросы проектирования систем управления самолётами, космическими аппаратами и ракетными объектами.

В [9] проведена совместная оптимизация основных проектных параметров и программ управления движением двухступенчатой ракеты-носителя (РН) со стартовой массой 100 т и маршевыми двигательными установками (ДУ), работающими на жидких компонентах ракетного топлива. РН предназначена для решения целевых задач, связанных с выводением космических аппаратов (КА) максимальной массы на различные круговые орбиты. В качестве целевого функционала рассмотрена масса полезного груза, оптимизируемыми параметрами являлись коэффициенты начальных тяговооруженностей ступеней РН, и относительная конечная масса первой ступени РН. При выборе проектных параметров были использованы два подхода. Первый подход – оптимизация с использованием математической модели, построенной на физических соотношениях и метода Монте-Карло с последующей обработкой точек, подозрительных на экстремум, методом Гаусса–Зейделя [10]. Во втором подходе на основе математической модели, построенной на физических соотношениях, с использованием имитационного моделирования сформированы регрессионные модели зависимости массы полезного груза от основных проектных параметров РН. Использование этих моделей позволило существенно сократить расчётное время на оптимизацию проектных параметров. Анализ сравнения этих двух подходов показал, что использование для решения поставленной задачи двух предложенных подходов даёт практически близкие по значению целевого функционала результаты, что делает вполне допустимым использование предложенных подходов для решения задач начального этапа проектирования РН.

В [11] сформулирована задача оптимизации проектных параметров ракетного двигателя на твердом топливе (РДТТ). Приведены элементы математической модели РДТТ и алгоритм, позволяющие на начальном этапе проектирования определять конфигурацию и габаритные размеры заряда с щелевыми проточками в области переднего днища камеры сгорания. В состав оптимизируемых параметров РДТТ включены геометрические параметры, характеризующие начальную конфигурацию заряда, что позволило при решении задачи оптимизации выбрать такую его конфигурацию, которая в процессе работы РДТТ обеспечивает требуемую программу изменения во времени тяговых характеристик двигателя.

В [12] рассмотрена задача совместной оптимизации проектных параметров космического аппарата (КА) и установленного на нём апогейного РДТТ, обеспечивающего осуществление орбитального маневра, связанного с переводом КА с переходной эллиптической орбиты на заданную круговую орбиту. С учётом требований системного подхода к проектированию сложных систем проведены исследования по определению оптимальных значений проектных параметров КА и апогейного РДТТ, при которых обеспечивается выведение максимальной массы полезного груза на заданную конечную круговую орбиту. В качестве оптимизируемых параметров КА и апогейного РДТТ были приняты: коэффициент начальной тяговооруженности КА, давление в камере сгорания РДТТ, степень расширения, а также полуугол раствора на срезе сопла.

В [13] рассмотрена комплексная задача совместной оптимизации проектных параметров и программ управления твердотопливной ракеты-носителя (ТРН) сверхлегкого класса. В состав оптимизируемых параметров ТРН дополнительно введены геометрические параметры, характеризующие начальные конфигурации зарядов маршевых РДТТ, что позволило сформировать программы изменения во времени тяговых и расходных характеристик маршевых РДТТ и осуществлять совместную оптимизацию проектных параметров ТРН и геометрических параметров зарядов маршевых РДТТ на начальном этапе проектирования.

В [14] рассмотрена задача оптимизации проектных параметров и программ управления движением ракеты-носителя сверхлегкого класса (РНСК), предназначенной для выведения малоразмерных космических аппаратов (КА) в околоземное космическое пространство. Программа управления движением, обеспечивающая выполнение РНСК различных целевых задач, определяется в классе полиномиальных функций, что позволило свести задачу теории оптимального управления к более простой задаче нелинейного математического программиро-

вания. Представлены обобщенный алгоритм решения задачи оптимизации, а также схема полета РНСК при выведении КА на требуемые орбиты. Для различных целевых задач и стартовых масс РНСК проведена оптимизация проектных параметров и определены диапазоны их изменения. При выборе проектных параметров был использован метод Гаусса – Зейделя (метод поочередного изменения параметров) [10]. В качестве оптимизируемых параметров выбраны: коэффициенты начальных тяговооруженностей ступеней РНСК, и относительная конечная масса первой ступени, получены оптимальные значения проектных параметров для различных стартовых масс РНСК и орбит выведения.

Приведенный перечень работ не претендует на полное рассмотрение всех имеющихся литературных источников информации по рассматриваемому направлению исследований, однако в нём достаточно полно освещены вопросы, связанные с разработкой и созданием УРО различного назначения.

Как показал проведенный анализ, разработка современного методического, алгоритмического и программного обеспечения, которое может быть использовано при проектировании УРО различного назначения, выборе проектных параметров и программ управления, является одной из актуальных задач, решаемых при создании новых объектов ракетно-космической техники.

Следует отметить, что одной из важных целевых задач, выполняемых объектами РКТ, является оперативная доставка требуемой массы полезного груза в заданную точку пространства. Для осуществления такого рода транспортных операций наиболее целесообразно использование управляемых ракетных объектов с двигательными установками на твёрдом ракетном топливе, время подготовки которых к пуску существенно меньше, чем для УРО с ракетными двигателями, работающими на жидких компонентах ракетного топлива.

Далее рассмотрена постановка комплексной задачи оптимизации программ управления и проектных параметров одноступенчатого управляемого ракетного объекта с маршевым ракетным двигателем на твёрдом топливе (РДТТ).

1. Постановка задачи

Комплексная задача совместной оптимизации программ управления и проектных параметров одноступенчатого УРО с маршевым РДТТ, может быть сформулирована как задача теории оптимального управления с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей [4, 15–17], формализация которой заключается:

– в выборе критерия оптимизации (целевого функционала);

– в разработке математической модели, позволяющей в зависимости от исходных данных (вектор \bar{x}), программ управления (вектор \bar{u}), оптимизируемых параметров, включающих основные проектные параметры УРО и параметры траектории (вектор \bar{p}), определять значение целевого функционала;

– в разработке метода оптимизации, обеспечивающего нахождение таких значений векторов оптимизируемых параметров $\bar{p} = \bar{p}_{opt}$ и программ управления движением УРО $\bar{u} = \bar{u}_{opt}$, при которых целевой функционал принимает оптимальное значение.

В качестве исходной информации (компоненты вектора \bar{x}), необходимой для решения комплексной задачи, далее рассматриваются:

– данные тактико-технического задания, определяющие целевую задачу, для решения которой проектируется УРО;

– условия пуска УРО;

– ограничения на траекторию полета, габаритно-массовые характеристики УРО в целом, отдельных подсистем и элементов;

– коэффициенты безопасности, используемые при проведении прочностных расчетов;

– физико-механические и химические характеристики используемых материалов и твёрдого ракетного топлива (ТРТ);

– данные о прототипах, отдельных подсистем и элементов УРО;

– неучтенные массы элементов, подсистем, не включённых в математическую модель для расчёта основных характеристик УРО и др.

В состав оптимизируемых в процессе решения комплексной задачи параметров входят:

– основные проектные параметры, определяющие габаритно-массовые и энергетические характеристики УРО в целом и входящего в его состав маршевого РДТТ;

– параметры, определяющие совместно с программами управления движением траекторию УРО.

В качестве программ управления движением рассматриваются: программа изменения во времени угла тангажа, а также программа изменения во времени тяговых и расходных характеристик маршевого РДТТ [1].

Компонентами вектора оптимизируемых параметров \bar{p} являются:

– проектные параметры УРО, включающие коэффициент начальной тяговооруженности v_p [-]; и относительную конечную массу μ_k [-];

– параметры маршевого РДТТ, такие как давление в камере сгорания p_k [кгс/см²]; диаметр

среза сопла D_a [м]; угол полураствора на срезе сопла β_a [град];

– параметры траектории, включающие угол тангажа в конце активного участка траектории (АУТ) φ_{AUT} [град], а также время выхода на нулевой угол атаки после окончания АУТ t_{PUT1} .

Проектный параметр УРО μ_k – определяется при заданных массе полезного груза m_{pg}^{mp} и стартовой массе УРО m_0^{mp} из условия размещения максимально возможного количества ТРТ в рассматриваемом варианте УРО.

В качестве компонент вектора управления движением УРО $\bar{u} = \bar{u}(t)$ рассматриваются, как уже указывалось ранее, программы изменения во времени угла тангажа $\varphi_{np}(t)$ на активном и пассивном участках траектории, а также тяговых $P_{np}(t)$ и расходных $\dot{m}_c(t)$ характеристик маршевого РДТТ.

Коэффициент начальной тяговооруженности и относительная конечная масса УРО определяются известными соотношениями [18]:

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{m_0 \cdot g_0}{P_0}, \\ \mu_k &= \frac{m_k}{m_0} = \frac{m_0 - m_m(\bar{p})}{m_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

где m_0, m_k – соответственно стартовая и конечная массы УРО [кг];

$m_m(\bar{p})$ – запас топлива маршевого РДТТ [кг];

g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли [m/c^2];

P_0 – начальное значение тяги в пустоте маршевого РДТТ после выхода последнего на основной режим работы [кгс].

Значения оптимизируемых параметров (вектор \bar{p}) и программ управления движением УРО (вектор \bar{u}) выбираются из условия обеспечения максимального значения целевого функционала – расстояния $L(\bar{p}, \bar{u}, \bar{x})$, на которое доставляется заданная масса полезного груза m_{pg}^{mp} с учётом ограничений, накладываемых конструктивно-технологическими требованиями, условиями эксплуатации, условиями прочности несущих элементов конструкции, условиями работоспособности РДТТ и т.п.

Программы управления движением УРО задаются в определенном классе функций, характер изменения которых во времени определяются: вектором оптимизируемых параметров \bar{p} ; а также теку-

щими значениями вектора фазовых координат \bar{y} , определяющего положение УРО в пространстве.

В этом случае задача теории оптимального управления может быть преобразована в задачу нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей.

Комплексная задача совместной оптимизации проектных параметров и программ управления УРО формулируется следующим образом. Необходимо определить значения векторов $\bar{p} = \bar{p}_{opt}$, $\bar{u} = \bar{u}_{opt}$, обеспечивающих максимальное значение целевого функционала

$$J(\bar{p}_{opt}, \bar{u}_{opt}, \bar{x}) = \max_{\bar{p}, \bar{u}} L(\bar{p}, \bar{u}, \bar{x}) \quad (2)$$

при ограничениях:

– на области изменения оптимизируемых параметров \bar{p} и исходных данных \bar{x}

$$\bar{p} \in \tilde{P}^m \subset P^m; \quad \bar{x} \in \tilde{X}^k \subset X^k; \quad (3)$$

– на траекторию полёта и программы управления УРО

$$\begin{aligned} t_{vert} &= t_{vert}^{mp}; \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= f(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}, \bar{p}); \\ \bar{y} &\in \tilde{Y}^s \subset Y^s; \\ \bar{u} &\in \tilde{U}^r \subset U^r; \end{aligned} \quad (4)$$

– на габаритно-массовые характеристики УРО

$$\begin{aligned} m_0(\bar{x}, \bar{p}) &= m_0^{mp}; \\ m_{pg}(\bar{x}, \bar{p}) &= m_{pg}^{mp}; \\ D_p(\bar{x}, \bar{p}) &= D_p^{dop}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\bar{x} = (x_i), i = \bar{1}, k$, $\bar{p} = (p_i), i = \bar{1}, m$ – векторы исходных данных и оптимизируемых параметров УРО, являющиеся элементами векторных пространств X^k, P^m , соответственно; \tilde{P}^m, \tilde{X}^k – замкнутые области в векторных пространствах P^m, X^k , в которых могут принимать значения векторы \bar{p}, \bar{x} ; $\bar{y} = (y_i), i = \bar{1}, s$, $\bar{u} = (u_j), j = \bar{1}, r$ – соответственно вектор фазовых координат, определяющий положение УРО в пространстве, и вектор управления, являющиеся элементами векторных пространств Y^s и U^r ; \tilde{Y}^s, \tilde{U}^r – замкнутые области в векторных пространствах Y^s и U^r , в которых могут принимать

значения векторы \bar{y} , \bar{u} ; t_{vert}, t_{vert}^{mp} – расчётная и заданная продолжительность полёта на вертикальном участке движения УРО; $m_0(\bar{x}, \bar{p}), m_0^{mp}$ – расчётная и заданная стартовые массы УРО, $m_{pg}(\bar{x}, \bar{p}), m_{pg}^{mp}$ – расчётная и заданная массы полезного груза; $D_p(\bar{x}, \bar{p}), D_p^{dop}$ – расчётный и максимально допустимый диаметры УРО.

Математическая модель УРО представлена в виде оператора $\tilde{F} = R(Z)$, с областью определения на множестве $Z = \tilde{X}^k \times \tilde{P}^m \times \tilde{U}^r$ и областью значений на множестве F , сопоставляющего каждому элементу множества $z(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) \in Z$ множество выходных характеристик УРО $\tilde{F} \subset F$.

В качестве выходных данных рассматриваются: габаритно-массовые характеристики УРО в целом и основных его элементов и подсистем; прочностные, аэродинамические, баллистические, энергетические характеристики УРО; программы управления; значение целевого функционала L – дальность полёта УРО (км).

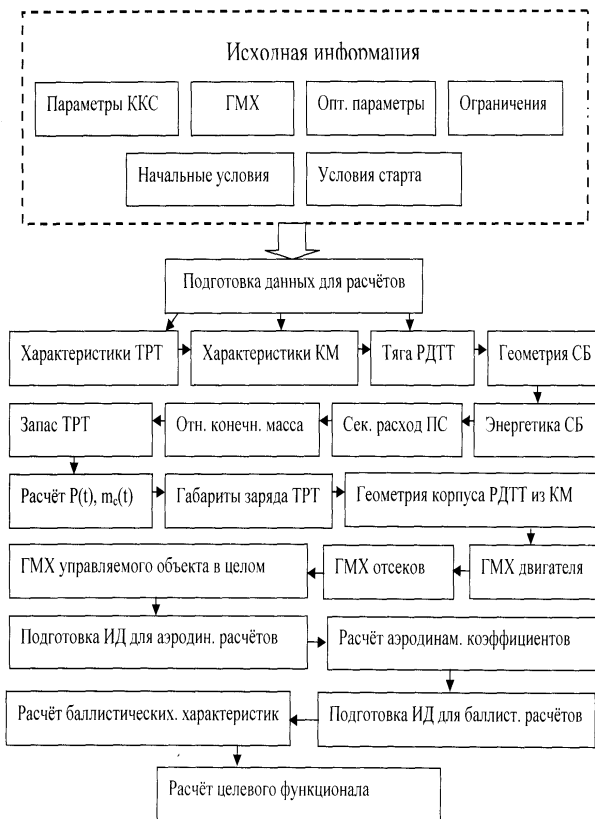


Рис. 1. Структура математической модели УРО

Структура математической модели, последовательность расчета целевого функционала при опти-

мизации проектных параметров и программ управления УРО приведена на рис. 1, где использована следующая аббревиатура: ККС – конструктивно-компоновочная схема; ГМХ габаритно-массовые характеристики; ТРТ – твёрдое ракетное топливо; КМ – конструкционные материалы; СБ – сопловой блок; ПС – продукты сгорания; ПО, ХО – соответственно переходный и хвостовой отсеки; ИД – исходные данные.

2. Элементы математической модели УРО

Для решения сформулированной комплексной задачи совместной оптимизации проектных параметров и программ управления могут быть применены методы теории оптимального управления [4, 15–17]. Однако следует отметить, что их использование наталкивается на трудности, связанные со сложностью используемых математических моделей, а также с проблемой решения краевой задачи для основной и сопряжённой систем обыкновенных дифференциальных уравнений для каждого из рассматриваемых альтернативных вариантов УРО. Перечисленные факторы затрудняют внедрение этих методов в практику оптимального проектирования.

Для преодоления этих трудностей использован подход, позволяющий свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей [5, 6, 14, 18–20]. В этом случае программы управления движением УРО (программы изменения во времени угла тангажа, тяговых и расходных характеристик маршевого РДТТ) задаются в виде полиномов, часть коэффициентов которых определяется с использованием исходных данных, текущих значений оптимизируемых параметров и фазовых координат, а остальные коэффициенты оптимизируются совместно с основными проектными параметрами УРО [14, 18].

При таком подходе задача нелинейного математического программирования может быть успешно решена широко распространёнными методами оптимизации, в частности, методами детерминированного или случайного поиска [10]. Следует также отметить, что в процессе оптимизации целесообразно в области, подозрительной на экстремум, использование параболической аппроксимации сечения функциональной поверхности в направлении поиска, и определение оптимальных на данном шаге оптимизации значений проектных параметров из условия максимума или минимума (в зависимости от решаемой задачи) аппроксимирующей функции [14, 18, 20].

Задача совместной оптимизации вектора \bar{p} и программ управления движением $\bar{u}(t)$ рассматривается для выбранного облика УРО (одного из возможных альтернативных вариантов), когда заданы:

– аэродинамическая и конструктивно-компоновочная схемы, а также множество элементов и подсистем, из которых сформирован альтернативный вариант УРО;

– перечень оптимизируемых параметров, позволяющих для текущего значения вектора \bar{p} с использованием математической модели определять значение целевого функционала, программы управления движением и основные характеристики УРО;

– исходные данные (вектор \bar{x}), включающие информацию о выполняемой целевой задаче, ограничения на траекторию полета, характеристики используемых ТРТ, конструкционных, эрозионно-стойких, теплозащитных и других материалов, условия применения и т.п.

В процессе решения задачи необходимо для различных значений вектора оптимизируемых параметров \bar{p} сформировать программу управления движением УРО – программу изменения угла тангажа $\varphi_{np}(t)$ на АУТ, а также программы изменения тяги $P_{np}(t)$ и массового секундного расхода продуктов сгорания ТРТ $\dot{m}_c = \dot{m}_c(t)$. На основном режиме работы РДТТ в рассматриваемой задаче тяга и расход продуктов сгорания приняты постоянными во времени, а на участке выхода РДТТ на режим спада тяги – изменяющимися по параболическим зависимостям.

Следует отметить, что используемые при проектировании математические модели УРО с двигателями установками на ТРТ достаточно широко освещены в технической литературе см., например, [2, 3, 5–7 и др.].

Далее рассмотрены элементы математической модели УРО, которые дали возможность свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования.

2.1. Программы управления углом тангажа

Система уравнений движения центра масс УРО, которая используется при решении совместной оптимизации вектора \bar{p} и программ управления движением $\bar{u}(t)$, приведена в [6].

Программы управления движением выбирают для следующей схемы полёта УРО:

- активный участок траектории (АУТ), включающий вертикальный полёт и участок разворота;
- пассивный участок траектории (ПУТ), на ко-

тором осуществляется выход УРО на нулевой угол атаки после окончания работы маршевого РДТТ и дальнейший полёт с нулевым углом атаки по баллистической траектории [5, 6, 19].

На участке вертикального движения программа управления углом тангажа $\varphi_{np}(t)$ имеет следующий вид

$$\varphi_{np}(t) = \text{const} = \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

На участке разворота программа изменения угла тангажа во времени задаётся следующей зависимостью

$$\varphi_{np}(t) = \sum_{i=0}^n A_i \cdot t^i. \quad (7)$$

При $n=1$ реализуется линейная зависимость изменения угла тангажа от времени, при $n=2$ – программа угла тангажа представляет квадратичную, а при $n=3$ – кубическую параболы.

Далее приведены условия, которые должны быть выполнены для каждой из возможных трех видов программ управления, и соотношения, позволяющие для этих программ определять значения коэффициентов $A_i, i=0, n$, в соотношении (7).

Для линейной зависимости угла тангажа от времени программа $\varphi_{np}(t)$ на участке разворота строится с учётом следующих условий и ограничений.

После окончания вертикального участка полёта при $t=t_{\text{vert}}$ угол тангажа принимается равным $\varphi_{\text{vert}} = \pi/2$.

При $t=t_{\text{АУТ}}$, где $t_{\text{АУТ}}$ – время окончания активного участка полёта, равное продолжительности работы маршевого РДТТ, угол тангажа $\varphi_{\text{АУТ}}$ принимается равным $\varphi_{\text{АУТ}} = \varphi_{\text{АУТ}}^{\text{mp}}$, где $\varphi_{\text{АУТ}}^{\text{mp}}$ – параметр траектории, который входит в состав оптимизируемых параметров \bar{p} .

Коэффициенты A_0, A_1 в (7) для линейной зависимости угла тангажа от времени определяются по формулам:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 \cdot t_{\text{vert}} = \varphi_{\text{vert}}; \\ A_0 + A_1 \cdot t_{\text{АУТ}} = \varphi_{\text{АУТ}}^{\text{mp}}; \end{cases} \quad (8)$$

$$A_0 = \varphi_{\text{vert}} - A_1 \cdot t_{\text{vert}},$$

$$A_1 = \frac{\varphi_{\text{vert}} - \varphi_{\text{АУТ}}^{\text{mp}}}{t_{\text{vert}} - t_{\text{АУТ}}},$$

а коэффициенты A_2, A_3 в (7) принимаются равными нулю.

Для случая квадратичной зависимости угла тангажа от времени программа управления строится с учётом следующих условий и ограничений. После окончания вертикального участка полёта начальные условия для программы изменения угла тангажа следующие:

При $t = t_{\text{vert}}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{vert}} &= \frac{\pi}{2}; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В конце АУТ условия для выбора квадратичной программы изменения угла тангажа от времени такие же, как и для линейной зависимости.

Коэффициенты в соотношении (7) для квадратичной параболы определяются следующей системой уравнений, линейной относительно коэффициентов $A_i, i = \overline{0,2}$:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 \cdot t_{\text{vert}} + A_2 \cdot t_{\text{vert}}^2 = \varphi_{\text{vert}}, \\ A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot t_{\text{vert}} = 0, \\ A_0 + A_1 \cdot t_{\text{AUT}} + A_2 \cdot t_{\text{AUT}}^2 = \varphi_{\text{AUT}}^{\text{mp}}, \end{cases} \quad (10)$$

в результате решения которой получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_0 &= \varphi_{\text{vert}} - (A_1 \cdot t_{\text{vert}} + A_2 \cdot t_{\text{vert}}^2), \\ A_1 &= -2 \cdot A_2 \cdot t_{\text{vert}}, \\ A_2 &= \frac{\varphi_{\text{vert}} - \varphi_{\text{AUT}}^{\text{mp}}}{(t_{\text{vert}}^2 - t_{\text{AUT}}^2) - 2 \cdot t_{\text{vert}} \cdot (t_{\text{vert}} - t_{\text{AUT}})}. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициент A_3 в соотношении (7) принимается равным нулю.

Программа управления углом тангажа для кубической параболы строится с учётом следующих условий и ограничений. После окончания вертикального участка полёта начальные условия для программы изменения угла тангажа такие же, как и для квадратичной параболы.

В конце активного участка траектории условия для выбора программы управления углом тангажа следующие при $t = t_{\text{AUT}}$:

$$\varphi_{\text{AUT}} = \varphi_{\text{AUT}}^{\text{mp}}; \quad \alpha_{\text{AUT}} = \alpha_{\text{AUT}}^{\text{mp}}, \quad (12)$$

где α_{AUT} – угол атаки в конце АУТ;

$\alpha_{\text{AUT}}^{\text{mp}}$ – параметр траектории, который для рассматриваемого варианта программы управления входит в состав оптимизируемых параметров \bar{p} .

Коэффициенты кубической параболы определяются в результате решения следующей системы линейных относительно коэффициентов $A_i, i = \overline{1,2}$ уравнений:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 \cdot t_{\text{vert}} + A_2 \cdot t_{\text{vert}}^2 + A_3 \cdot t_{\text{vert}}^3 = \varphi_{\text{vert}}, \\ A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot t_{\text{vert}} + 3 \cdot A_3 \cdot t_{\text{vert}}^2 = 0, \\ A_0 + A_1 \cdot t_{\text{AUT}} + A_2 \cdot t_{\text{AUT}}^2 + A_3 \cdot t_{\text{AUT}}^3 = \varphi_{\text{AUT}}^{\text{mp}}. \end{cases} \quad (13)$$

По приведенным соотношениям можно определить три коэффициента из четырёх. Четвёртый коэффициент (пусть это будет A_3) подбирается таким образом, чтобы в конце АУТ управляемый ракетный объект выходил на угол атаки $\alpha = \alpha_{\text{AUT}}^{\text{mp}}$.

Следует отметить, что тип программы управления углом тангажа из трех предложенных вариантов выбирается либо из условия максимума целевого функционала, либо из условий возможности реализации выбираемого типа программы для конкретного УРО.

2.2. Программы изменения тяговых и расходных характеристик маршевого РДТТ

При оптимизации проектных параметров УРО выбрана следующая схема изменения тяговых и расходных характеристик маршевого РДТТ во времени. Выделено три режима работы РДТТ: выход двигателя на основной режим работы, основной режим работы и участок спада тяги. Поскольку продолжительности спада тяги и выхода РДТТ на основной режим работы кратковременны и слабо влияют на энергетические возможности УРО, сделано предположение, что удельный импульс тяги на всех режимах работы маршевого РДТТ постоянный и равный удельному импульсу РДТТ на основном режиме работы $I_{\text{yd}}^{\text{pust}} \left[\frac{\text{кгс} \cdot \text{с}}{\text{кг}} \right]$.

С учётом этого предположения изменение расхода продуктов сгорания ТРТ во времени при оптимизации проектных параметров УРО на всех режимах работы маршевого РДТТ задаётся полиномом вида

$$\dot{m}_c(t) = \sum_{i=0}^n B_i \cdot t^i, \quad (14)$$

а программа изменения тяги маршевого РДТТ на всех режимах работы определяется по зависимости

$$P_{\text{np}}(t) = \dot{m}_c(t) \cdot I_{\text{yd}}^{\text{pust}}. \quad (15)$$

Продолжительности выхода РДТТ на основной режим работы t_v и участка спада тяги t_{sp} задаются в исходных данных, а продолжительность основного режима работы РДТТ определяется полным запасом ТРТ на борту УРО за вычетом топлива, расходуемого при выходе двигателя на основной режим и на участке спада.

Полный запас ТРТ маршевого РДТТ m_m может быть вычислен по формуле

$$m_m = m_0^{mp} \cdot (1 - \mu_k) = m_m^v + m_m^{osn} + m_m^{sp} + m_{mg}, \quad (16)$$

где m_0^{mp} – стартовая масса УРО, задаваемая в исходных данных [кг];

m_m^v , m_m^{osn} , m_m^{sp} – массы ТРТ, расходуемые при выходе маршевого РДТТ на основной режим, на основном режиме работы и на участке спада, соответственно [кг];

m_{mg} – гарантийный запас топлива [кг].

На начальном этапе проектирования гарантийный запас топлива m_{mg} может быть определен по следующей зависимости, полученной в результате обработки статистических данных

$$m_{mg} = \frac{K_{st} \cdot m_0^{mp}}{I_{yd}^{pust}}, \quad (17)$$

где K_{st} – статистический коэффициент, принимающий значения из диапазона $[0,3 \div 0,4]$.

При выходе маршевого РДТТ на основной режим расходуемое количество топлива m_m^v и изменение массового секундного расхода продуктов сгорания во времени $\dot{m}_c^v(t) \left[\frac{кг}{с} \right]$ определяются соотношениями:

$$m_m^v = \int_0^{t_v} \dot{m}_c^v(t) \cdot dt, \quad \dot{m}_c^v(t) = \sum_{i=0}^2 B_i \cdot t^i, \quad (18)$$

в которых коэффициенты B_i вычисляются по формулам:

$$B_0 = 0,0; \quad B_1 = \frac{2 \cdot P_0}{I_{yd}^{pust} \cdot t_v}; \quad B_2 = -\frac{P_0}{I_{yd}^{pust} \cdot t_v^2}, \quad (19)$$

где P_0 – тяга маршевого РДТТ в пустоте на основном режиме работы [кгс], определяемая в зависимости от коэффициента начальной тяговооруженности v_p по соотношению (1).

На участке спада тяги маршевого РДТТ расходуемое количество топлива m_m^{sp} и изменение массового секундного расхода продуктов сгорания \dot{m}_c^{sp} определяются соотношениями, аналогичными (18), в которых вместо m_m^v и $\dot{m}_c^v(t)$ подставлены соответственно m_m^{sp} и $\dot{m}_c^{sp}(t)$, а коэффициенты B_i вычисляются по формулам:

$$B_0 = \frac{P_0}{I_{yd}^{pust}}, \quad B_1 = -\frac{2 \cdot P_0}{I_{yd}^{pust} \cdot t_{sp}}, \quad B_2 = \frac{P_0}{I_{yd}^{pust} \cdot t_{sp}^2}. \quad (20)$$

На основном режиме работы тяга маршевого РДТТ в пустоте и массовый секундный расход продуктов сгорания ТРТ приняты постоянными и, соответственно, программа изменения тяги секундного расхода определяются соотношениями:

$$P_{np}^{osn}(t) = P_0, \quad \dot{m}_c^{osn}(t) = \frac{P_0}{I_{yd}^{pust}}. \quad (21)$$

Продолжительность работы маршевого РДТТ на основном режиме может быть вычислена по зависимости

$$t_{osn} = \frac{m_m^{osn} \cdot I_{yd}^{pust}}{P_0}, \quad (22)$$

в которой масса ТРТ, расходуемая на основном режиме работы маршевого РДТТ m_m^{osn} , может быть определена из соотношения (16) с учётом соотношений (17) – (20).

Предложенный подход к формированию программ изменения угла тангажа на АУТ [14, 18–20], тяги маршевого РДТТ в пустоте и массового секундного расхода продуктов сгорания ТРТ в виде полиномов позволил свести задачу теории оптимального управления [4, 15–17] к задаче нелинейного математического программирования.

3. Метод решения

Сформулированная задача может быть решена известными методами решения задач нелинейного математического программирования, методами случайного поиска или детерминированными методами оптимизации [10]. Здесь для оптимизации параметров и программ управления использован модифицированный автором градиентный метод покоординатного спуска (поочередного изменения параметров) [21]. Целесообразность применения указанного метода продиктована, с одной стороны, простотой реализации, а с другой стороны – возможностью осуществлять оптимизацию параметров и программ управления в интерактивном (диалоговом) режиме. Диалоговый режим удобен, поскольку при некоторых сочетаниях проектных параметров и исходных данных возможны случаи, когда полет УРО либо не реализуем, либо не могут быть выполнены ограничения, накладываемые на траекторию полета УРО. В этой ситуации в интерактивном режиме может быть осуществлена оперативная корректировка проектных параметров, исходных данных, и продолжен расчет без потери результатов предыдущего этапа оптимизации.

Обобщенный алгоритм решения сформулированной комплексной задачи реализован следующим образом.

1. Формируются исходные данные для расчета основных характеристик УРО (стартовая масса, условия старта, ограничения на траекторию движения УРО и т.п.).

2. Задаются начальные значения и диапазоны изменений вектора оптимизируемых параметров $\bar{p}_{нач}$.

3. Фиксируются начальные значения вектора оптимизируемых параметров $p_i, i = \overline{2, n}$.

4. Для сформированных исходных данных и заданных начальных значений оптимизируемых параметров с использованием алгоритма расчета основных характеристик УРО осуществляется подготовка данных для баллистического расчета.

5. Производится расчет баллистических характеристик УРО, в результате которого определяются программы управления движением УРО и значение целевого функционала L – дальности полета УРО [км].

6. Производится целенаправленное (в соответствии с рассмотренным далее градиентным методом покоординатного спуска) изменение первого оптимизируемого параметра p_1 при фиксированных значениях параметров $p_i, i = \overline{2, n}$, и осуществляются расчеты в соответствии с п.п. 4 – 5.

7. Если в рассматриваемой области значений оптимизируемого параметра находится локальный экстремум (в нашем случае максимум), осуществляется аппроксимация сечения функциональной поверхности в направлении изменения параметра и определяется его оптимальное (для данного этапа оптимизации) значение из условия максимума аппроксимирующей функции.

8. Вычисления, аналогичные проведенным в п.п. 4 – 7, повторяются для всех оптимизируемых параметров $\bar{p} = (p_i), i = \overline{1, n}$.

9. После определения оптимальных значений всех оптимизируемых параметров (первый этап оптимизации) вычисления при необходимости могут быть продолжены, начиная с первого оптимизируемого параметра (второй и последующие этапы оптимизации).

10. Окончание вычислений производится в том случае, когда дважды результаты оптимизации целевого функционала дальности полета L (км), полученные на предыдущем этапе, с точностью до ε , где ε – изначально заданное значение, совпадут с результатами последнего этапа оптимизации.

Как показали предварительные расчеты, предложенный метод оптимизации (градиентный метод покоординатного спуска) показал хорошую сходимость при определении оптимального значения вектора \bar{p}_{opt} . Практически для определения оптимальных значений проектных параметров достаточно пяти-шести итерационных этапов оптимизации.

Целью применения градиентного метода покоординатного спуска в рассматриваемой задаче является поиск оптимального значения вектора оптимизируемых параметров в заданном диапазоне его изменения из условия максимума целевого функционала.

Пусть задан целевой функционал $f(\bar{X})$, ограниченный на множестве допустимых решений $\bar{X} \subset R^n$ и имеющий непрерывные частные производные во всех его точках. Необходимо найти максимум целевого функционала $f(\bar{X})$ на множестве допустимых векторов оптимизируемых параметров $\bar{X} \subset R^n$, т. е. найти такой $\bar{X}^* \in R^n$, когда

$$f(\bar{X}^*) = \max_{\bar{X} \in R^n} f(\bar{X}). \quad (23)$$

Стратегия решения задачи максимизации целевого функционала состоит в построении последовательности векторов оптимизируемых параметров $\{\bar{X}^j\}, j = 1, 2, \dots$, таких что $f(\bar{X}^j) > f(\bar{X}^{j-1}), j = 1, 2, \dots$

Каждая j -тая последовательность векторов проектных параметров $\{\bar{X}^{jk}\}$ вычисляется как

$$\bar{X}^{jk} = \bar{X}^{jk-1} + t_k \cdot \left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_k} \right)_{\bar{X}=\bar{X}^{jk-1}}, \quad (24)$$

где j – номер цикла вычислений, $j = 1, 2, \dots$;

k – номер итерации внутри цикла $k = 1, 2, \dots, n$;

n – количество проектных параметров в оптимизируемом векторе;

\bar{X}^{j0} – начальный вектор в j -том цикле оптимизации;

t_k – величина шага градиента

$\nabla f(\bar{X}^{jk}) = \left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_k} \right)_{\bar{X}=\bar{X}^{jk-1}}$ для k -го оптимизируемого параметра x_k .

Величина шага градиента t_k задаётся для каждого k -го параметра x_k и не меняется до тех пор, пока выполняются условия:

$$\left[f\left(\bar{X}^{jk-1} + t_k \cdot \left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_k} \right)_{\bar{X}=\bar{X}^{jk-1}} \right) - f(\bar{X}^{jk-1}) \right] \geq 0, \quad (25)$$

$$\left| f(\bar{X}^{jk}) - f(\bar{X}^{jk-1}) \right| \geq \varepsilon,$$

где ε – малое положительное число.

Если данные условия при текущем t_k не выполняются, то шаг уменьшается вдвое $t_k = \frac{t_k}{2}$ и новый вектор параметров вычисляется заново \bar{X}^{jk} .

При j -том цикле вычислений за одну итерацию с номером k изменяется только один k -ый проектный параметр вектора \bar{X}^{jk-1} , после чего получаем новый вектор параметров \bar{X}^{jk}

$$\bar{X}^{jk} = \bar{X}^{jk-1} + t_k \cdot \left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_k} \right)_{\bar{X}=\bar{X}^{jk-1}}. \quad (26)$$

В течение всего цикла с номером j , т. е. начиная с $k = 1$ и заканчивая $k = n$, изменяются все n проектных параметров начального вектора \bar{X}^{j0} . После чего последнему вектору \bar{X}^{jn} присваивается номер $\bar{X}^{(j+1)0}$ и этот вектор берется как начальный вектор для вычислений в $(j + 1)$ -м цикле.

Расчёт заканчивается вектором \bar{X}^{jn} при выполнении, по крайней мере, одного из двух условий окончания расчёта: ($j \geq M$) или при двукратном выполнении неравенства:

$$\left| f(\bar{X}^{jn}) - f(\bar{X}^{jn-1}) \right| < \varepsilon. \quad (27)$$

Полученная последовательность вычисленных векторов параметров может быть записана как:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \bar{X}^{11}, \bar{X}^{12}, \dots, \bar{X}^{1n} \right\} \\ \left\{ \bar{X}^{21}, \bar{X}^{22}, \dots, \bar{X}^{2n} \right\} \\ \dots \\ \left\{ \bar{X}^{j1}, \bar{X}^{j2}, \dots, \bar{X}^{jn} \right\} \end{array} \right\}. \quad (28)$$

3.1. Алгоритм градиентного метода покоординатного спуска

Шаг 1. Задать n – количество оптимизируемых параметров, их минимальные и максимальные границы допустимых диапазонов и целевой функционал $f(\bar{X})$, который необходимо максимизировать.

Соответственно, начальный вектор оптимизируемых параметров \bar{X}^{10} будет включать в себя минимальные граничные значения заданных диапазонов оптимизируемых параметров.

Задать: ε – малое положительное число $0 < \varepsilon < 1$;

M – предельное число циклов расчёта оптимизации.

Шаг 2. Задать номер цикла $j = 1, \dots, M$.

Шаг 3. Проверить условие $j \leq M$:

а) если $j > M$, то $\bar{X}_{opt} = \bar{X}^{jn}$, расчёт окончен;

б) если $j \leq M$, то перейти к шагу 4.

Шаг 4. Задать $k = 1, \dots, n$.

Шаг 5. Проверить условие $k \leq n$:

а) если $k \leq n$, то перейти к шагу 6;

б) если $k = n + 1$, то положить $j = j + 1$,

$\bar{X}^{(j+1)0} = \bar{X}^{jn}$ и перейти к шагу 3.

Шаг 6. Вычислить градиент функции $\nabla f(\bar{X}^{jk})$ как частную производную целевого функционала $f(\bar{X})$ по k -тому проектному параметру x_k методом численного дифференцирования

$$\nabla f(\bar{X}^{jk}) = \left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_k} \right)_{\bar{X}=\bar{X}^{jk-1}}. \quad (29)$$

Суть метода численного дифференцирования состоит в том, что целевая функция $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом Ньютона $P(x)$, который дифференцируется. При этом, чем меньше расстояние между узлами интерполяции, тем точнее полученный результат дифференцирования.

Узлы интерполяции равно отстоят друг от друга, то есть образуют арифметическую прогрессию, разность которой обозначается как:

$$\begin{aligned} x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = \\ = x_0 + 2 \cdot h, \dots, x_n = x_0 + m \cdot h, \end{aligned} \quad (30)$$

где h – шаг между узлами интерполяции.

Получается интерполяционная формула Ньютона функции $P(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0) + \\ + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{h^3 \cdot 3!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

где

– разности функции первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_0 &= f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0; \\ \Delta y_1 &= f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1; \\ \Delta y_2 &= f(x_3) - f(x_2) = y_3 - y_2; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

– разности функции второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = \\ &= (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0; \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = \\ &= (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1; \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

– разность третьего порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \\ &= (\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0) = \\ &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Вводится независимая переменная q :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + h \cdot q; \\ \frac{x - x_0}{h} &= q; \\ \frac{x - x_1}{h} &= \frac{x - (x_0 + h)}{h} = \frac{(x - x_0)}{h} - \frac{h}{h} = (q - 1); \\ \frac{x - x_2}{h} &= \frac{x - (x_0 + 2 \cdot h)}{h} = (q - 2); \\ \frac{x - x_3}{h} &= \frac{x - (x_0 + 3 \cdot h)}{h} = (q - 3); \end{aligned} \right. \quad (35)$$

Подставляются полученные выражения в многочлен Ньютона:

$$\begin{aligned} f(x) = P(x_0 + h \cdot q) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot h \cdot q + \\ + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!} \cdot h^2 \cdot q \cdot (q - 1) + \frac{\Delta^3 y_0}{h^3 \cdot 3!} \cdot h^3 \cdot q \cdot \\ \cdot (q - 1) \cdot (q - 2) + \dots; \\ f(x) = P(x_0 + h \cdot q) = y_0 + \Delta y_0 \cdot q + \\ + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot q \cdot (q - 1) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot q \cdot (q - 1) \cdot (q - 2) + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Дифференцируется сложная функция:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + h \cdot q, \\ \frac{dx}{dq} &= h; \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq} &= \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dx} \cdot \frac{dx}{dq}, \\ \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dx} &= \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq}; \end{aligned} \right. \quad (37)$$

Дифференцируется интерполяционный многочлен Ньютона по независимой переменной q :

$$\begin{aligned} f(x) = P(x_0 + h \cdot q) = y_0 + \Delta y_0 \cdot q + \\ + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot q \cdot (q - 1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot q \cdot (q - 1) \cdot (q - 2) + \dots; \\ \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq} = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \cdot q + \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{2} \cdot q^2 - \Delta^3 y_0 \cdot q + \frac{\Delta^3 y_0}{3} = \\ = \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (2q - 1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot (3q^2 - 6q + 2) + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

Дифференцируется интерполяционный многочлен Ньютона по переменной x :

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} = \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq} = \\ = \frac{1}{h} \cdot [\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (2q - 1) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot (3q^2 - 6q + 2) + \dots] \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, получается численное дифференцирование целевого функционала $f(\bar{X})$ по k -му проектному параметру x_k :

$$\frac{df(\bar{X})}{dx_k} = \frac{1}{h} \cdot \left[\begin{aligned} &\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (2q-1) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot (3q^2 - 6q + 2) + \dots \end{aligned} \right], \quad (40)$$

где h – шаг между узлами проектного параметра x_k интерполяции целевого функционала $f(\bar{X})$;

$$q = \frac{x_k - x_{k_0}}{h}; \quad (41)$$

– разность целевого функционала $f(\bar{X})$ первого порядка:

$$\Delta y_0 = f(x_1, \dots, x_{k_1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k_0}, \dots, x_n); \quad (42)$$

– разность целевого функционала $f(\bar{X})$ второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = f(x_1, \dots, x_{k_2}, \dots, x_n) - 2 \cdot f(x_1, \dots, x_{k_1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{k_0}, \dots, x_n); \quad (43)$$

– разность целевого функционала $f(\bar{X})$ третьего порядка:

$$\Delta^3 y_0 = f(x_1, \dots, x_{k_3}, \dots, x_n) - 3 \cdot f(x_1, \dots, x_{k_2}, \dots, x_n) + 3 \cdot f(x_1, \dots, x_{k_1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{k_0}, \dots, x_n). \quad (44)$$

Все остальные проектные параметры вектора $\bar{X}\{x_1, \dots, x_n\}$ равны соответствующим параметрам вектора $\bar{X}^{jk-1}\{x_1, \dots, x_n\}$, кроме проектного параметра x_k .

Шаг 7. Задать t_k для k -го проектного параметра.

Шаг 8. Вычислить новый вектор параметров \bar{X}^{jk}

$$\bar{X}^{jk} = \bar{X}^{jk-1} + t_k \cdot \left(\frac{\partial f(\bar{X})}{\partial x_k} \right)_{\bar{X}=\bar{X}^{jk-1}}. \quad (45)$$

Шаг 9. Проверить выполнение условия:

$$f(\bar{X}^{jk}) - f(\bar{X}^{jk-1}) \geq 0 \quad (46)$$

а) если условие выполнено, то перейти к шагу 10;

б) если нет, то положить $t_k = \frac{t_k}{2}$ и перейти к шагу 8.

Шаг 10. Проверить выполнение условия:

$$|f(\bar{X}^{jk}) - f(\bar{X}^{jk-1})| < \varepsilon \quad (47)$$

а) если в двух последовательных циклах с номерами j и $(j-1)$ условие выполняется по всем проектным параметрам, то расчёт в точке \bar{X}^{jn} окончен и $\bar{X}_{opt} = \bar{X}^{jn}$;

б) если условие не выполнено, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 5.

4. Иллюстративный пример

По приведенным соотношениям и алгоритму проведена оптимизация вектора оптимизируемых параметров \bar{p} одноступенчатого УРО со стартовой массой $m_0 = 2000$ кг и массой полезного груза $m_{пг} = 600$ кг. Оптимизируемые параметры выбирались из условия максимума целевого функционала $L = L(\bar{p})$ км – расстояния на которое доставляется масса полезного груза.

В качестве силовой установки на УРО использовался РДТТ.

Кроме приведенных выше, использовались следующие данные:

– широта точки старта $\varphi_{cm} = 40,0$ град;

– азимут пуска $\phi = 40$ град;

– высота точки старта $H_{cm} = 10$ м;

– твёрдое топливо плотностью $\rho = 1760$ кг/м³, температурой горения $T_g = 3755,0$ К с показательной зависимостью скорости горения от давления

$$u = u_1 \cdot (p_k)^v, \quad (48)$$

где $u_1 = 0,003$ м/с;

$$v = 0,251.$$

Была задана следующая аэродинамическая схема УРО: головная часть, представляющая сочетание конической и цилиндрической форм, цилиндрический корпус, выполненный из композиционного материала с задним расположением стабилизаторов. Полная длина головной части принята равной

$L_{ГТН} = 2,5$ м, наружный диаметр корпуса УРО принят равным $D_{УО} = 0,75$ м.

Активный участок траектории состоял из вертикального участка движения и участка разворота.

Продолжительность вертикального участка движения принята равной $t_{vert} = 3,0$ с.

Программа изменения угла тангажа на участке разворота задавалась линейной зависимостью от времени, окончание участка разворота траектории на АУТ определялось временем работы маршевого РДТТ.

Для заданных: стартовой массы $m_0 = 2000$ кг и массы головной части $m_{pg} = 600$ кг определялся параметр относительной конечной массы μ_k [-], определяющий максимально возможный запас топлива на УРО.

При оптимизации использовались: математическая модель УРО, основные элементы которой были построены на физических соотношениях; данные о прототипах, а также статистические зависимости для определения габаритных и массовых характеристик отдельных элементов и подсистем УРО, слабо влияющих на целевой функционал.

Выбраны следующие оптимизируемые параметры и диапазоны изменений их значений:

– коэффициент начальной тяговооруженности $v_n = (0,16 \div 0,28)[-]$;

– давление в камере сгорания (КС) РДТТ $p_k = (60 \div 75)$ [кгс/см²];

– диаметр среза сопла маршевого РДТТ $D_a = (0,35 \div 0,5)$ [м];

– угол полураствора на срезе сопла $\beta_a = (9 \div 12)$ [град];

– угол тангажа в конце АУТ $\varphi_{АУТ} = (24 \div 33)$ [град], как параметр траектории.

Результаты оптимизации параметров в указанных диапазонах их применения приведены в табл. 1.

Как показали результаты исследований (см. табл. 1, рис. 2), целевой функционал – дальность полета L км – существенно зависит от оптимальных значений проектных параметров \bar{P}_{opt} . Поскольку изменение рассматриваемых проектных параметров в заданных диапазонах их значений оказывает существенное влияние на максимизацию выбранного целевого функционала дальности полета L , то оптимизация этих (и, возможно, других) параметров для конкретных целевых задач представляется необходимым этапом процесса проектирования УРО. Предложенная методика может быть без существенных доработок использована для оптимизации проектных параметров и некоторых других классов УРО.

Таблица 1
Результаты оптимизации вектора рассматриваемых проектных параметров \bar{P}_{opt} в заданных диапазонах варьирования их значений с целью максимизации целевого функционала дальности полета $L(\bar{P}_{opt})$

Параметры	Размерность	Допустимый диапазон		Оптимальные значения \bar{P}_{opt}	Целевой функционал $L(\bar{P}_{opt})$
		min	max		
v_n	-	0,16	0,28	0,160	354,458 (км)
p_k	кгс/см ²	60,00	75,00	73,743	
D_a	м	0,35	0,50	0,419	
β_a	град	9,00	12,00	9,000	
$\varphi_{АУТ}$	град	24,00	33,00	29,355	

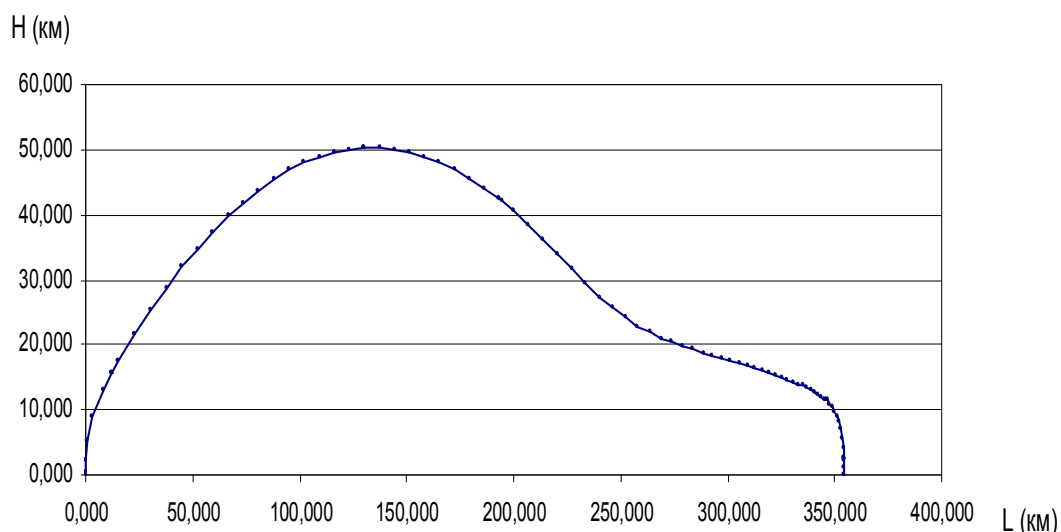


Рис. 2. Кривая полета УРО: H – высота полета (км); L – дальность полета (км)

Выводы

Сформулирована комплексная задача оптимизации проектных параметров и программ управления движением одноступенчатого УРО с маршевым РДТТ. Показана структура математической модели УРО, приведены элементы математической модели, позволившие свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств, неравенств и дифференциальных связей. Приведенные элементы математической модели и алгоритм оптимизации могут быть использованы проектными организациями на начальном этапе проектирования объектов ракетно-космической техники различного назначения.

Литература

1. Сенькин, В. С. Исследование чувствительности целевого функционала к вариациям проектных параметров управляемого ракетного объекта [Текст] / В. С. Сенькин, С. В. Сюткина-Доронина // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2016. – № 3 (130). – С. 9 - 17.
2. Орлов, Б. В. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе [Текст] / Б. В. Орлов, Г. Ю. Мазинг. – М. : Машиностроение, 1968. – 535 с.
3. Абугов, Д. И. Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива [Текст] / Д. И. Абугов, В. М. Бобылев. – М. : Машиностроение, 1987. – 272 с.
4. Тарасов, Е. В. Алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата [Текст] / Е. В. Тарасов. – М. : Машиностроение, 1970. – 364 с.
5. Анпазов, Р. Ф. Баллистика управляемых ракет дальнего действия [Текст] / Р. Ф. Анпазов, С. С. Лавров, В. П. Мишин. – М. : Наука, 1966. – 307 с.
6. Лебедев, А. А. Баллистика ракет [Текст] / А. А. Лебедев, Н. Ф. Герасюта. – М. : Машиностроение, 1970. – 244 с.
7. Разумеев, В. Ф. Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе [Текст] / В. Ф. Разумеев, Б. К. Ковалев. – М. : Машиностроение, 1976. – 356 с.
8. Tewari, Ashish. *Advanced control of aircraft, spacecraft and rockets [Text]* / Ashish Tewari. – Kanpur : John Wiley & Sons, 2011. – 456 p. – ISBN 978-0-470-74563-2.
9. Сенькин, В. С. Выбор проектных параметров и программ управления на начальном этапе проектирования ракет-носителей [Текст] / В. С. Сенькин, А. П. Сарычев // *Техническая механика*. – 2014. – № 3. – С. 33 - 47.
10. Батищев, Д. И. Поисковые методы оптимального проектирования [Текст] / Д. И. Батищев. – М. : Сов. радио, 1975. – 216 с.
11. Сенькин, В. С. К вопросу о постановке задачи оптимизации проектных параметров ракетного двигателя на твердом топливе [Текст] / В. С. Сенькин // *Техническая механика*. – 2014. – № 4. – С. 39 - 52.
12. Сенькин, В. С. К выбору параметров космического аппарата и апогейного ракетного двигателя на твердом топливе [Текст] / В. С. Сенькин // *Техническая механика*. – 2015. – № 3. – С. 18 - 29.
13. Сенькин, В. С. Комплексная задача оптимизации проектных параметров и программ управления твердотопливной ракеты-носителя сверхлегкого класса [Текст] / В. С. Сенькин // *Техническая механика*. – 2012. – № 2. – С. 106 - 121.
14. Сенькин, В. С. Оптимизация проектных параметров ракеты-носителя сверхлегкого класса [Текст] / В. С. Сенькин // *Техническая механика*. – 2009. – № 1. – С. 80 - 88.
15. Кротов, В. Ф. Методы и задачи оптимального управления [Текст] / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М. : Наука, 1973. – 446 с.
16. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкrelидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1969. – 385 с.
17. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления [Текст] / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М. : Мир, 1972. – 544 с.
18. Алпатов, А. П. Комплексная задача оптимизации основных проектных параметров и программ управления движением ракет космического назначения [Текст] / А. П. Алпатов, В. С. Сенькин // *Техническая механика*. – 2011. – № 4. – С. 98 - 113.
19. Сенькин, В. С. Оптимизация программ управления полетом и оптимизация тяги маршевой двигательной установки управляемого ракетного объекта [Текст] / В. С. Сенькин // *Техническая механика*. – 2000. – № 1. – С. 46 - 50.
20. Сенькин, В. С. Выбор программы управления движением космического аппарата при переходе с начальной круговой орбиты на заданную конечную круговую орбиту [Текст] / В. С. Сенькин // *Техническая механика*. – 2003. – № 2. – С. 79 - 87.
21. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст] : учебник для вузов / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – 2-е изд., исправл. – М. : Высш. шк., 2005. – 544 с.

References

1. Sen'kin, V. S., Syutkina-Doronina, S. V. Issledovanie chuvstvitel'nosti tselevogo funktsionala k variatsiyam proektnykh parametrov upravlyаемого raketnogo ob'ekta [Study of sensitivity of the target functional to variations of the project parameters of the controlled rocket]. *Aerospace technic and technology*, 2016, no. 3, pp. 9 – 17.
2. Orlov, B. V., Mazing, G. Yu. *Termodinamicheskie i ballisticheskie osnovy proektirovaniya raketnykh dvigatelei na tverdom toplive* [The thermodynamic and ballistic bases of designing of the solid-propellant rocket engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 535 p.
3. Abugov, D. I., Bobylev, V. M. *Teoriya i raschet raketnykh dvigatelei tverdogo topliva* [The theory and calculation of the solid-propellant rocket engines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987. 272 p.
4. Tarasov, E. V. *Algoritm optimal'nogo proektirovaniya letatel'nogo apparata* [The algorithm of optimal engineering of the rocket]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 364 p.
5. Appazov, R. F., Lavrov, S. S., Mishin V. P. *Ballistika upravlyаемykh raket dal'nego deistviya* [The ballistics of the controlled long-range rockets]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 307 p.
6. Lebedev, A. A., Gerasyuta, N. F. *Ballistika raket* [The ballistics of the rockets]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970. 244 p.
7. Razumev, V. F., Kovalev, B. K. *Osnovy proektirovaniya ballisticheskikh raket na tverdom toplive* [Fundamentals of design of the ballistic solid-propellant rockets]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 356 p.
8. Tewari, Ashish. *Advanced control of aircraft, spacecraft and rockets*. Kanpur, John Wiley & Sons Publ., 2011. 456 p. ISBN 978-0-470-74563-2.
9. Sen'kin, V. S., Sarychev, A. P. Vybor proektnykh parametrov i programm upravleniya na nachal'nom etape proektirovaniya raket-nositelei [The choice of the design parameters and programs of the motion control at the initial stage for designing launch vehicles]. *Tekhnicheskaya mekhanika – Journal of Technical mechanics*, 2014, no. 3, pp. 33 – 47.
10. Batishchev, D. I. *Poiskovye metody optimal'nogo proektirovaniya* [The search methods of the optimal designing]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1975. 216 p.
11. Sen'kin, V. S. K voprosu o postanovke zadachi optimizatsii proektnykh parametrov raketnogo dvigatelya na tverdom toplive [The problem of the optimization the design parameters of the solid-propellant rocket engine]. *Tekhnicheskaya mekhanika – Journal of Technical mechanics*, 2014, no. 4, pp. 39 – 52.
12. Sen'kin, V. S. K vyboru parametrov kosmicheskogo apparata i apogeynogo raketnogo dvigatelya na tverdom toplive [The problem of a choice of spacecraft design parameters and its apogee solid rocket engine]. *Tekhnicheskaya mekhanika – Journal of Technical mechanics*, 2015, no. 3, pp. 18 – 29.
13. Sen'kin, V. S. Kompleksnaya zadacha optimizatsii proektnykh parametrov i programm upravleniya tverdotoplivnoi rakety-nositelya sverkhlegkogo klassa [The complex problem of the simultaneous optimization of the design parameters and control programs of the super light solid launch vehicle]. *Tekhnicheskaya mekhanika – Journal of Technical mechanics*, 2012, no. 2, pp. 106 – 121.
14. Sen'kin, V. S. Optimizatsiya proektnykh parametrov rakety-nositelya sverkhlegkogo klassa [The optimization of project parameters of the ultralight class launch vehicle]. *Tekhnicheskaya mekhanika – Journal of Technical mechanics*, 2009, no. 1, pp. 80 – 88.
15. Krotov, V. F., Gurman, V. I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [The methods and problems of optimal control]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 446 p.
16. Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko, E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 385 p.
17. Braison, A., Kho, Yu-Shi. *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* [The applied theory of optimal control]. Moscow, Mir Publ., 1972. 544 p.
18. Alpatov, A. P., Sen'kin, V. S. Kompleksnaya zadacha optimizatsii osnovnykh proektnykh parametrov i programm upravleniya dvizheniem raket kosmicheskogo naznacheniya [The complex problem of the simultaneous optimization of the basic design parameters and programs of the motion control of space rockets]. *Tekhnicheskaya mekhanika – Journal of Technical mechanics*, 2011, no. 4, pp. 98 – 113.
19. Sen'kin, V. S. Optimizatsiya programm upravleniya poletom i optimizatsiya tyagi marshevoi dvigatel'noi ustanovki upravlyаемого raketnogo ob'ekta [The optimization of the flight control software and the optimization of rocket power for controlled rocket]. *Tekhnicheskaya mekhanika – Journal of Technical mechanics*, 2000, no. 1, pp. 46 – 50.
20. Sen'kin, V. S. Vybor programmy upravleniya dvizheniem kosmicheskogo apparata pri perekhode s nachal'noi krugovoi orbity na zadannuyu konechnuyu krugovuyu orbitu [The problem of the choice of programs of the motion control of the spacecraft for the orbital maneuver resulting in the spacecraft transfer from initial circular orbit into given final circular orbit]. *Tekhnicheskaya mekhanika – Journal of Technical mechanics*, 2003, no. 2, pp. 79 – 87.

21. Panteleev, A. V., Letova, T. A. *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh* [The methods of optimization in examples and exercises]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 2005. 544 p.

Поступила в редакцию 8.02.2017, рассмотрена на редколлегии 15.03.2017

ДО ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЕКТНИХ ПАРАМЕТРІВ І ПРОГРАМ УПРАВЛІННЯ РАКЕТНОГО ОБ'ЄКТА З РАКЕТНИМ ДВИГУНОМ НА ТВЕРДОМУ ПАЛИВІ

С. В. Сюткіна-Дороніна

Виконано постановку комплексної задачі спільної оптимізації програм управління і проектних параметрів одноступінчатого керованого ракетного об'єкта (КРО) з маршовим ракетним двигуном на твердому паливі (РДТП). Задача сформульована як задача теорії оптимального управління з обмеженнями у вигляді рівностей і диференціальних зв'язків. До складу параметрів, які оптимізуються, включено проектні параметри КРО, параметри, що визначають програми управління рухом КРО, а також параметри, які характеризують рух на активній ділянці траєкторії, приведено елементи математичної моделі КРО, що дозволили звести задачу теорії оптимального управління до задачі нелінійного математичного програмування з обмеженнями у вигляді рівностей і диференціальних зв'язків. Запропоновано модифікований автором градієнтний метод оптимізації для вирішення сформульованої задачі, що дозволяє на початковому етапі проектування визначити оптимальні в заданому класі функцій програми управління рухом і раціональні значення параметрів КРО, які оптимізуються.

Ключові слова: керований ракетний об'єкт (КРО), маршовий ракетний двигун на твердому паливі (РДТП), початковий етап проектування, параметри, які оптимізуються, проектні параметри, програми управління рухом, цільовий функціонал, оптимізація, допустимі діапазони зміни параметрів, які оптимізуються.

THE PROBLEM OF THE OPTIMIZATION THE DESIGN PARAMETERS AND CONTROL PROGRAMS OF THE CONTROLLED ROCKET WITH SOLID PROPELLANT ROCKET ENGINE

S. V. Syutkina-Doronina

The complex problem of the simultaneous optimization of the control programs and design parameters of the controlled single-stage rocket with cruise solid propellant rocket engine is formulated. The problem is formulated as an problem of optimal control theory with limitations in the form of equalities and differential constraints. The structure of the optimized parameters of the solid propellant rocket engine includes design parameters of the controlled solid propellant rocket and parameters characterizing the programs of the motion control of the controlled solid propellant rocket and parameters characterizing the motion at the active section of the trajectory. The elements of the mathematical model of the controlled solid propellant rocket are presented what can be used to enable the problem of optimal control theory to be reduced to the nonlinear mathematical programming problem with limitations in the form of equalities and differential constraints. The modified by the author method of gradient optimization is offered for solving the above problem what can be used to determine the optimal motion control programs in the given class of functions and rational values of optimized parameters of the controlled solid propellant rocket at the initial phase of rocket design.

Keywords: the controlled rocket, the solid propellant rocket engine, the initial phase of engineering, the optimized parameters, the design parameters, the motion control programs, the target functional, the optimization, the allowable ranges of variations of the optimized parameters.

Сюткіна-Дороніна Светлана Васильевна – младший научный сотрудник отдела системного анализа и проблем управления, Институт технической механики НАН Украины и НКА Украины, Днепр, Украина, e-mail: sutkina-ne@mail.ru.

Syutkina-Doronina Svetlana Vasilevna – junior scientist of Department of System Analysis and Control Problems, The Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine, Dniepr, Ukraine, e-mail: sutkina-ne@mail.ru.