

УДК 517.958:539.4:629.7.02

С. А. ХАЛИЛОВ, В. Б. МИНТЮК, Д. А. ТКАЧЕНКО, В. В. КОПЫЧКО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина***СИНТЕЗ МЕТОДА ИДЕНТИФИКАЦИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНЫ**

*В проведении ранее предложенного авторами метода идентификации краевых условий ключевой является проблема решения промежуточных краевых задач. Это достаточно сложные краевые задачи на сопряжение конструктивных элементов разветвленных тонкостенных пространственных систем, каковыми являются несущие поверхности и корпуса конструкции летательных аппаратов. В решении проблемы идентификации краевых условий для выделенного блок-элемента существенную помощь может оказать индустриальный метод конечных элементов. С другой стороны, метод идентификации краевых условий как таковой может помочь методу конечных элементов в плане выбора эффективного типа конечного элемента, характерного для рассматриваемого класса задач механики деформируемого твердого тела. Эта идея – «метод идентификации краевых условий ↔ метод конечных элементов» – положена в основу работы. Путем проведения многочисленных расчетов на частном примере довольно простой, но не тривиальной задачи показана плодотворность объединения двух по сути разных методов.*

**Ключевые слова:** базовая краевая задача, критериальное решение, идентификация краевых условий, взаимодействие метода идентификации краевых условий и метода конечных элементов.

**Введение**

Основная идея метода идентификации краевых условий (МИКУ) заключается в том, что исследование какой-либо сложной системы (не обязательно механической) можно свести к анализу одного выделенного ее блок-элемента, коль скоро адекватно установлены нетривиальные условия взаимодействия блока с оставшейся системой. Через указанные условия взаимодействия все свойства оставшейся системы трансформируются к выделенному блоку. Годом рождения этого метода следует считать 1991. Именно тогда была поставлена и решена задача об устойчивости силовой нервюры кессона крыла большегрузного самолета, взаимодействующей сложным образом с окружающей упругой средой. Первоначально метод был предназначен для решения вопросов устойчивости и колебаний [1, 2] с неизвестным параметром (критической нагрузки или собственных частот). Этот параметр является общим для всей силовой конструкции, но для его определения требовалось лишь решить задачу устойчивости или колебаний одного-единственного выделенного блока, что, несомненно, является неоспоримым достоинством метода. Во многих случаях этот метод оказывается более оперативным и более точным в сравнении с другими методами, например, с методом конечного элемента (МКЭ).

На протяжении следующих 10 – 15 лет шло становление метода [3 – 12]. Если сравнить время

становления МКЭ, со временем становления метода граничных интегральных уравнений (или метода граничного элемента), то названный срок невелик. За этот период были защищены три кандидатские диссертации по устойчивости элементов силового кессона крыла [13 – 15]. Этим работам предшествовала кандидатская диссертация [16], которую можно считать первой апробацией МИКУ. В дальнейшем работа шла в направлении саморазвития метода.

Следует отметить, что центр тяжести МИКУ приходится на постановку и решение ряда так называемых промежуточных задач [1 – 12]. При решении отмеченных задач привлекаются методы, органически входящие в МИКУ как составные его части: метод редукции (МР) полностью неоднородных краевых задач к полуоднородным, метод сопряжения конструктивных элементов (МСКЭ) и метод расширения области до канонической (МРОК) [17]. Таким образом, МИКУ является синтетическим методом, существенно дополненным указанными выше методами.

В дальнейшем оказалось, что МИКУ эффективен не только при решении задач устойчивости и колебаний сложных систем, но и в задачах статики, в которых отсутствует неизвестный параметр, что намного облегчает проведение метода. Но проблема идентификации краевых условий при этом сохраняется. Процедура идентификации существенно может быть упрощена и оптимизирована, если воспользоваться услугами самого эффективного и индустри-

ального в настоящее время метода конечного элемента. В этом и заключается основная идея синтеза МИКУ с МКЭ. Если в оригинальном МИКУ рассмотрение проводилось по схеме: «система → выделенный блок-элемент и оставшаяся часть системы → анализ оставшейся системы по МКЭ с привлечением МРОК → идентификация краевых условий для блок-элемента → анализ блок-элемента», то теперь в задачах статики с привлечением МКЭ эта схема намного упрощается: «анализ всей системы с помощью МКЭ → идентификация краевых условий для блок-элемента по МКЭ → анализ выделенного блок-элемента по МИКУ».

По первой схеме требовалось построение матрицы жёсткости граничного контура выделенного элемента. Это функциональная матрица, связывающая удельные усилия и моменты, возникающие на границе оставшейся системы, которая является и границей выделенного блок-элемента. Далее с помощью этой функциональной матрицы жёсткости граничного контура строился функционал полной потенциальной энергии блок-элемента и выполнялась процедура решения вариационной задачи. Для построения указанной матрицы необходимо было поставить и решить ряд промежуточных задач. Во второй же схеме необходимость в построении функциональной матрицы жёсткости блок-элемента отпадает, поскольку по МКЭ сразу можно вычислить обобщённые перемещения граничного контура выделенного блок-элемента. Следовательно, идентифицировать краевые условия можно и по МКЭ с любой наперёд заданной точностью, поскольку с помощью МКЭ в форме метода перемещений можно наиболее точно определить компоненты обобщённых перемещений (отпадает необходимость определения напряжений по границе, которые получаются путём дифференцирования компонент вектора обобщённых перемещений). Вторая схема здесь и применяется.

Анализ самого выделенного элемента проводим путём решения неоднородной краевой задачи типа Дирихле. Это решение является аналитико-численным, и по предложенной ранее конструкции построения такого решения оно представляется в виде замкнутого аналитического выражения, содержащего конечное (в пределе – счётное) множество параметров, определяемых путём постановки и решения ряда базовых краевых задач, которые, в конечном счёте, сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Из сказанного следует, что МКЭ может оказать неоценимую услугу МИКУ.

Но существует и обратная связь, заключающаяся в том, что МИКУ может прийти на помощь МКЭ. Обсудим этот вопрос подробнее.

Пусть задана типовая конструкция аэрокосмической техники, являющаяся тонкостенной пространственной оболочечно-пластинчатой системой, подкреплённой всевозможными рёбрами жёсткости: стрингерами, шпангоутами, бимсами и т.д. Анализ такой системы по МКЭ требует проведения совокупности предварительных исследований: выбор типа элемента ( $\pi$  – проблема), степень детализации ( $n$  – проблема). Объединяя эти две проблемы, получим « $\pi$ - $n$  проблему». Если во главу угла поставить вопросы устойчивости, сходимости и точности, то можно сделать однозначный вывод: МКЭ уступает в отмеченном плане любым аналитическим методам. Из известной теоремы П. Лакса о взаимосвязи названных проблем следует, что для решения « $\pi$ - $n$  проблемы» необходимо обеспечить как устойчивость получения самих приближенных решений, так и устойчивость вычислительной процедуры их получения. При этом на первое место следует поставить именно проблему устойчивости. Известно, что с ростом порядка СЛАУ ее матрица все более и более вырождается, и, начиная с некоторого порядка при выбранной разрядной сетке чисел, она становится полностью вырожденной. Чтобы избежать такого вырождения, необходимо, прежде всего, обеспечить так называемую сильную минимальность координатной системы [18, 19]. Это значит, что наименьшее собственное значение матрицы СЛАУ как матрицы Грама полной и линейно независимой системы координатных функций в энергетическом пространстве  $\mathbf{H}(\cup \Omega_i)$ , где  $\Omega_i$  – область, занятая  $i$ -м конечным элементом, должно быть ограничено снизу. Но этого ещё недостаточно.

Выдвигается ещё требование – требование так называемой почти ортонормированности системы координатных функций: число обусловленности матрицы Грама линейно независимой и полной в энергетическом пространстве  $\mathbf{H}_d$  положительно определённого оператора  $\mathbf{L}$  системы координатных функций, например  $P$ -число обусловленности (отношение максимального собственного значения матрицы СЛАУ к минимальному), должно быть ограничено как сверху, так и снизу независимо от порядка  $n$  матрицы ( $n$  – конечное, хотя и довольно большое число). Но с увеличением  $n$  наименьшее собственное значение матрицы Грама не растёт, а наибольшее не падает, при конечном же значении  $n$   $P$ -число обусловленности не должно расти слишком быстро. Этот вопрос на примере решения основной бигармонической проблемы (задача изгиба жёстко защемлённой по контуру прямоугольной пластины) был подробно исследован в работе [20]. В указанной работе нами сравнивались координатные функции, предложенные различными авторами: косинус биномы М. М. Филоненко-Бородича, фундаменталь-

ные балочные функции А. Н. Крылова, функции В. М. Даревского и И. Л. Шарина, функции С. А. Халилова и функции В. Б. Минтюка (последние две функции являются полиномиальными) и финитные функции МКЭ. Основным выводом работы: наилучшей (сильно минимальной и почти ортонормированной) являются системы С. А. Халилова и В. Б. Минтюка, причём первая система оказалась в сравнении со второй предпочтительнее: скорость роста числа обусловленности для неё значительно меньше. Это объясняется тем, что данная координатная система, будучи ортонормированной в исходном пространстве  $L_2(\Omega)$ , имеет квазиортогональные первые и вторые производные, что означает её квазиортогональность в энергетическом пространстве  $H_1$  положительно определённого бигармонического оператора  $L$ . Результаты, полученные по этим двум системам при одном и том же числе неизвестных, полностью совпали (следствие того, что обе системы являются полиномиальными). Что касается МКЭ, то финитная координатная система этого метода оказалась наихудшей в обсуждаемом смысле. Более того, координатные системы М. М. Филоненко-Бородича, А. Н. Крылова, В. М. Даревского и И. Л. Шарина с вычислительной точки зрения являются неустойчивыми: в процессе вычисления появляются малые разницы больших чисел.

Каждой вариационной задаче механики деформированного твёрдого тела соответствует квадратичный непрерывный и ограниченный снизу функционал энергии деформирования. Условиями стационарности такого функционала являются дифференциальные уравнения Эйлера – Пуассона и естественные краевые условия. При решении задачи отыскания стационарной точки функционала полной энергии методом перемещений (в качестве аргументов функционала энергии выступают компоненты вектора перемещения, как и в общепринятом варианте МКЭ). Уравнения Эйлера – Пуассона по своему механическому смыслу являются уравнениями равновесия, а естественными краевыми условиями – уравнения равновесия узлов дискретизированной области  $\Omega$ . Поэтому в эквивалентной постановке любой положительно определённой задачи в виде краевой исходной является система разрешающих уравнений равновесия в перемещениях, а вместо естественных краевых условий выступают главные краевые условия (условия в перемещениях). При решении таких краевых задач нарушенными в той или иной степени оказываются лишь уравнения равновесия (в них появляется некоторый вектор невязки  $\Delta_n$ ), а краевые условия в перемещениях всегда можно выполнить точно.

Отсюда ещё одно, пожалуй, самое главное требование: необходимо назначить координатную сис-

тему такой, которая обеспечила бы стремление к нулю вектора  $\Delta_n$  с ростом  $n$  в любой открытой области  $\Omega'$ , целиком лежащей в заданной области  $\Omega$ , в которой и ставятся краевые задачи.

С. Г. Михлин [18, 19] выдвинул предложение и доказал теорему, условия которой являются достаточными, но не необходимыми для стремления  $\Delta_n \rightarrow 0$  при достаточно большом  $n$  (в пределе  $n \rightarrow \infty$ ), а именно: им было предложено в качестве координатной системы для данной краевой задачи выбрать систему собственных функций некоторого оператора  $M$ , сходного с исходным оператором  $L$ . Это хорошо, если проблема построения собственных функций оператора  $M$  довольно проста, но в задачах механики деформированного твёрдого тела это, к сожалению, не так. Надо искать системы координатных функций, которые, не являясь собственными функциями некоторого сходного оператора  $M$ , обеспечивали бы стремление невязки к нулю. Оказывается, такие системы существуют для краевых задач Дирихле в прямоугольной области. Ими являются функции  $H_i^{(\alpha)}(x) \cdot H_j^{(\beta)}(y)$ ,  $i, j, \alpha, \beta = 0.. \infty$  [21], где нижний индекс означает номер функции, а верхний индекс – конкретное семейство функций. Этот вопрос был подробно (конструктивно) исследован в работах [20, 22 – 29].

Возвращаясь к обсуждаемой теме, следует отметить, что финитная система координатных функций МКЭ не обеспечивает выполнение ни одного из перечисленных требований. Этот большой, на наш взгляд, недостаток МКЭ частично компенсируется решением « $\pi$ - $n$  проблемы».

Чтобы ввести ясность в данный вопрос, рассмотрим некоторые конечные элементы. Предположим, что условие устойчивости выполнено, тогда вопрос сходимости и точности получаемых решений может быть оценён следующим неравенством:

$$\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C(P_f, \Omega) \cdot n^{-k(P_f, \Omega)}, u \in H^2, \quad (1)$$

где  $u$  – точное решение;

$u_n$  – решение, полученное по МКЭ;

$C$  – константа Гельдера – Липшица, зависящая от типа конечного элемента  $P_f$  (обычно достаточно большая величина) и от свойств области  $\Omega$ , в которой отыскивается решение;

$n$  – целое положительное число, характеризующее степень разбивки;

$k(P_f, \Omega) > 0$  – действительное число, характеризующее порядок сходимости (обычно в получении подобных оценок принимается, что  $k > 0$  – целое).

Априорная оценка типа (1), являясь очень важной в теоретическом смысле, придаёт пользователю некоторую уверенность в правильности выбора параметра  $P_f$  (типа элемента) и степени разбивки области на конечные элементы. Однако на практике

она используется не часто по одной простой причине: константа Гельдера – Липшица редко поддается конкретизации и, как было отмечено выше, обычно довольно большая. Говоря иначе, малость величины  $n^{-k}$  не может служить оценкой близости приближенного решения  $u_n$  в сравнении с точным  $u$ , так как ожидаемая точность может быть «съедена» большой величиной константы «С»<sup>1</sup>.

Итак, конкретизируем (частично) неравенство (1) для разных типов конечных элементов (КЭ) на примере задачи о пластине. В табл. 1, заимствованной из монографии [30, с. 346] (обозначения изменены), представлены интересующие нас данные.

Таблица 1  
МКЭ к задаче о пластине

КЭ	Число узловых неизвестных	k	Предполагаемая гладкость
Треугольник Аргириса	21	4	6
Треугольник Белла	18	3	5
Прямоугольник Богнера – Фокса – Шмита	16	2	4
Треугольник Сие – Клафа – Точера	12	2	4
Приведенный треугольник Сие – Клафа – Точера	9	1	3
Сингулярный треугольник Зенкевича	12	1	3
Приведенный сингулярный треуг. Зенкевича	9	1	3

В этой таблице не приведены постоянные «С», поскольку они не известны. С точки зрения порядка аппроксимации  $k$  наилучшим среди приведенных типов конечных элементов следует признать треугольник Аргириса, однако это не означает, что этот элемент с учетом вычислительных аспектов является оптимальным. В совокупности требований, предъявляемых к типу элемента, оптимальным признан треугольник Белла. Обсуждение этого вопроса приведено в работе [30]. В приведенном ряде типов конечных элементов следующий – это прямоугольник Богнера – Фокса – Шмита. Имея ограниченную применимость, обусловленную прямоугольной декартовой системой координат, этот элемент является совместным: при переходе через общую границу соседних конечных элементов искомая функция и её нормальная производная не терпят разрывов. Но он не является равновесным: функция формы этого элемента не удовлетворяет бигармоническому уравнению<sup>2</sup>. Остальные элементы не обсуждаем ввиду

<sup>1</sup> Обычно в этих оценках указывается, что такая константа существует, и перечисляются ее аргументы. Величина же этой константы математиков не интересует, поскольку им важно установление факта её существования.

<sup>2</sup> Искомая функция, скажем прогиб пластины, содержит 16 коэффициентов-неизвестных, из них при 12 первых стоят функции бигармонические, а при четырех последних – эти функции не являются таковыми. С. А. Халиловым этот недостаток был уст-

прозрачности рассматриваемого вопроса. Что же касается последней колонки, в которой прогнозируется ожидаемая регулярность  $s$  в пространстве  $H^{(s)}$ , стоит отметить только то, что для прямоугольника Богнера – Фокса – Шмита этот прогноз действительно имеет место<sup>3</sup>.

Обсужденные выше существующие проблемы в МКЭ не являются единственными, но главной из них, на наш взгляд, является «л–n проблема». Переходя на обыденный язык, можно сказать, что эта проблема для *класса решаемых задач* может найти компромиссное решение: выбрать наиболее оптимальный тип конечного элемента  $P_f$  и степени разбивки  $n$  так, чтобы добиться выполнения таких основных требований, как устойчивость, сходимости и точность получаемого результата при наименьших ресурсах. В этом МКЭ могут оказать помощь наши критериальные решения неоднородных краевых задач Дирихле в той или иной области методом редукции, который является составной частью МИКУ в форме метода перемещений. Обсуждение этого вопроса приводится в следующем разделе.

## 1. Помощь метода идентификации краевых условий методу конечного элемента

Из сказанного выше становится ясным, что прежде чем приступить к решению по МКЭ какой-либо (сложной или не очень сложной) задачи, постановщик вынужден провести ряд исследований, касающихся, в первую очередь, выбора типа конечного элемента, который наиболее полно учитывал бы свойства ожидаемого решения, не оставляя при этом в стороне самые главные вопросы устойчивости, сходимости и точности. Говоря иначе, постановщик должен «перепробовать» ряд типов конечных элементов и при каждом типе решить одну и ту же задачу с различной степенью разбивки, а лишь затем принять окончательное решение по выбору как типа элемента, так и степени разбивки области. Тем самым исследователь должен пойти на компромисс при решении «л–n проблемы». Но постановщик не имеет возможности сравнить полученные по МКЭ решения с другими, то есть у него нет (или практически нет) критериев оценки качества решения в отмеченном смысле. Эмпирический приём, заключающийся в получении решений в различных приближениях, увеличивая количество неизвестных,

ранен: к указанным четырем функциям он добавил двойные ряды по специальному семейству функций, не вводя дополнительных неизвестных. В результате был получен модифицированный прямоугольный конечный элемент, который, оставаясь совместным, стал еще и равновесным.

<sup>3</sup> Это доказано теоремой, принадлежащей С. А. Халилову.

например, в  $2^k$  раз, все-таки не даёт возможности поставить точку в этом вопросе и принять окончательное решение. Можно привести не один пример, когда решения в двух соседних приближениях мало отличаются друг от друга, а искомое решение из-за медленной сходимости далеко ещё не достигнуто.

Вот тут-то на помощь может прийти системный метод МИКУ со всем своим арсеналом методов. Здесь первое место принадлежит методу построения так называемых критериальных решений. Критериальность подобных решений заключается в том, что они могут быть получены с любой наперёд заданной точностью как по искомым функциям (компонентам вектора обобщённых перемещений), так и по производным от них до требуемого порядка (усилия и моменты, через которые алгебраически выражаются напряжения, ответственные за прочность конструкции). Так, например, в задачах теории цилиндрических оболочек и прямоугольных пластин введением не очень большого количества неизвестных можно достигнуть точности по компонентам вектора перемещений до миллионных долей процента. Такая точность исследователю-проектировщику, понятно, не нужна. Его больше интересует точность по усилиям и моментам, которые допустимо определять с точностью до десятых долей процента. Здесь следует отметить, что представление о точности получаемых решений сильно изменилось: если ранее ссылались на так называемую «инженерную» точность, где допустимой считалась погрешность до 5%, то сейчас этот термин употребляется все реже и реже, когда термин «инженерная» заменяется термином «заданная». Вопрос точности получаемых решений особенно актуален, если речь идёт о композиционных материалах, особенно тогда, когда структура пакета по толщине – слоистая.

Нами обнаружено, что если достигнута относительная точность по перемещениям до  $\epsilon_{\text{и}} = 10^{-k_0}\%$ , то относительная погрешность по напряжениям будет не более  $\epsilon_{\sigma}$ , равного  $10^{-(k-4)}\%$  в точках, удалённых от края, и  $10^{-(k-5)}\%$  в точках, расположенных вблизи края. Этот результат вполне согласуется с теоремой А. А. Маркова об оценке производной многочлена через оценку максимума модуля значения самого многочлена [31, с. 336].

Какую же помощь может оказать МИКУ МКЭ?

Предложенные так называемые критериальные решения могут обеспечить любую заданную точность при наличии сравнительно малых вычислительных ресурсов (людских, временных, финансовых...) даже по напряжениям. Тогда для МКЭ открывается прямой путь к решению основных вопросов, поставленных в данном разделе. Ответы на эти вопросы исследователь может получить при условии, что ему известны аналитико-численные или

приближенные аналитические критериальные решения ряда базовых краевых задач. Однако по обстоятельствам, чаще всего от него не зависящим, он вынужден воспользоваться МКЭ как наиболее индустриальным методом при анализе сложной конструкции. Здесь для него намечаются, по крайней мере, два пути: первый состоит в том, чтобы предварительные исследования по выбору типа конечного элемента и густоты конечно-элементной сетки он должен будет провести самостоятельно, не обращаясь к МИКУ со всем арсеналом его методов; второй путь заключается в том, чтобы предварительные исследования выполнить по МИКУ. Тогда исследователем будет получен полный набор рекомендаций как по выбору типа конечных элементов, характерных для моделей его конструкции, так и по степени разбивки конструкции на конечные элементы. Кроме решения этих двух вопросов постановщик будет иметь «под рукой» конструктивную оценку точности решения по МКЭ.

Но может оказаться так, что, в отличие от решения базовых краевых задач по МИКУ (методом редукции), выработанные рекомендации, полученные по МИКУ, не могут быть обеспечены даже самыми современными МКЭ-технологиями, программными пакетами (Nastran, Ansys, SolidWorks и т. д.) из-за необходимости введения большого количества неизвестных, при которых матрица СЛАУ МКЭ из-за быстрого роста её P-числа обусловленности может оказаться близкой к вырожденной или вовсе вырожденной. Если такой экзотический случай имеет место, то исследователь может уменьшить заказанную ему рекомендациями МИКУ сверхвысокую точность и получить по обратной связи МКЭ с МИКУ в своё распоряжение новое критериальное решение, но уже обладающее меньшей точностью. Однако даже в этом случае точность решения задач по МИКУ все равно будет превосходить точность, получаемую по МКЭ. И наконец, имеются другие варианты взаимодействия МИКУ и МКЭ, но их обсуждение здесь опускается.

## 2. Помощь метода конечного элемента методу идентификации краевых условий

Прежде чем перейти к обсуждению темы, представленной в заголовке данного пункта, обратимся к оригинальной схеме МИКУ, приведённой во введении. Реализация метода осуществляется в три этапа. В первую очередь надо разделить систему на две части, то есть выделить блок-элемент и оставшуюся часть системы с установлением обратной связи (связей). По границам выделенного блока и оставшейся части в зависимости от математических моделей элементов, входящих в ту или иную часть, необхо-

димом ввести неизвестные функции (поскольку речь идёт о методе перемещений, то это кинематические функции), так что для обеих частей имеет место неоднородная краевая задача Дирихле. В дальнейшем необходимо установить связь между введёнными кинематическими краевыми функциями и функциями статическими, ими индуцируемыми, то есть построить так называемую функциональную матрицу жёсткости края. Эта матрица служит основой для анализа выделенного блок-элемента. Введённые выше неизвестные функции перемещений в дальнейшем определяются из условия равновесия сил, приложенных к оставшейся системе и выделенной её части (напомним, что речь идёт о методе перемещений). Теперь становится ясным, что центр тяжести МИКУ падает на решение задачи второго этапа – задачи идентификации краевых условий. И как можно понять, последняя задача является достаточно сложной даже в статическом случае. Она ещё более усложняется в задачах устойчивости и колебаниях системы: появляется ещё один неизвестный (основной) параметр – параметр критической нагрузки в задачах устойчивости или параметр собственной частоты в задачах о спектре собственных колебаний всей конструкции. Здесь отметим только то, что для решения последних задач нами предложено два встречных метода последовательных уточнений этих параметров. А третий этап очевиден – это анализ при установленных краевых условиях выделенного блок-элемента, который можно провести более тщательно с учётом всевозможных нюансов, чем анализ всей заданной системы. Следует отметить, что при проведении метода может появиться необходимость решения достаточно сложной задачи о чувствительности.

Обратимся теперь ко второй схеме проведения МИКУ, в которую включён и МКЭ. При функционировании этой схемы краевые условия известны и идентифицированы по МКЭ, и нет необходимости в построении функциональной матрицы жёсткости граничного контура для выделенного блок-элемента. Таким образом, здесь применим метод редукции неоднородной краевой задачи Дирихле к ряду базовых. Реализацию метода рассмотрим на простейшем примере – задачи об изгибе прямоугольной пластины (классическая модель) при неоднородных краевых условиях Дирихле. Вкратце опишем конструкцию решения.

### 3. Реализация метода редукции

Рассмотрим краевую задачу в прямоугольной области с размерами  $2a \times 2b$ , приведённой к квадрату  $\Omega = \{(x, y): -1 < x(y) < 1\}$ , описываемую дифференциальным уравнением

$$Lw \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{qa^4}{D} \text{ в } \Omega \quad (2)$$

и неоднородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} w(-1; y) &= \varphi_1(y), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=-1} = \varphi_3(y), \\ w(+1; y) &= \varphi_2(y), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=+1} = \varphi_4(y), \\ w(x; -1) &= f_1(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=-1} = f_3(x), \\ w(x; +1) &= f_2(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=+1} = f_4(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $w(x, y)$  – функция прогиба пластины;

$q(x, y)$  – функция давления из некоторого класса;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жёсткость пластины постоянной толщины  $h$ ;

$E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины соответственно;

$\lambda = a/b$  – параметр удлинения пластины.

Прежде чем переходить к построению решения краевой задачи (2), (3), необходимо обсудить гладкость ожидаемого решения в зависимости от гладкости входных данных: функции внешней нагрузки  $q(x, y)$ , функций, присутствующих в правых частях краевых условий (3) и, конечно же, влияние сингулярных (угловых) точек границы.

Предположим, что функция  $q(x, y) \in L_2(\Omega)$ , тогда из условий разрешимости задачи (требование конечности полной потенциальной энергии деформирования) и механического смысла прогибов и углов поворота как на границе, так и в области следует, что

$$w(x, y) \in H^{(2)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\Gamma) \subset H^{(2)}(\bar{\Omega}). \quad (4)$$

Включение (4) предопределяет наименьшее требование, которое необходимо наложить на гладкость краевых функций из (3), а именно: потребовать непрерывную дифференцируемость в области их задания. Если гладкость правой части дифференциального уравнения и краевых функций более высокая, то и само решение обладает более высокой гладкостью. Однако в составе внешней нагрузки могут присутствовать сосредоточенные по некоторым линиям или даже в точке силы и моменты, тогда функцию  $q$  следует трактовать как обобщённую (распределение или функционалы). Во всех этих случаях при однородных краевых условиях (*базовая задача*) решение записывается через функцию Грина  $G(x, y, \xi, \eta)$ , впервые построенную в работе [25]:

$$w_q(x, y) = \iint_{\Omega' \subset \Omega} G(x, y, \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (5)$$

где  $\Omega'$  – носитель функции  $q(x, y)$ ;  $w_q(x, y)$  представляет собой специальное частное решение.

Но здесь следует отметить, что построение функции Грина – процедура непростая и довольно утомительная.

В конкретных частных случаях в зависимости от вида области  $\Omega'$  специальное частное решение  $w_q(x, y)$  удобно представить в виде рядов по системе собственных функций бигармонического оператора [24] или рядами по ортонормированным в  $H_1$  функциям. И в этих вариантах решение  $w_q(x, y)$  записывается в замкнутом виде. Но здесь тоже имеются свои известные трудности.

Существует ещё один вариант – обращение к прямым методам математической физики. Поскольку далее рассматривается задача при  $q(x, y) \in C^{(\infty)}$ , можно воспользоваться процедурой ортогонализации в форме Бубнова – Галеркина или энергетическим методом Рэлея – Ритца (эти методы эквивалентны, поскольку оператор  $L$  из (2) – положительно определённый).

Перейдём к вопросу о влиянии сингулярных (угловых) точек границы на гладкость искомого решения. Для выпуклых многоугольников с конечным числом угловых точек (граница типа Липшица, а тем более граница, удовлетворяющая условиям конуса или  $L$ -рога), в которых нормаль к границе не существует (кривизна терпит бесконечный разрыв), в зависимости от величины угла между двумя касательными, проведенными в угловой точке границы, можно установить более высокую гладкость, чем принадлежность решения классу  $H^{(2)}(\Omega)$ .

Вопрос о влиянии сингулярных точек границ на гладкость решений эллиптических краевых задач получил широкую огласку с середины прошлого столетия. Именно тогда эта проблема «расцвела махровым цветом». К её решению в различных вариантах и постановках подключились многие исследователи как в СНГ, так и за рубежом. Но подходы математиков, как всегда отличающиеся тонкостью и изощрённостью, и прикладников были различны. Отметим, прежде всего, основополагающую работу В. А. Кондратьева [32], которому путём введения специального класса весовых функций удалось поставить первую точку в решении данной проблемы. Нельзя умолчать об интересном подходе А. И. Каландия [33] к решению этой проблемы. С. М. Белоносов к решению той же задачи подошёл по-другому [34], обратившись к интегральным преобразованиям в задачах математической физики. А далее, как из рога изобилия, посыпались работы армянской школы механиков, которые о клине разнообразили рассмотрением составного клина. Важно отметить работу В. Г. Мазьи и Б. А. Пламеневского [35], в которой предложен кон-

структивный метод определения констант при однородных сингулярных решениях в зависимости от входных данных задачи на гранях клина. К концу прошлого столетия публикации по этой проблеме пошли на спад, однако вопрос о принадлежности априори известного сингулярного решения более гладкому классу функций остаётся открытым. Об этом свидетельствует приводимая ниже теорема, имеющая большое значение, например, в механике деформируемого твёрдого тела. Теорема была сформулирована и доказана ещё в начале 90-х годов прошлого столетия С. А. Халиловым, и наш авторский коллектив с тех пор постоянно ею пользуется. Правда, она была только анонсирована в работах [17, 25, 27], мало известных широкой публике. Здесь наряду с теоремой приведём и ключевые моменты её доказательства.

**Т е о р е м а** (С. А. Халилова):

*Пусть решение основной бигармонической проблемы в двумерной области  $\Omega$ , удовлетворяющей условию Липшица, принадлежит классу  $H^{(2)}(\Omega)$ . Тогда это же решение принадлежит классу  $H^{(4)}(\Omega)$ , если угол  $2\alpha$  между касательными в угловой точке строго меньше  $\alpha_0 = 126,2837099741076^\circ$ .*

В теореме идёт речь об отыскании асимптотики однородных решений (оставляющих конечную энергию деформирования) в краевой задаче

$$Lu = 0 \quad \text{в } \Omega_k, \quad (6)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_k, \quad (7)$$

где  $\Omega_k$  – область, занятая клином, с границей  $\Gamma_k$ .

Для доказательства воспользуемся статико-геометрической аналогией А. И. Лурье [36], согласно которой однородной краевой задаче (6), (7) соответствует как задача о плоском напряжённом состоянии ( $u$  – функция Эри при отсутствии напряжений на сторонах клина), так и задача изгиба клиновидной области с жёстко закреплённой границей (тогда  $u$  – функция прогиба). Следовательно, можно решать одну из этих двух задач. Рассмотрим, например, плоскую задачу теории упругости (ПЗТУ), перейдя от краевой задачи (6), (7) к эквивалентной задаче, сформулированной в перемещениях в полярной системе координат  $(r, \theta)$ , как это выполнено в [37]. Компоненты вектора перемещений  $u, v$  определим в виде

$$u = r^\lambda f_1(\theta), \quad v = r^\lambda f_2(\theta), \quad r \in (0, R), \quad \theta \in (-\alpha, +\alpha), \quad (8)$$

где  $\lambda$  – здесь неизвестный комплексный параметр, характеризующий решение при  $r \rightarrow 0$ ;

<sup>4</sup> Мы приводим такую длину мантииссы потому, что считаем это принципиальным моментом: так как с приближением к углу такой величины слева особенность отсутствует, а после перехода через этот угол она сразу появляется.

$f_i(\theta)$ ,  $i = 1, 2$  – бесконечно дифференцируемые функции.

Подставив решение (8) в исходные уравнения относительно «и» и «ν», придём к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций  $f_i$ , решение которых записывается в тригонометрической форме. Выполнив далее однородные краевые условия в напряжениях на границе клина, получим однородную СЛАУ четвёртого порядка относительно четырёх постоянных интегрирования. Приравняв к нулю определитель этой системы, придём к трансцендентному уравнению относительно искомого параметра  $\lambda$ :

$$\sin(2\alpha\lambda) = \pm\lambda \sin(2\alpha). \quad (9)$$

Наличие в правой части уравнения (9) знака «±» объясняется тем, что матрицу СЛАУ четвёртого порядка легко преобразовать к блочно-диагональной, в каждом блоке которой содержится всего две неизвестные постоянные. Приравнивая к нулю определители этих блоков, получаем два уравнения (9). Решая трансцендентное уравнение, находим искомый комплексный параметр  $\lambda$  при различных значениях угла раствора клина  $2\alpha$ . Каждое из уравнений (9) удобно решать, представляя ее как систему (отделяя действительные и мнимые части), относительно параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Полученные таким образом напряжения при  $r \rightarrow 0$  будут интегрируемыми с квадратом вплоть до вторых производных по  $r$  при некотором  $\lambda > \lambda_1 = \min \operatorname{Re} \lambda > 1$ . Отсюда следует, что функция напряжений  $u \in H^{(2)}(\Omega)$ , хотя при таких значениях  $\lambda_1$  производные от самих напряжений до второго порядка включительно останутся интегрируемыми с квадратом. А поскольку напряжения выражаются через вторые производные от функции напряжения  $u$ , то это означает, что сама функция напряжений, а в задаче изгиба это функция прогиба  $w$ , принадлежит  $H^{(4)}(\Omega)$ , как только величина угла раствора клина  $2\alpha$  меньше величины угла  $2\alpha_0$ , указанной в условии теоремы.

**З а м е ч а н и е**

В трансцендентные уравнения (9) не вошли физико-механические характеристики материалов, как и должно быть по теореме Беппо Леви. Этот факт широко используется при проведении экспериментов методами голографии.

**С л е д с т в и е 1**

Из теорем вложения [38] следует, что решение из  $H^4(\Omega)$  является функцией класса  $C^{(2)}(\Omega)$  и, кроме того,  $k$ -я производная от данного решения удовлетворяет условию Гельдера порядка  $(3 - k)$ . И этот результат нельзя улучшить.

**С л е д с т в и е 2**

Приведённый способ доказательства позволяет получить некоторые другие следствия, а главное:

восстановить такие углы раствора клина, при которых функция напряжений имеет более высокую гладкость. Одно из таких следствий демонстрируется в табл. 2<sup>5</sup>.

Таблица 2

О гладкости решений в угловой точке в ПЗТУ и в задаче изгиба

Re( $\lambda$ )	Im( $\lambda$ )	$\alpha$ , град
8,0	4,1683759	15,118597
7,0	3,6184596	17,290538
6,0	3,0630441	20,194360
5,0	2,4984856	24,277940
4,0	1,9167880	30,453703
3,0	1,2953395	40,933223
2,0	0,5062377	63,141855

Существуют углы, при достижении которых гладкость решения в клине вплоть до угловой точки намного выше, чем при угле  $2\alpha = 2\alpha_0$ , указанном в теореме. Следовательно, решения принадлежат  $H^{(4+k)}(\Omega)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Вернёмся к построению аналитическо-численного решения краевой задачи (2), (3), которое представим в виде суммы двух решений:

$$w(x, y) = w_q(x, y) + w_0(x, y), \quad (10)$$

где  $w_q$  – специальное частное решение уравнения (2) при однородных краевых условиях:

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (11)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к границе  $\Gamma$  (в угловых точках границы проводятся две нормали);

$w_0$  – решение краевой задачи, описываемой однородным дифференциальным уравнением

$$Lw_0 = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (12)$$

и системой неоднородных краевых условий (3).

Во всех наших работах, посвящённых методу редукции, строится не *произвольное* частное решение, а *специальное* решение  $w_q(x, y)$  – это решение полуоднородной краевой задачи (2), (11) (правая часть в уравнении отлична от нуля, а краевые условия Дирихле – однородны). Здесь, исходя из соображений простоты и минимальных затрат вычислительных ресурсов, специальное частное решение отыскивается в виде:

$$w_q = \sum_m \sum_n A_{mn} H_m(x) H_n(y), \quad (13)$$

где  $A_{mn}$  – коэффициенты, подлежащие определению, а комплекс  $H_m(x) \cdot H_n(y)$  – система координатных функций, отвечающая всем требованиям, к ним предъявляемым [18, 19]:  $H_i(s)$ ,  $s \in [-1; +1]$ ,  $i = 0, 1, \dots$  – линейно независимая и полная ортонормированная

<sup>5</sup> Вычисления проводились с 32-я значащими цифрами в мантиссе значений, хотя в таблице приведено всего восемь значащих цифр, т.е. все числа в табл. 2 верны.



система функций,  $H_i(s) \equiv H_i^{(\alpha=1)}(s)$  (см. работу [21]).

Теперь перейдём к построению решения несколько более сложной краевой задачи (12), (3). Предварительно краевые функции из правых частей краевых условий (3) представим в виде суммы двух компонент. Первую из них подбирают так, чтобы она и ее первая производная по своему аргументу принимала те же значения, что и функции, стоящие в правых частях (3). Следовательно, это кубические многочлены. Тогда вторые компоненты будут в углах обращаться в нуль вместе со своими первыми производными. При таком представлении первая компонента будет непрерывно дифференцируемой сколь угодно раз функцией, а вторая компонента унаследует свойства гладкости краевых функций из правых частей (3).

В связи с принятым представлением краевых функций искомое решение по методу редукции [17] следует отыскивать в виде суммы:

$$w_0(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y). \quad (14)$$

Первые два слагаемых в (14) удовлетворяют отдельным частям функций  $\varphi_i(y)$  и  $f_i(x)$  ( $i = 1..4$ ) неоднородных краевых условий (3), но при этом нарушают выполнение дифференциального уравнения (12) – никаких других дополнительных требований, кроме высказанных выше, к ним не предъявляется. Последнее же слагаемое служит «бигармонизирующей» (корректирующей) добавкой к первым двум функциям. Иными словами, после построения корректирующего решения  $w_3(x, y)$  искомое решение  $w_0(x, y)$  будет отвечать не только краевым условиям (3), но и однородному дифференциальному уравнению (12) с наперёд заданной точностью.

Функция  $w_1(x, y)$  – продолжение первых компонент вектора обобщённых перемещений с границы в область, а  $w_2(x, y)$  – такое же продолжение, но вторых компонент. Подобное продолжение в работе [28] мы охарактеризовали как формальное в том смысле, что кроме покомпонентного удовлетворения краевых условий к нему никаких других требований не предъявляется. Функция  $w_1(x, y)$  на смежных сторонах, примыкающих к угловой точке, индуцирует прогибы и нормальные углы поворота, распределённые по кубическим параболам, а в самой области – по бикубическим (кубическим по каждой из переменных). Из этого следует, что первая функция продолжения должна быть необходимо представлена следующей суммой:

$$w_1 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [W_{ij} \mu_i(x) \mu_j(y) + W_{i+2,j} \mu_{i+2}(x) \mu_j(y) + W_{i,j+2} \mu_i(x) \mu_{j+2}(y) + W_{i+2,j+2} \mu_{i+2}(x) \mu_{j+2}(y)], \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1(z) &= \frac{1}{4}(2 - 3z + z^3), \mu_3(z) = \frac{1}{4}(1 - z - z^2 + z^3), \\ \mu_2(z) &= \frac{1}{4}(2 + 3z - z^3), \mu_4(z) = \frac{1}{4}(z^3 + z^2 - z - 1), \end{aligned} \quad (16)$$

а  $W_{ij}$  – некоторые числа, которые равны обобщённым угловым перемещениям пластины:

– в точке  $(-1; -1)$ :

$$\begin{aligned} W_{11} &= \varphi_1(-1) \equiv f_1(-1), \quad W_{31} = \varphi_3(-1), \\ W_{13} &= f_3(-1), \quad W_{33} = \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right|_{y=-1} \equiv \left. \frac{\partial f_3}{\partial x} \right|_{x=-1}; \end{aligned} \quad (17)$$

– в точке  $(-1; +1)$ :

$$\begin{aligned} W_{12} &= \varphi_1(+1) \equiv f_2(-1), \quad W_{32} = \varphi_3(+1), \\ W_{14} &= f_4(-1), \quad W_{34} = \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right|_{y=+1} \equiv \left. \frac{\partial f_4}{\partial x} \right|_{x=-1}; \end{aligned} \quad (18)$$

– в точке  $(+1; -1)$ :

$$\begin{aligned} W_{21} &= \varphi_2(-1) \equiv f_1(+1), \quad W_{41} = \varphi_4(-1), \\ W_{23} &= f_3(+1), \quad W_{43} = \left. \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} \right|_{y=-1} \equiv \left. \frac{\partial f_3}{\partial x} \right|_{x=-1}; \end{aligned} \quad (19)$$

– в точке  $(+1; +1)$ :

$$\begin{aligned} W_{22} &= \varphi_2(+1) \equiv f_2(+1), \quad W_{42} = \varphi_4(+1), \\ W_{24} &= f_4(+1), \quad W_{44} = \left. \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} \right|_{y=+1} \equiv \left. \frac{\partial f_4}{\partial x} \right|_{x=+1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Переходим к построению второй функции продолжения. Одно из возможных её формальных представлений имеет вид

$$w_2 = \sum_{i=1}^4 \left\{ \varphi_i^*(y) \mu_i(x) + f_i^*(x) \mu_i(y) \right\}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(y) &= \varphi_1 - w_1 \Big|_{x=-1}, \quad \varphi_3^*(y) = \varphi_3 - \left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=-1}, \\ \varphi_2^*(y) &= \varphi_2 - w_1 \Big|_{x=+1}, \quad \varphi_4^*(y) = \varphi_4 - \left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=+1}, \\ f_1^*(x) &= f_1 - w_1 \Big|_{y=-1}, \quad f_3^*(x) = f_3 - \left. \frac{\partial w_1}{\partial y} \right|_{y=-1}, \\ f_2^*(x) &= f_2 - w_1 \Big|_{y=+1}, \quad f_4^*(x) = f_4 - \left. \frac{\partial w_1}{\partial y} \right|_{y=+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Такое формальное продолжение возможно, если функции  $\varphi_i(y)$  и  $f_i(x)$  ( $i = 1..4$ ) принадлежат, по крайней мере, классу  $C^3(-1;1)$ , а их четвертые производные являются функциями из  $L_2(-1;1)$ . Это достаточно жёсткие требования, однако в данной работе они могут быть приняты. Для устранения дефекта такого продолжения следует обратиться к так называемому неформальному продолжению [28], но обсуждение этой проблемы выходит за рамки работы.

В связи со сказанным, краевые функции, со-

держатся в левых частях равенств (22), представим в виде равномерно и абсолютно сходящихся рядов:

$$\varphi_i^* = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{in} H_n(y), \quad f_i^* = \sum_{m=0}^{\infty} F_{im} H_m(x), \quad i = \overline{1,4}. \quad (23)$$

Завершающим этапом построения искомого решения (14) является определение корректирующей добавки  $w_3(x, y)$ , которая является решением краевой задачи, описываемой неоднородным дифференциальным уравнением вида

$$Lw_3(x, y) = -L(w_1(x, y) + w_2(x, y)), \quad (24)$$

при краевых условиях (11).

Решение поставленной базовой задачи (24), (11) отыскивается, как обычно, в виде

$$w_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} H_m(x) H_n(y), \quad (25)$$

где  $B_{mn}$  – неизвестные коэффициенты, определяемые оговоренным выше методом.

Таким образом, метод редукции позволяет свети рассмотрение полностью неоднородной краевой задачи к решению ряда базовых задач. Анализ решений этих задач авторами в достаточной мере проведён в ранних работах [20, 22 – 29]. В настоящей работе построенные решения привлекаются по мере их необходимости.

#### 4. Численные результаты

Выберем в качестве системы жёстко защемлённую прямоугольную пластину, находящуюся под действием внешнего равномерно распределённого давления. Пример такой «системы» может показаться тривиальным, но это вовсе не так:

а) точное решение этой задачи не построено по сей день;

б) к ней обращались при анализе своих подходов и методов такие известные учёные, как В. Ритц, И. Г. Бубнов, Б. Г. Галеркин, С. П. Тимошенко, П. Ф. Папкович, Р. Хилл, М. М. Филоненко-Бородич, В. М. Даревский, Г. Фикера, А. Вайнштейн и многие другие;

в) окончательная точка в этом вопросе была поставлена в наших предыдущих работах [20, 23, 25], в которых было построено так называемое критериальное аналитико-численное решение, получаемое с наперёд заданной точностью.

Таким образом, данная задача, продолжая привлекать внимание исследователей, в том числе математиков-механиков, занимающихся построением новых методов и подходов к решению краевых задач математической физики, является как бы «лакомой бумажкой» для установления истины.

Начнём с анализа решения оговоренной краевой

задачи для всей системы в целом. Решение рассматриваемой задачи построено и подробно исследовано в работах [20, 23], поэтому здесь будем привлекать лишь окончательный результат этих работ, опуская пути его получения. Рассмотрим изгиб постоянным равномерно распределённым давлением (здесь и далее  $q = 1$  Па) квадратной пластины со стороной, равной 2 м ( $a = b = 1$  м); материал пластины – изотропный:  $E = 72$  МПа и  $\nu = 0,3$  (указанные параметры материала остаются неизменными для всех рассматриваемых в работе пластин). Решение краевой задачи из работы [20] в данном случае служит критерием оценки точности и сходимости для решения этой же задачи по МКЭ. На данном примере исследуем один из возможных путей решения « $n$ - $n$  проблемы». В известных промышленных конечно-элементных пакетах для решения описанной краевой задачи предлагается всего два типа прямоугольных конечных элементов (КЭ)<sup>6</sup>: изгибный четырёхузловой конечный элемент (в случае изгиба в каждом узле вводится по три неизвестные) и изгибный восьмиузловой элемент (дополнительные четыре узла вводятся в серединах сторон).

В табл. 3 отражены результаты исследования сходимости и точности значений максимального прогиба  $w(0;0)$ , изгибающих моментов в центре  $M_x(0;0) = M_y(0;0)$  и в середине защемлённой стороны  $M_x(1;0) = M_y(0;1)$  и перерезывающих сил  $N_x(1;0) = N_y(0;1)$  в середине защемлённой стороны в зависимости от типа элемента и степени дробления на конечные элементы области, занимаемой пластиной.

Ниже и далее приняты следующие условные обозначения: римскими цифрами определяется тип используемого КЭ, I – изгибный прямоугольный четырёхузловой конечный элемент, II – изгибный прямоугольный восьмиузловой конечный элемент; арабскими цифрами обозначены методы построения решения, 1 – решение, полученное по МИКУ с использованием МР, 2 – решение, доставляемое МКЭ, 3 – критериальное решение из работы [20]. Поскольку в описанной задаче краевые условия однородны, так называемое специальное частное решение по МИКУ в форме МР и является полным решением данной краевой задачи, целиком совпадающим с решением из работ [20, 23]. Как установлено в работе [20], при заданном способе нагружения для достижения девяти верных цифр в мантиссе значений прогиба и пяти-шести цифр в мантиссах значений изгибающих моментов в двойных рядах, ап-

<sup>6</sup> Другие типы конечных элементов здесь не рассматриваются в связи с нецелесообразностью их использования при решении данной задачи. Многие типы КЭ, представленные в табл. 1, насколько известно авторам, не реализованы в промышленных программах.

проксимирующих искомое решение, необходимо удерживать десять первых чётных функций  $H_m(x)$  и  $H_n(y)$  (всего сто членов). Такое решение с указанными значениями верхних пределов назначим критерием для оценивания решения по МКЭ, а следовательно, указанная в табл. 3 погрешность  $\varepsilon$ , %, при-

водимых величин будет вычислена по отношению к назначенному эталону. И, наконец, в таблице в колонке «N ( $\delta$ , м)» представлено общее число неизвестных N при решении задачи по МКЭ, а в скобках указан размер  $\delta$  квадратного КЭ.

Таблица 3

К решению « $\pi$ -n проблемы» МКЭ

Решение	N ( $\delta$ , м)	$w(0;0) \cdot 10^{-6}$ м ( $\varepsilon$ , %)	$M_x(0;0) \cdot 10^{-2}$ Н ( $\varepsilon$ , %)	$M_x(1;0) \cdot 10^{-1}$ Н ( $\varepsilon$ , %)	$N_x(1;0) \cdot 10^{-1}$ Н/м ( $\varepsilon$ , %)
I – 2	486 (0,2)	3,17580 (3,429)	9,20124 (0,428)	-1,34267 (34,61)	-5,27045 (40,29)
	2166 (0,1)	3,10516 (1,129)	9,17550 (0,147)	-1,65792 (19,26)	-7,35257 (16,71)
	5046 (1/15)	3,08712 (0,541)	9,16884 (0,074)	-1,77998 (13,32)	-7,98206 (9,577)
	9126 (0,05)	3,08018 (0,315)	9,16613 (0,045)	-1,84456 (10,17)	-8,25069 (6,534)
	14406 (0,04)	3,07681 (0,205)	9,16477 (0,03)	-1,88448 (8,226)	-8,39331 (4,918)
	20886 (1/30)	3,07494 (0,144)	9,16399 (0,021)	-1,91159 (6,906)	-8,48047 (3,931)
	28566 (1/35)	3,07379 (0,107)	9,16350 (0,016)	-1,93120 (5,951)	-8,53892 (3,268)
	58806 (0,02)	3,07214 (0,053)	9,16278 (0,008)	-1,96703 (4,206)	-8,63632 (2,165)
II – 2	1305 (0,2)	3,06891 (0,052)	9,36963 (2,266)	-2,01231 (2,001)	-7,76481 (12,04)
	5605 (0,1)	3,07052 (4E-4)	9,21367 (0,564)	-2,04189 (0,56)	-8,28482 (6,147)
	12905 (1/15)	3,07054 (1,1E-3)	9,18493 (0,25)	-2,04810 (0,258)	-8,46505 (4,105)
	23205 (0,05)	3,07053 (7,3E-4)	9,17490 (0,14)	-2,05034 (0,149)	-8,55539 (3,082)
	36505 (0,04)	3,07052 (4E-4)	9,17026 (0,09)	-2,05141 (0,096)	-8,60951 (2,469)
	52805 (1/30)	3,07052 (4E-4)	9,16775 (0,062)	-2,05199 (0,068)	-8,64591 (2,056)
	72105 (1/35)	3,07052 (4E-4)	9,16623 (0,046)	-2,05235 (0,051)	-8,67172 (1,764)
	94405 (0,025)	3,07051 (7,6E-5)	9,16525 (0,035)	-2,05258 (0,039)	-8,69070 (1,549)
3 (1)	100	3,07050765	9,162036	-2,05339	-8,82744

Беглый взгляд на результаты, представленные в табл. 3, может привести к ошибочному выводу о том, что « $\pi$ -n проблема» в МКЭ легко разрешима:  $\pi$ -проблему можно решить путём добавления узлов на сторонах элемента, а n-проблему – уплотнением конечно-элементной сетки. Однако это не так. Как отмечалось ранее, матрица МКЭ плохо обусловлена, и увеличение её порядка может привести (зачастую и приводит) к другим проблемам: вычисления нужно выполнять с большей разрядностью мантиисы чисел, рост влияния ошибок приближенного численного интегрирования и др. Получение же решения с наперёд заданной точностью с наименьшим числом вводимых неизвестных возможно аналитическими или аналитико-численными средствами, и, как показано в работе [20], используемое здесь критериальное решение обладает всеми перечисленными свойствами и является тем «поводырьем», который необходим МКЭ. Как можно видеть из второго столбца данной таблицы, решение первой проблемы также невозможно, по той причине, что увеличение числа неизвестных в решении приводит к росту порядка разрешающей матрицы МКЭ. Анализ МКЭ-решения рассматриваемой краевой задачи показал, что не любая заданная точность практически достижима. Из результатов КЭ-расчётов с использованием первого типа конечного элемента видно, что точность в определении изгибающих моментов даже при высокой степени дробления области пластины не достигнута. Этот недостаток подправляется ис-

пользованием восьмиузлового прямоугольного изгибающего конечного элемента, при котором повышается точность определения не только прогибов, но изгибающих моментов и перерезывающих сил с меньшей плотностью КЭ сетки (при сопоставимом числе неизвестных). Это свидетельствует о том, что « $\pi$ -n проблема» должна решаться совместно.

Стоит отметить и тот факт, что при использовании означенных типов КЭ значения силовых факторов, таких, как удельные моменты и усилия, а следовательно, вызываемые ими напряжения, определяются константами по всему элементу, хотя в пределах конкретного элемента эти величины являются все же переменными. В некоторых промышленных КЭ пакетах существует возможность определения осреднённых статических величин вдоль сторон элемента, а для всего элемента проводится ещё одно осреднение в смысле среднеарифметическом, и полученная величина выдаётся как характеристика напряжённого состояния всего элемента в целом. Следовательно, при крупной конечно-элементной сетке точность определения изгибающего момента и перерезывающей силы «съедается» размерами элемента, что неприемлемо, например, в задачах определения ресурса конструкции. Такого недостатка лишены аналитические и аналитико-численные решения.

Сказанное подтверждается результатами, показанными на рис. 1 в виде серии графиков изгибающего момента  $M_x$  Нм/м, на линиях  $x = \{0; 0,6; 1\}$ ,

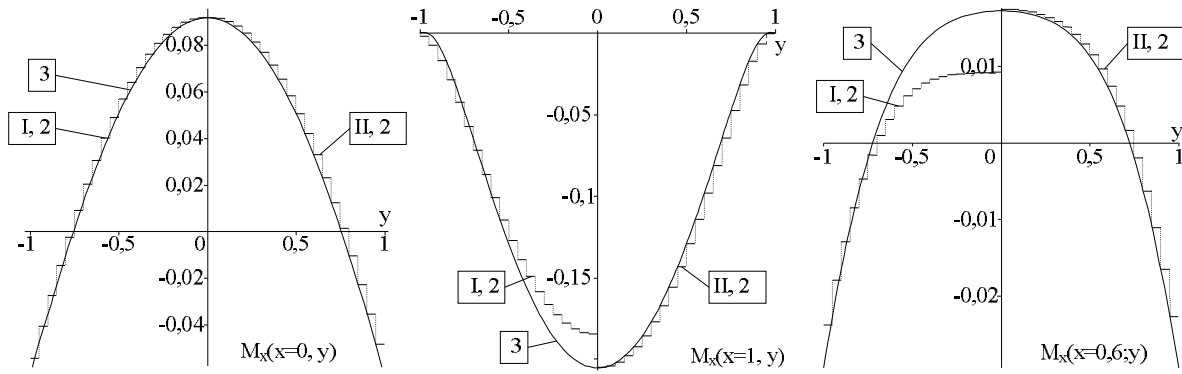


Рис. 1. К точности определения изгибающего момента  $M_x$  в области пластины и на ее границе

определённого из решения по МКЭ для двух типов элементов с конечно-элементной сеткой  $40 \times 40$  ( $\delta = 0,05$  м), а также по критериальному аналитико-численному решению работы [20]. Необходимо подчеркнуть, что построение ступенчатой функции изгибающего момента, определённого в МКЭ, выполнялось по средним значениям вдоль соответствующих сторон элементов, лежащих на означенных выше линиях  $x = \text{const}$ . Левая часть графиков соответствует МКЭ-решению по первому типу КЭ, правая часть – по второму.

Из представленных графиков, качественно дополняющих данные табл. 3, следует: в задачах, целями которых является определение с достаточной точностью компонент напряжённого состояния, расчёт по МКЭ необходимо проводить с использованием конечного элемента типа II. Это и есть одна из рекомендаций МИКУ методу конечных элементов. К сожалению, мы не можем провести исследование для остальных типов лагранжевых элементов из серендипова семейства в силу их отсутствия в программном обеспечении. При использовании первого типа элемента в КЭ-расчётах погрешность в определении изгибающих моментов растёт при продвижении из глубины пластины к её периферии. И вообще говорить о какой-либо точности получения напряжённого состояния с использованием первого типа элементов не приходится.

Проведённый анализ такой эталонной, хоть и простой, «системы» выявил ряд недостатков МКЭ, а также определил пути синтеза МКЭ с развиваемыми нами методами: МР как части МИКУ, так и самого МИКУ. МИКУ и МР осуществляют помощь МКЭ в устранении недостатков устойчивости процедуры получения, сходимости и точности результатов, с одной стороны, с другой – ожидается помощь МКЭ в идентификации краевых условий для выделяемого блок-элемента как составной части системы для дальнейшего его анализа методами МИКУ. Далее представим себе, что из исходной «системы» могут быть выделены, например, четыре блок-элемента. Первый блок-элемент представляет собой прямо-

угольную пластину с тремя жёстко закреплёнными сторонами (расширяющаяся полоса) (рис. 2.1), являющимися участками границы исходной системы, а на четвертой – заданы компоненты вектора обобщённых перемещений: функция прогиба и углов поворота. Вторым вычлененным блок-элементом будет расширяющаяся открытая квадратная подобласть (рис. 2.2), центрально расположенная в исходной «системе», границы которой не доходят до границ исходной системы. Наглядное представление рассматриваемых краевых задач даёт рис. 2. Возможны ещё два варианта выделения блок-элемента: прямоугольная пластина, содержащая какую-нибудь угловую точку исходной системы, при этом две смежные её стороны жёстко закреплены, а на двух других заданы неоднородные краевые условия Дирихле; прямоугольная полоса с двумя жёстко закреплёнными противоположными сторонами, а на двух других параллельных сторонах – неоднородные краевые условия Дирихле. Последние два варианта в работе не представлены, поскольку их анализ проводится по одной и той же схеме метода редукции, что и во второй задаче, а выводы (в смысле устойчивости, сходимости и точности) по результатам сохраняются.

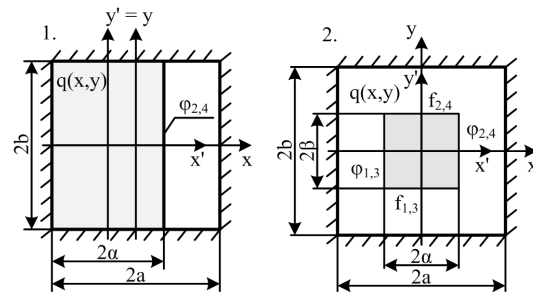


Рис. 2. Схемы краевых задач для блок-элементов, выделенных из исходной системы

Заметим, что при первом способе выделения из исходной системы блок-элемента идентификацию краевых условий из МКЭ-расчёта необходимо выполнить лишь на интервале  $y \in (-1; +1)$  линии со-

пряжения,  $x$  – фиксировано; на остальных же сторонах выделенного элемента, включая все его угловые точки, выполняются однородные краевые условия (11). Во втором способе выделения блок-элемента краевые условия на всех его участках граничного контура, включая и угловые точки, эти условия неоднородны. Сказанное определяет принципиальное различие между двумя рассматриваемыми краевыми задачами: в задаче об изгибе расширяющейся полосы отсутствует необходимость в построении первой функции продолжения  $w_1(x', y')$ . Рассмотрим каждую неоднородную краевую задачу в отдельности.

### 3.1. Задача изгиба прямоугольной пластины с тремя жёстко закреплёнными сторонами и неоднородными краевыми условиями Дирихле – на четвертой

Рассматривается изгиб постоянным давлением (как во всей системе) выделенного блок-элемента в виде прямоугольной пластины размерами  $2a \times 2b$ , занимающей область  $\Omega' = \{(x', y'): -1 < x' (y') < 1\}$ , которая имеет три общих сегмента границы с областью  $\Omega$  исходной системы (рис. 2.1). Решение для данного блок-элемента методом редукции в силу исходных краевых условий значительно упрощается. Наличие однородных краевых условий на трёх сторонах принятого блок-элемента исключает необходимость в построении первой функции продолжения (15). Таким образом, представление искомого решения сокращается до вида

$$w(x, y) = w_q(x, y) + w_2(x, y) + w_3(x, y), \quad (26)$$

а вторая функция продолжения определяется двумя слагаемыми:

$$w_2(x, y) = \varphi_2^*(y)\mu_2(x) + \varphi_4^*(y)\mu_4(x). \quad (27)$$

Функции  $\varphi_2^*(y)$  (прогиб) и  $\varphi_4^*(y)$  (угол поворота) определяют неоднородные краевые условия на линии с координатой  $x = (2a - a) / a$  в  $\Omega$  – на линии сопряжения блок-элемента с оставшейся частью системы. Когда линия сопряжения совпадает с линией  $x = 0$  ( $2a = a$ ) в  $\Omega$ , то функция  $\varphi_4^*(y) \equiv 0$ , что приводит к ещё одному упрощению:

$$w_2(x, y) = \varphi_2^*(y)\mu_2(x). \quad (28)$$

Остановимся подробнее на вопросе идентификации неоднородных краевых условий на линии сопряжения. Здесь идентификация, как было анонсировано ранее, проводится с привлечением решения по МКЭ, но при этом остаётся открытым вопрос о выполнении статических условий взаимодействия на линии сопряжения (условий равновесия). После отыскания решения по МКЭ пользователь располагает значениями всех компонент вектора обобщённых перемещений в узлах КЭ сетки (табличные функции). Проведение МР требует задания краевых

функций в аналитическом виде. Поэтому возникает необходимость в восполнении сеточных функций непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями из некоторого класса  $C^{(k)}$ . Среди существующих интерполяционных методов наиболее подходящим в смысле устойчивости, сходимости и точности конечных результатов является метод сплайнового восполнения. Однако, чтобы исключить потерю точности в определении корректирующей компоненты решения, как и его самого, связанные с дифференцированием сплайнов, восстановленные функции прогиба и углов поворота следует представлять в виде (23).

В связи с этим, ставится задача: исследовать влияние степени «г» интерполяционных сплайнов при построении восстановленных функций на устойчивость, а следовательно, сходимость и точность значений компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС) пластины: функции прогиба  $w(x', y')$ , изгибающих моментов  $M_{x(y)}(x', y')$  и перерезывающих сил  $N_{x(y)}(x', y')$ . Для проведения данного исследования расчёты исходной системы конечно-элементными пакетами выполнены при наложении на область пластины сетки  $40 \times 40$  восьмиузловых квадратных изгибных конечных элементов (относительный размер стороны элемента  $\delta/a = 0,05$ ). Из исходной системы выделяются две прямоугольные пластины с удлинениями  $\lambda = 0,5$ ,  $2a = 1$  м (координата линии сопряжения  $x = 0$ ) и  $\lambda = 0,6$ ,  $2a = 1,2$  м (координата линии сопряжения  $x = 0,2$ ). Такое расположение линии сопряжения определяет различие в способах построения функции продолжения  $w_2(x', y')$  при анализе МР выделенных блок-элементов: в первом случае используется формула (28), во втором – (27). Результаты исследования представлены в табл. 4. При выполнении конкретных расчётов бесконечные ряды в записи искомого решения заменяются конечными суммами: двойной ряд в (13) заменяется суммой с верхними пределами  $N_q = M_q = 20$ , в разложениях (27) и (28) –  $N_2 = 20$  и, наконец,  $N_3 = M_3 = 60$  – в решении (25). Следует отметить, что в силу полной симметрии краевой задачи (2), (11) построение решения  $w_q(x', y')$  выполняется лишь по функциям  $H_i(s)$  с чётными индексами «i», и под  $N_q$  и  $M_q$  стоит понимать число первых функций  $H_i(s)$  с чётными индексами. Иной выбор значений пределов лишь незначительно изменит результат количественно, но не отразится на его качественном поведении.

Из представленных в табл. 4 данных отчётливо видно, что при фиксированных верхних пределах в суммах для достижения точности, сравнимой с точностью МКЭ, достаточно восполнять сеточные функции прогиба и углов поворота сплайнами третьей-четвертой степени. Для увеличения точно-

Таблица 4

К определению потребной степени сплайна при восполнении сеточных функций

Решение	2 $\alpha$ , м	$\tau$	$w(0;0) \cdot 10^{-6}$ , м	$w(1;0) \cdot 10^{-6}$ , м	$M_x(-1;0)$ , Нм/м	$M_x(1;0)$ , Нм/м	$M_x(1;1)$ , Нм/м	$M_x(1;0)$ , Нм/м	$N_x(-1;0)$ , Н/м
I – 1	1	1	1,8399267242	3,0699318156	-0,205320761426	0,091382493248	-0,265851235410	0,091393448523	0,8838440169
		2	1,8402044504	3,0705331535	-0,205345225940	0,091611891354	-0,205354155555	0,091617773413	0,8839196026
		3	1,8402044783	3,0705271186	-0,205345229330	0,091584806153	-0,208210044931	0,091590601864	0,8839198630
		4	1,8402044997	3,0705273793	-0,205345231029	0,091586007596	-0,207654785638	0,091591821229	0,8839198377
		5	1,8402044794	3,0705330404	-0,205345227921	0,091611159929	-0,205423977737	0,091617036463	0,8839196089
		6	1,8402044794	3,0705330274	-0,205345227926	0,091611102719	-0,205428867089	0,091616979115	0,8839196095
		7	1,8402044787	3,0705333252	-0,205345227798	0,091612426505	-0,205304749392	0,091618306470	0,8839195973
		8	1,8402044788	3,0705333247	-0,205345227810	0,091612424349	-0,205305478580	0,091618304339	0,8839195973
		9	1,8402044785	3,0705333410	-0,205345227757	0,091612495935	-0,205293154494	0,091618376331	0,8839195964
II – 1	1,2	1	2,2567228427	2,8586524254	-0,205325627665	0,084832750668	-0,249669242849	0,084751222485	0,8837626053
		2	2,2570142296	2,8592103489	-0,205344035925	0,085063551935	-0,192914355331	0,084966078780	0,8837999577
		3	2,2570142668	2,8592046801	-0,205344039560	0,085036999132	-0,195596724181	0,084940225793	0,8838012785
		4	2,2570142959	2,8592049257	-0,205344041281	0,085038176650	-0,195074937484	0,084941389919	0,8838010934
		5	2,2570142629	2,8592102386	-0,205344037610	0,085062820963	-0,192981335029	0,084965366375	0,8837999923
		6	2,2570142629	2,8592102263	-0,205344037615	0,085062765227	-0,192985995237	0,084965311467	0,8837999948
		7	2,2570142617	2,8592105095	-0,205344037460	0,085064060731	-0,192867980737	0,084966584734	0,8837999343
		8	2,2570142618	2,8592105086	-0,205344037465	0,085064056477	-0,192867943999	0,084966580687	0,8837999345
		9	2,2570142640	2,8592105377	-0,205344037665	0,085064158989	-0,192851618477	0,084966700926	0,8837999297

Таблица 5

К устойчивости, сходимости и точности определения компонент НДС блок-элемента с жёстко заземлёнными тремя сторонами

Решение	$N_q$	$N_2$	$M_3$	$N_3$	$w(0;0) \cdot 10^{-6}$ , м	$M_x(-1;0)$ , Нм/м	$M_x(1;0)$ , Нм/м	$M_x(1;1)$ , Нм/м	$N_x(-1;0)$ , Н/м	
I – 1	10	5	60	60	1,8447633348	-0,205728909	0,092155042	0,091980828	-0,205949848	0,885074149
		10	60	60	1,8447646388	-0,205728987	0,092167606	0,091993423	-0,205752428	0,885074479
		15	60	60	1,8447646563	-0,205728988	0,092168045	0,091993863	-0,205704695	0,885074481
		20	60	60	1,8447646584	-0,205728988	0,092163698	0,091989499	-0,206331797	0,885074543
		20	60	60	1,8447646583	-0,205719810	0,092172876	0,091992252	-0,206331797	0,883737547
			60	120	1,8447646583	-0,205719826	0,092172924	0,091992266	-0,206331789	0,883750779
II – 1	10	5	60	60	1,8402037346	-0,205345186	0,091603216	0,091609078	-0,205439499	0,883919408
		10	60	60	1,8402044799	-0,205345228	0,091612525	0,091618403	-0,205357203	0,883919602
		15	60	60	1,8402044791	-0,205345228	0,091612555	0,091618433	-0,205358455	0,883919602
		20	20	20	1,8402044786	-0,205340614	0,091623378	0,091621593	-0,205304548	0,883165281
			30	30	1,8402044787	-0,205346580	0,091611876	0,091618141	-0,205305016	0,884345315
			40	40	1,8402044788	-0,205344911	0,091612356	0,091618284	-0,205304920	0,883767305
	20	50	50	1,8402044788	-0,205345324	0,091612630	0,091618370	-0,205304102	0,883990294	
		60	60	1,8402044788	-0,205345228	0,091612424	0,091618304	-0,205305484	0,883919597	
		20	20	20	1,8402044784	-0,205331436	0,091632534	0,091624336	-0,205304453	0,881828284
			30	30	1,8402044786	-0,205337402	0,091621051	0,091620891	-0,205304456	0,883008322
			40	40	1,8402044786	-0,205335734	0,091621532	0,091621036	-0,205304456	0,882430309
		20	50	50	1,8402044786	-0,205336146	0,091621803	0,091621119	-0,205304564	0,882653299
	60		60	1,8402044787	-0,205336050	0,091621602	0,091621058	-0,205305484	0,882582602	
	20		20	40	1,8402044785	-0,205336048	0,091621625	0,091621065	-0,205304369	0,882590045
			30	60	1,8402044787	-0,205336068	0,091621670	0,091621078	-0,205305484	0,882596887
			40	80	1,8402044786	-0,205336066	0,091621674	0,091621078	-0,205304690	0,882596550
	50		100	1,8402044786	-0,205336065	0,091621675	0,091621079	-0,205304793	0,882596072	
	60	120	1,8402044788	-0,205336065	0,091621674	0,091621079	-0,205304530	0,882595835		
III – 1	10	5	60	60	2,2570139021	-0,205344022	0,091620426	0,091618726	-0,205344281	0,883799896
		10	60	60	2,2570142627	-0,205344038	0,091620998	0,091620815	-0,205340694	0,883799960
		15	60	60	2,2570142620	-0,205344038	0,091620991	0,091620811	-0,205340697	0,883799958
		20	20	20	2,2570142616	-0,205340351	0,091620913	0,091620766	-0,205339503	0,883209582
			30	30	2,2570142618	-0,205345022	0,091620988	0,091620817	-0,205340726	0,884109648
			40	40	2,2570142619	-0,205343815	0,091620988	0,091620817	-0,205340751	0,883690047
		50	50	2,2570142618	-0,205344097	0,091620988	0,091620817	-0,205340731	0,883844757	
		60	60	2,2570142618	-0,205344037	0,091620988	0,091620817	-0,205340730	0,883799934	

сти, например, в  $10 - 10^3$  раз значений производных от решения необходимо увеличить степень сплайнов минимум на четыре. В дальнейших исследованиях для обеспечения высокой точности искомых решений и производных от них достаточно положить  $\tau = 8$ . Подобное исследование было выполнено и для второго типа выделенного блок-элемента – квадратной подобласти, целиком лежащей в исходной области рассматриваемой системы, выводы по которому вполне идентичны только что приведённым.

Важным исследованием аналитико-численного решения неоднородной краевой задачи изгиба выделенного блок-элемента является установление его устойчивости, скорости сходимости и степени точности доставляемых им результатов. В силу того, что на точность окончательного решения оказывает влияние не один параметр, в приведённой ниже табл. 5 продемонстрировано влияние каждого отдельно взятого параметра на сходимость и точность как самого искомого решения, так его вторых и третьих производных. Согласно выводам работы

[20], в задаче изгиба квадратной пластины для обеспечения высокой точности решения  $w_q(x', y')$  в разложениях (13) необходимо удерживать первые десять функций  $H_i(s)$  с чётными индексами ( $N_q = M_q = 20$ ). При иных удлинениях пластины для обеспечения подобной точности результатов следует увеличивать число удерживаемых слагаемых в соответствующих суммах пропорционально удлинению пластины.

Представленные в табл. 5 результаты с обозначениями «I» и «II» были получены для прямоугольной пластины размерами  $2a \times 2b$ , где  $a = a/2$ , с использованием указанных ранее двух типов конечных элементов при идентификации краевых условий по МКЭ на стороне пластины  $x' = +1$  ( $x = 0$ ). Римской цифрой «III» обозначены результаты оговоренного численного эксперимента, но для пластины с удлинением  $\lambda = 0,6$  ( $2a = 1,2$  м), идентификация краевых условий на стороне  $x' = +1$  была выполнена по МКЭ с использованием восьмиузлового квадратного изгибного конечного элемента. Подчеркнём, что в задачах «I» и «II» функция продолжения  $w_2(x', y')$  определяется формулой (28), а в задаче «III» – формулой (27). Отметим заранее, что значение верхнего предела  $M_q$  при отыскании специального частного решения  $w_q(x', y')$  фиксировано и для всех задач равно 20.

Из приведённых в табл. 5 результатов следует ряд полезных выводов:

- во всех задачах удалось достичь высокой точности решения: в определении значений прогиба пластины верны первые девять цифр мантиссы, моментов – до шести-семи цифр и перерезывающих сил – до трёх-четырёх цифр;

- на сходимость результата к точному существованию оказывает значение верхних пределов при аппроксимации восполненных функций прогиба и углов поворота. Подчеркнём также, что значения верхних пределов в корректирующем решении  $w_3(x', y')$  зависят от выбранного числа слагаемых при аппроксимации неоднородных краевых условий (23). Конструктивно установлено, что для обеспечения требуемой (наперёд заданной) точности решения и производных от него до второго-третьего порядков включительно необходимо значение  $N_3$  ( $M_3$ ) полагать минимум в три раза превосходящим значение  $N_2$  ( $M_2$  в случае неоднородных краевых условий на сторонах  $y' = \text{const}$ );

- при сравнении между собой результатов решений краевых задач «II» и «III» становится ясно, что на скорость сходимости и степень точности пренебрежимо мало влияет учёт неоднородности краевого условия (угла поворота) на линии сопряжения;

- в дальнейших исследованиях при удлинении

выделенного блок-элемента в диапазоне:  $0,5 \leq \lambda < 1$  в суммах (13) и (25) можно принять верхние пределы одинаковыми ( $N_q = M_q$  и  $N_3 = M_3$ ) без внесения существенной погрешности в определение компонент напряжённо-деформированного состояния.

В следующем численном эксперименте даётся ответ на вопрос о влиянии соизмеримости меры области  $\Omega'$  выделенного блока-элемента с мерой  $\Omega$  исходной системы на точность определения компонент НДС пластины. Итак, рассмотрим прямоугольные пластины с размерами  $2a = \{1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8\}$  м, то есть линия сопряжения совпадает с линиями  $x = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8\}$  соответственно в исходной системе ( $y = y'$ ). Численные результаты по данному исследованию представлены в табл. 6. Критерием оценки точности решений служит решение из работы [20], полученное с более высокой точностью:  $N = M = 30$  (суммирование велось по чётным функциям относительно обеих координат). При решении по МИКУ назначены следующие значения переменных параметров:  $N_q = M_q = 20$ ,  $N_3 = M_3 = 60$ ,  $N_2 = 20$ .

Из представленных в табл. 6 результатов следует несколько основных выводов. Первый состоит в том, что с увеличением меры блок-элемента, точность искомого решения по методу идентификации краевых условий (в частности, МР) повышается. Это происходит по двум причинам: с возрастанием меры области  $\Omega' \subset \Omega$  для большей части заданной области имеет силу аналитическое решение (МИКУ, МР), которое обеспечивает с гарантированной точностью стремление невязки в разрешающем уравнении к нулю и выполнение краевых условий задачи. Вторая причина заключается в уменьшении и так незначительной погрешности решения при стремлении меры области  $\Omega' \rightarrow \Omega$  ( $\lambda \rightarrow 1$ ), связанной с нарушением требования к выбору значений верхних пределов в суммах (13) и (25) в большую сторону пропорционально удлинению  $\lambda$  выделенной пластины. Если сравнить результаты, полученные в МКЭ, с результатами по МИКУ, а также результаты по этим методам сопоставить с данными критериального решения, легко заметить, что решение по МИКУ обладает более высокой точностью, чем решение по МКЭ. Очевидно, что идентификация краевых условий по МКЭ с использованием восьмиузлового КЭ проводится более точно в сравнении с той же операцией, выполненной при четырёхузловом КЭ.

### 3.2. Неоднородная краевая задача изгиба блок-элемента, центрально расположенного в заданной системе

В данном подразделе рассматривается более сложная (по построению решения) неоднородная краевая задача изгиба постоянным давлением квадратной пластины с областью  $\Omega' = \{(x', y') : -1 < x' (y') < 1\}$ , сторона которой равна  $2a$  ( $a$  – вели-

Таблица 6

К влиянию на компоненты НДС соотношения мер выделенного блока-элемента и исходной системы

Решение	$2\alpha$ , м (x)	$w(0;0) 10^{-6}$ , м	$M_x(-1;0)$ , Нм/м	$M_x(+1;0)$ , Нм/м	$M_x(+1;1)$ , Нм/м	$N_x(-1;0)$ , Н/м
I-1	1 (0)	1,8447646585	-0,205728988	0,092163698	-0,206331804	0,885074543
II-1		1,8402044788	-0,205345228	0,091612425	-0,205305509	0,883919597
I-2		1,84585	-0,184456	0,0916613	-0,184456	0,825069
II-2		1,84021	-0,205034	0,0913324	-0,205034	0,855539
3		1,8401919548	-0,205335615	0,091620364	-0,205335615	0,882743660
I-1		2,2616272476	-0,205620160	0,085648034	-0,193811877	0,884587316
II-1	1,2 (0,2)	2,2570142617	-0,205344037	0,085064060	-0,192868031	0,883799934
I-2		2,26402	-0,184456	0,0864941	-0,173279	0,825069
II-2		2,25702	-0,205034	0,0848258	-0,192601	0,855539
3		2,2570026783	-0,205335615	0,085071248	-0,192897447	0,884587316
I-1		2,6062948746	-0,205521156	0,063447785	-0,156833322	0,884125440
II-1		2,6022573265	-0,205342723	0,062874615	-0,156142279	0,883638772
I-2	1,4 (0,4)	2,61039	-0,184456	0,0666025	-0,139981	0,825069
II-2		2,60227	-0,205034	0,0627759	-0,155894	0,855539
3		2,6022480495	-0,205335615	0,062881332	-0,156171742	0,884587316
I-1		2,8621235340	-0,205439296	0,017713096	-0,098756634	0,883710406
II-1		2,8591916102	-0,205341380	0,017221451	-0,098418369	0,883452630
I-2		2,86816	-0,184456	0,0245502	-0,0882073	0,825069
II-2	1,6 (0,6)	2,85921	-0,205034	0,017378	-0,0981875	0,855539
3		2,8591857137	-0,205335615	0,017227507	-0,098406701	0,884587316
I-1		3,0186979838	-0,205378154	-0,065221875	-0,032586793	0,883362339
II-1		3,0172159556	-0,205340092	-0,065528668	-0,032108720	0,883264093
I-2		3,02671	-0,184456	-0,0527826	-0,0301041	0,825069
II-2		3,01724	-0,205034	-0,0649777	-0,0318801	0,855539
3	1,8 (0,8)	3,0172139150	-0,205335615	-0,065523786	-0,031940680	0,884587316

чина переменная, рис. 2. 2); при  $\alpha = a$  выделенный блок-элемент совпадает с исходной пластиной. Здесь искомое решение определяется всеми компонентами из формул (10), (14). Напомним, что идентификация краевых условий на границе выделенного блока-элемента проводится по МКЭ с дальнейшим восполнением сеточных функций сплайнами восьмой степени. При использовании метода редукции для построения функции продолжения  $w_1(x', y')$  требуется знать значения смешанных производных  $\partial^2 w / (\partial x \partial y)$  в угловых точках. Так как идентификация краевых условий выполняется по МКЭ, то значение указанной смешанной производной можно определить по значению крутящего момента  $M_{xy}$  в элементе, примыкающего к рассматриваемой угловой точке.

Проведём исследование устойчивости аналитико-численного решения, скорости его сходимости и степени точности в зависимости от числа удерживаемых слагаемых в рядах (23) ( $N_2, M_2$ ) и (25) ( $N_3, M_3$ ). Вычисления выполняли для квадратной пластины со стороной  $2\alpha = 1,2$  м), центрально выделенной из исходной системы (линии сопряжения совпадают с координатами  $x_{1,2} = \pm 0,6$  и  $y_{1,2} = \pm 0,6$  в  $\Omega$ ). Идентификация краевых условий на линиях сопряжения выполняется по МКЭ, как и ранее, с использованием двух типов конечных элементов при наложении на область  $\Omega$  сетки  $40 \times 40$  элементов ( $\delta/a = 0,05$ ). В силу того, что выделенный блок-элемент – квадрат ( $\lambda = 1$ ), в разложениях неоднородных краевых условий (23)  $N_2 = M_2$ , в решениях (13) и (25) –  $N_q = M_q$  и  $N_3 = M_3$  соответственно. Результаты расчётов представлены в табл. 7. Учитывая

выводы работы [20], здесь и далее значения верхних пределов в решении (13) принимаем равными  $N_q = M_q = 20$  (суммирование выполняется по первым десяти функциям  $H_i(s)$  с чётными индексами «i»).

Результаты, представленные в табл. 7, свидетельствуют о безусловной устойчивости, сходимости и точности построенного по МИКУ аналитико-численного решения. Устойчивость решения и быстрая его сходимость подтверждаются стабилизацией цифр в мантиссах значений всех компонент НДС пластины. Однако стремление к различным, хотя и мало отличающимся друг от друга, пределам говорит о том, что идентификация краевых условий по МКЭ ограничена (теоретически) по точности. Анализ влияния числа удерживаемых членов в рядах (23) и (25) приводит к подобным выводам, полученным в предыдущем подразделе: на скорость сходимости и степень точности ожидаемого решения, в первую очередь, оказывает влияние число слагаемых в суммах (23), а также значения верхних пределов в рядах (25) корректирующего решения должны превосходить, по крайней мере, в три раза значения соответствующих пределов в рядах (23).

В следующем численном эксперименте исследуем влияние точности идентификации краевых условий для блок-элемента на точность искомого решения и производных от него как в области  $\Omega'$ , так и на ее границе  $\Gamma'$ . Повышение точности идентификации краевых условий связано как с густотой покрытия области  $\Omega$  исходной системы конечными элементами (n-проблема), так и с типом применяемого конечного элемента (p-проблема). Результаты исследования, представленные в табл. 8, получены



Таблица 7

К устойчивости, сходимости и точности определения компонент НДС центрально расположенного квадратного блок-элемента

Решение	N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>	w(0;0) 10 <sup>-6</sup> , м	M <sub>x</sub> (0;0) = M <sub>y</sub> (0;0), Нм/м	M <sub>x</sub> (1;0) = M <sub>y</sub> (0;1), Нм/м	N <sub>x</sub> (1;0) = N <sub>y</sub> (0;1), Н/м
I – 1	5	5	3,078032356855	0,09178823306	0,01757604	-0,3823355
		10	3,078022428257	0,09177691764	0,01757628	-0,3844076
		15	3,078021992407	0,09177545249	0,01764114	-0,3794477
	10	10	3,078019523426	0,09177570953	0,01753714	-0,3827675
		20	3,078019356270	0,09177528997	0,01755528	-0,3803517
		30	3,078019354757	0,09177526695	0,01754753	-0,3821763
	15	15	3,078019090922	0,0917752092	0,01706118	-0,4123524
		30	3,078019170215	0,09177527418	0,01722442	-0,3924084
		45	3,078019170193	0,09177527438	0,01721999	-0,3945948
	20	20	3,078019128576	0,09177527062	0,01712427	-0,4010610
		30	3,078019128437	0,09177527504	0,01713637	-0,4006324
		40	3,078019128300	0,09177527049	0,01714388	-0,3967561
		50	3,078019128298	0,09177527024	0,01714074	-0,3993824
		60	3,078019128299	0,09177527027	0,01714193	-0,3979050
	II – 1	5	5	3,070538231817	0,09162038613	0,01730484
10			3,070527410029	0,09162202774	0,01730838	-0,3853258
15			3,070526969445	0,09162055187	0,01737342	-0,3803672
10		10	3,070523993352	0,09162062205	0,01727752	-0,3832372
		20	3,070523877106	0,09162038006	0,01728905	-0,3813046
		30	3,070523875706	0,09162035885	0,01728195	-0,3829858
15		15	3,070523787608	0,09162027584	0,01717352	-0,3878925
		30	3,070523795927	0,09162036231	0,01719919	-0,3857865
		45	3,070523795866	0,09162036012	0,01720139	-0,3851130
20		20	3,070523799187	0,09162032281	0,01717849	-0,3897582
		30	3,070523801328	0,09162036376	0,01720755	-0,3853871
		40	3,070523801232	0,09162036088	0,01721140	-0,3833006
		50	3,070523801227	0,09162036062	0,01720906	-0,3852844
		60	3,070523801227	0,09162036063	0,01721010	-0,3839784

Таблица 8

Влияние точности идентификации краевых условий по границе выделенного блок-элемента на точность искомого решения

Решение	δ, м (N <sub>МКЭ</sub> )	w(0;0) 10 <sup>-6</sup> , м	M <sub>x</sub> (0;0) = M <sub>y</sub> (0;0), Нм/м	M <sub>x</sub> (1;0) = M <sub>y</sub> (0;1), Нм/м	N <sub>x</sub> (1;0) = N <sub>y</sub> (0;1), Н/м
I – 1	0,2 (7)	3,1571973945	0,09393321	0,02069978	-0,3871988
I – 2		3,1758	0,0920124	0,0437987	-0,196527
I – 1	0,1 (13)	3,0977154157	0,09221353	0,01811384	-0,3819031
I – 2		3,10516	0,091755	0,0313749	-0,299055
I – 1	1/15 (19)	3,0834230943	0,09189042	0,01762182	-0,3830810
I – 2		3,08712	0,0916884	0,0269023	-0,334279
I – 1	0,05 (25)	3,0780191283	0,09177527	0,01714193	-0,3979050
I – 2		3,08018	0,0916613	0,024583	-0,349895
I – 1	0,04 (31)	3,0754048435	0,09172047	0,01737025	-0,3836384
I – 2		3,07681	0,0916477	0,0231614	-0,358287
I – 1	1/30 (37)	3,0739524033	0,09169047	0,01732696	-0,3836960
I – 2		3,07494	0,0916399	0,0222004	-0,363434
I – 1	1/35 (43)	3,0730618272	0,09167219	0,01729997	-0,3837342
I – 2		3,07379	0,091635	0,0215073	-0,366886
I – 1	0,02 (61)	3,0717796065	0,09164605	0,01726119	-0,3838327
I – 2		3,07214	0,0916278	0,0202455	-0,372619
II – 1	0,2 (13)	3,0689381284	0,09157959	0,01567407	-0,4235308
II – 2		3,06891	0,0936963	0,0196957	-0,322732
II – 1	0,1 (25)	3,0704948674	0,09161858	0,01719550	-0,3831987
II – 2		3,07052	0,0921367	0,0179359	-0,352985
II – 1	1/15 (37)	3,0705279001	0,09162017	0,01719708	-0,3842174
II – 2		3,07054	0,0918493	0,0175533	-0,363159
II – 1	0,05 (49)	3,0705238012	0,09162036	0,01721010	-0,3839784
II – 2		3,07053	0,091749	0,0174139	-0,368259
II – 1	0,04 (61)	3,0705193044	0,09162039	0,01721339	-0,3840119
II – 2		3,07052	0,0917026	0,017348	-0,371316
II – 1	1/30 (73)	3,0705163285	0,09162040	0,01721618	-0,3839762
II – 2		3,07052	0,0916775	0,0173118	-0,373368
II – 1	1/35 (85)	3,0705140797	0,09162039	0,01721837	-0,3839384
II – 2		3,07052	0,0916623	0,0172897	-0,374826
II – 1	0,025 (97)	3,0705127855	0,09162039	0,01722052	-0,3838810
II – 2		3,07051	0,0916525	0,0172753	-0,375901
3	N = M = 15	w(0;0) 10 <sup>-6</sup> , м	M <sub>x</sub> (0;0) = M <sub>y</sub> (0;0), Нм/м	M <sub>x</sub> (0;6;0) = M <sub>y</sub> (0;0;6), Нм/м	N <sub>x</sub> (0;6;0) = N <sub>y</sub> (0;0;6), Н/м
		3,0705076523	0,09162036	0,01722751	-0,3835439

для центрально выделенного квадратного блок-элемента со стороной 2α = 1,2 м тремя способами:

по МИКУ («1»), по МКЭ («2») и по решению работы [20] («3») – критериальное решение, с которым

следует сравнивать все полученные результаты. Решение по МИКУ было получено при следующих значениях верхних пределов в известных суммах:  $N_q = M_q = 20$ ,  $N_2 = M_2 = 20$  и  $N_3 = M_3 = 60$ . Именно эти значения пределов обеспечивают высокую точность результатов решения «1»: все приведенные значащие цифры в строках «1» таблицы верны в пределах точности входных данных, полученных по МКЭ. Во второй колонке таблицы указан размер  $\delta$  стороны квадратной ячейки конечно-элементной сетки, накладываемой на область исходной системы, а в скобках представлено число узлов  $N_{МКЭ}$ , укладываемых на один сегмент границы выделенной квадратной подобласти.

Анализ результатов табл. 8 приводит к ряду выводов. Во-первых, с повышением точности идентификации краевых условий точность решения по МИКУ возрастает, что очевидно: как сами решения, так и процедура их получения являются, безусловно, устойчивыми. Вопрос же о сходимости и точности получаемых результатов отпадает уже на второй план. Не будет лишним повторить, что идентификация краевых условий по второму типу КЭ выполняется более точно, чем с использованием первого типа. Это означает, что решать « $\pi$ - $n$  проблему» необходимо в совокупности. Такое наше мнение расходится с распространенным мнением о том, что необходимо использовать простейшие элементы лишь с увеличением густоты КЭ сетки. При таком

подходе не могут быть устранены все «подводные камни», которые могут встретиться в МКЭ. Во-вторых, сравнивая результаты расчетов по МИКУ с результатами МКЭ-решения, а затем с соответствующими результатами критериального решения, приходим к выводу, что решение по МИКУ подправляет решение по МКЭ, но совпадение с критериальным решением не достижимо в силу погрешностей, вводимых выбранным в работе способом идентификации краевых условий на границе выделенного блок-элемента.

Представленные выше численные эксперименты были выполнены для центрально расположенного в исходной системе блок-элемента с фиксированными размерами. В табл. 9 приводятся результаты исследования влияния расширения квадратной подобласти, выделяемой в исходной системе, на точность решения по МИКУ при идентификации краевых условий по МКЭ, а также дается сопоставление трех типов решений: МИКУ, МКЭ и критериального решения работы [20]. Расчеты выполняются с сохранением значений верхних пределов в рядах решения, что были приняты в предыдущем исследовании, поскольку дальнейшее их увеличение не оказывает существенного влияния на получаемый результат. Идентификация краевых условий на границе выделяемых блок-элементов выполнялась на основе МКЭ, с фиксированным числом конечных элементов ( $40 \times 40$ ).

Таблица 9

К влиянию на компоненты НДС меры все расширяющейся центрально расположенной в исходной системе подобласти

Решение	$2\alpha, \text{ м}$	$w(0;0) \cdot 10^{-6}, \text{ м}$	$M_x(0;0) = M_y(0;0), \text{ Нм/м}$	$M_x(1;0) = M_y(0;1), \text{ Нм/м}$	$N_x(1;0) = N_y(0;1), \text{ Н/м}$	$2\alpha, \text{ м}$	$w(0;0) \cdot 10^{-6}, \text{ м}$	$M_x(0;0) = M_y(0;0), \text{ Нм/м}$	$M_x(1;0) = M_y(0;1), \text{ Нм/м}$	$N_x(1;0) = N_y(0;1), \text{ Н/м}$
I-1	0,3	3,08009141	0,0918629734	0,0881977108	-0,0783082	1,2	3,07801913	0,0917752703	0,0171419298	-0,3979050
II-1		3,07053247	0,0916203790	0,0877253519	-0,1195158		3,07052380	0,0916203606	0,0172100989	-0,3839784
I-2		3,08018	0,0916613	0,0892459	-0,0608072		3,08018	0,0916613	0,024583	-0,3498950
II-2		3,07053	0,091749	0,0881186	-0,0675386		3,07053	0,091749	0,0174139	-0,3682590
3		3,07050765	0,0916203639	0,0879881550	-0,0763067		3,07050765	0,0916203639	0,0172275066	-0,3835439
I-1	0,6	3,07979678	0,0918454641	0,0765043503	-0,1603838	1,5	3,07605549	0,0917229127	-0,0401549148	-0,5379604
II-1		3,07053111	0,0916204067	0,0762503764	-0,1602502		3,07051753	0,0916203293	-0,0403455161	-0,5382532
I-2		3,08018	0,0916613	0,0789904	-0,1401700		3,08018	0,0916613	-0,0292063	-0,4958250
II-2		3,07053	0,091749	0,0764323	-0,1503780		3,07053	0,091749	-0,0401535	-0,5187380
3		3,07050765	0,0916203639	0,0762916751	-0,1604530		3,07050765	0,0916203639	-0,0403758922	-0,5378821
I-1	0,9	3,07917084	0,0918159922	0,0543014315	-0,2606986	1,8	3,07304796	0,0916621193	-0,1266377988	-0,7305300
II-1		3,07052813	0,0916203817	0,0540515591	-0,2608518		3,07050937	0,0916203012	-0,1267354563	-0,7307108
I-2		3,08018	0,0916613	0,0587312	-0,2339220		3,08018	0,0916613	-0,110392	-0,6790740
II-2		3,07053	0,091749	0,054255	-0,2480200		3,07053	0,091749	-0,126538	-0,7065950
3		3,07050765	0,0916203639	0,0540957989	-0,2602703		3,07050765	0,0916203639	-0,1268043759	-0,7303203

Анализ данных табл. 9 повторяет заключения, сделанные по ранее проведенным подобным исследованиям: расширение выделяемой в исходной системе подобласти не нарушает свойства устойчивости, сходимости и точности аналитико-численного решения по МИКУ, а, напротив, благоприятно влияет на отмеченные свойства решения. Это объясняется тем, что аналитико-численное решение охватывает все большую и большую область исходной системы. При идентификации краевых условий, как и

при построении самого МКЭ-решения, предпочтение все же следует отдавать решению  $\pi$ -проблемы, поскольку изменение типа элемента влияет на точность несколько больше, чем степень покрытия конечными элементами области.

### Заключение

1. Анализ полученного решения по МКЭ краевой задачи изгиба жестко защемленной прямо-

угольной пластины показал, что «л–п проблема» полностью не может быть разрешима внутри этого метода. Однако решение по МКЭ может быть эффективно применимо для идентификации краевых условий, необходимой для проведения МИКУ.

2. Построено аналитико-численное решение полностью неоднородной краевой задачи изгиба прямоугольной пластины с использованием МИКУ в форме метода редукции, идентификация краевых условий выполнена с помощью расчетов по МКЭ.

3. Анализ результатов ряда численных экспериментов показал, что построенное аналитико-численное решение устойчиво, обладает высокой степенью сходимости и обеспечивает гарантированную точность как самого решения, так и производных от него до требуемого порядка.

4. Сопоставление результатов решения, полученных методом данной работы во всех вариантах выделения из исходной системы блок-элементов, с результатами критериального решения работы [20] показало существенное повышение точности определения компонент НДС рассматриваемых пластин, по сравнению с точностью МКЭ-решения.

5. Конструктивно выработаны рекомендации по различным направлениям взаимодействия МИКУ ↔ МКЭ: идентификацию краевых условий, как и получение самих решений, по МКЭ стоит проводить с более точными типами конечных элементов. Хотя здесь и была возможность сравнить всего два типа конечных элементов, есть все основания полагать, что данный вывод носит общий характер.

6. В выделяемых областях всегда имеются угловые точки границы, наличие которых может негативно сказаться на проблемах устойчивости, сходимости и точности решений. Однако доказанная в работе теорема позволяет установить большую гладкость решения, чем априорно гарантированная условием конечности энергии деформирования гладкость.

7. Резюмируя сказанное, приходим к выводу, что сотрудничество МИКУ ↔ МКЭ оказывается более чем плодотворным. Есть все основания предложенный метод решения краевых задач назвать в дальнейшем методом идентификации краевых условий (объединенный) – МИКУ (О<sub>ц</sub>). Здесь индекс «ц» обозначает идентификацию краевых условий в перемещениях, возможны и другие подходы.

## Литература

1. Халилов, С. А. Проблема исследования устойчивости несущей конструкции большегрузных самолетов [Текст] / С. А. Халилов // *Авиационно-космическая техника и технология. Труды харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского за 1993 г.* – Харьков, 1994. – С. 358 – 369.

2. Халилов, С. А. Развитие альтернативного подхода к решению проблемы устойчивости силовых элементов конструкции самолета [Текст] / С. А. Халилов // *Авиационно-космическая техника и технология. Труды харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского за 1994 г.* – Харьков, 1995. – С. 223 – 227.

3. Халилов, С. А. Метод идентификации краевых условий в задачах упругой устойчивости. Идея метода [Текст] / С. А. Халилов // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2003. – № 1 (36). – С. 15 – 21.

4. Минтюк, В. Б. Устойчивость типовой нервюры с криволинейными поясами. Определение исходного состояния [Текст] / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология. Труды харьк. ав. ин-та им. Н. Е. Жуковского за 1997 г.* – Харьков, 1998. – С. 339 – 345.

5. Минтюк, В. Б. Исследование устойчивости нервюры с криволинейными поясами при произвольных нагрузках с учетом влияния панелей посредством компенсаторов [Текст] / В. Б. Минтюк // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Темат. сб. науч. тр.* – Харьков, 2000. – Вып. 19 (2). – С. 82–88.

6. Халилов, С. А. Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе упрощенной модели [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2003. – № 2 (37). – С. 6 – 10.

7. Халилов, С. А. Исследование устойчивости отсека крыла методом идентификации краевых условий на основе двумерной упрощенной модели [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2004. – № 1 (9). – С. 24 – 28.

8. Халилов, С. А. Приближенное замкнутое решение плоской задачи теории упругости в трапециевидной области [Текст] / С. А. Халилов, М. А. Яровой // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2004. – № 2 (10). – С. 33 – 38.

9. Кривцов, В. С. Исследование устойчивости силового кессона крыла методом идентификации краевых условий [Текст] / В. С. Кривцов, С. А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология: По материалам междунар. науч.-техн. конф., Харьков, 25-27 мая 2005 г.* – Х., 2005. – № 7 (23). – С. 151 – 161.

10. Кривцов, В. С. Устойчивость силового кессона крыла. Численный анализ на основе метода идентификации краевых условий [Текст] / В. С. Кривцов, С. А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология.* – 2007. – № 3 (39). – С. 5 – 26.

11. Халилов, С. А. Решение основной бигармонической проблемы в трапециевидной области [Текст] / С. А. Халилов, С. Г. Кравченко // *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ».* – Харьков, 2009. – Вып. 43. – С. 213 – 223.

12. Халилов, С. А. Исследование влияния параметров подкрепления на напряженное состояние панели, вызванное локальными нагрузками. Сообщение 2 [Текст] / С. А. Халилов, О. В. Макаров, С. И. Вельский // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ».* – Харьков, 2010. – Вып. 1(61). – С. 15 – 22.

13. Минтюк, В. Б. Устойчивость подкрепленной в области и на криволинейной границе пластины как элемента тонкостенной пространственной системы [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 : защищена 17.12.04 : утв. 25.02.05 / Минтюк Виталий Борисович. – Х., 2004. – 147 с.
14. Яровой, М. О. Проективання раціональних силових конструкцій багатостінкових крил малого подовження безпілотних літальних апаратів [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.07.02 : захищена 16.03.07 : затв. 13.06.07 / Яровой Марк Александрович. – Х., 2007. – 142 с.
15. Кравченко, С. Г. Устойчивость пространственных тонкостенных пластинчатых систем [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 : защищена 24.09.10 : утв. 10.12.10 / Кравченко Сергей Григорьевич. – Х., 2010. – 160 с.
16. Дибир, А. Г. Исследование напряженно-деформированного состояния плоских тонкостенных оробренных конструкций из композиционных материалов на основе решения контактных задач [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.06 : защищена 17.03.85 : утв. 12.06.85 / Дибир Александр Геннадьевич. – Х., 1985. – 240 с.
17. Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Т. 2. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (заключ.) / Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»; рук. Халилов С. А.; исполн. Минтюк В. Б., Ткаченко Д. А. [и др.]. – Х., 2014. – 160 с. № ГР 0112U002135. Инв. № 0215U006163.
18. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Гостехиздат, 1957. – 478 с.
19. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1966. – 432 с.
20. Халилов, С. А. Построение и исследование аналитико-численного решения задачи об изгибе жестко защемленной прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 49. – 2011. – С. 81 – 94.
21. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. – Х. : ХАИ, 1978. – Вып. 5. – С. 46 – 56.
22. Халилов, С. А. Приближённое аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 5 (102). – С. 40 – 49.
23. Ткаченко, Д. А. Ортонормированный в энергетическом пространстве бигармонического оператора базис в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях по границе [Текст] / Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 3 (110). – С. 41 – 51.
24. Собственный спектр бигармонического оператора в прямоугольнике при главных краевых условиях [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копычко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2014. – № 5 (112). – С. 70 – 78.
25. Функция Грина основной краевой задачи для бигармонического оператора в прямоугольнике [Текст] / С. А. Халилов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 6 (123). – С. 12 – 22.
26. Основная краевая задача общей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Решение базовой задачи [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, В. В. Копычко, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 3 (120). – С. 24 – 32.
27. Кривцов, В. С. Основная краевая задача общей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Конструкция решения [Текст] / В. С. Кривцов, В. Н. Павленко, В. В. Копычко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 6 (123). – С. 5 – 11.
28. Задача Дирихле для трансверсально-изотропной прямоугольной пластины [Текст] / С. А. Халилов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. Н. Павленко, В. В. Копычко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2017. – № 2 (137). – С. 4 – 21.
29. Задача Дирихле для трансверсально-изотропной панели [Текст] / С. А. Халилов, В. С. Кривцов, В. Б. Минтюк, В. В. Копычко, Д. А. Ткаченко, В. Н. Павленко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2017. – № 3 (138). – С. 50 – 63.
30. Ciarlet, P. G. *Mathematical Elasticity. Vol. 1. Three-dimensional elasticity* [Text] / P. G. Ciarlet. – Elsevier Science Publishers, 1988. – 451 p.
31. Математический энциклопедический словарь [Текст] / под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.
32. Кондратьев, В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками [Текст] / В. А. Кондратьев // Труды Московского математического общества. – 1967. – Т. 16. – С. 209 – 292.
33. Каландия, А. И. Замечание об особенностях упругих решений вблизи углов [Текст] / А. И. Каландия // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 1. – С. 132 – 135.
34. Белоносов, С. М. Основные плоские статистические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей [Текст] / С. М. Белоносов. – Н. : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 231 с.
35. Мазья, В. Г. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области [Текст] / В. Г. Мазья, О. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. – Т. : изд. Тбилис. ун-та, 1981. – 206 с.
36. Лурье, А. И. О статико-геометрической аналогии теории оболочек [Текст] / А. И. Лурье // Проблемы механики сплошной среды. – 1961. – С. 233 – 240.
37. Партон, В. З. Методы математической теории упругости [Текст] : учеб. пособие / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.
38. Функциональный анализ [Текст] / М. Ш. Бирман и др. ; под общ. ред. С. Г. Крейна. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Наука, 1972. – 544 с.

## References

1. Khalilov, S. A. Problema issledovaniya ustoychivosti nesushchey konstruktssii bol'shegruznykh samoletov [The problem of studying the heavy-duty aircraft load-bearing structure stability]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya. Trudy khar'k. aviats. in-ta im. N. E. Zhukovskogo za 1993 g.* [Aerospace Engineering and Technology. Proc. of the Zhukovsky Kharkiv Aviation Institute]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 1994, pp. 358 – 369.
2. Khalilov, S. A. Razvitiye al'ternativnogo podkhoda k resheniyu problemy ustoychivosti silovykh elementov konstruktssii samoleta [Development of an alternative approach to solving the airplane power components stability problem]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya. Trudy khar'k. aviats. in-ta im. N. E. Zhukovskogo za 1994 g.* [Aerospace Engineering and Technology. Proc. 1994 Zhukovsky Kharkiv Aviation Institute]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 1995, pp. 223 – 227.
3. Khalilov, S. A. Metod identifikatsii kraevykh usloviy v zadachakh uprugoy ustoychivosti. Ideya metoda [The boundary conditions identification method in elastic stability problems. The idea of the method]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2003, no. 1, vol. 36, pp. 15 – 21.
4. Mintyuk, V. B. Ustoychivost' tipovoy nervyury s krivolineynymi poiyasami. Opredelenie iskhodnogo sostoyaniya [Stability of a standard rib with curvilinear belts. The initial state determination]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya. Trudy khar'k. aviats. in-ta im. N. E. Zhukovskogo za 1997 g.* [Aerospace Engineering and Technology. Proc. 1997 Zhukovsky Kharkiv Aviation Institute]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 1998, pp. 339 – 345.
5. Mintyuk, V. B. Issledovanie ustoychivosti nervyury s krivolineynymi poiyasami pri proizvod'nykh nagruzkakh s uchetom vliyaniya paneley posredstvom kompensatorov [Investigation into the stability of a rib with curvilinear belts under arbitrary loads taking into account the panels impact through compensators]. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktssiy letatel'nykh apparatov: Temat. sb. nauch. tr.* [Aircraft structures design and production questions: Thematic sci. proc. coll.]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2000, no. 2, vol. 19, pp. 82 – 88.
6. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B. Issledovanie ustoychivosti otseka kryla metodom identifikatsii kraevykh usloviy na osnove uproshchennoy modeli [Investigation into the wing compartment stability by the boundary conditions identification method on the basis of a simplified model]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2003, no. 2, vol. 37, pp. 6 – 10.
7. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B. Issledovanie ustoychivosti otseka kryla metodom identifikatsii kraevykh usloviy na osnove dvumernoy uproshchennoy modeli [Study the wing compartment stability by the boundary conditions identification method on the basis of a simplified two-dimensional model]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2004, no. 1, vol. 9, pp. 24 – 28.
8. Khalilov, S. A., Yarovoy, M. A. Priblizhennoe zamknotoe reshenie ploskoy zadachi teorii uprugosti v trapetsievidnoy oblasti [Approximate closed solution to the plane elastic problem in the trapezoid domain]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2004, no. 2, vol. 10, pp. 33 – 38.
9. Krivtsov, V. S., Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B. Issledovanie ustoychivosti si-lovogo kessonra kryla metodom identifikatsii kraevykh usloviy [Study the wing caisson stability by the boundary conditions identification method]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya: Po materialam mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* [Aerospace Engineering and Technology. Proc. Int. Sci.-Tech. Conf.]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2005, no. 7, vol. 23, pp. 151 – 161.
10. Krivtsov, V. S., Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B. Ustoychivost' silovogo kessonra kryla. Chislennyy analiz na osnove metoda identifikatsii kraevykh usloviy [The wing power caisson. Numerical analysis based on the boundary conditions identification method]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2007, no. 3, vol. 39, pp. 5 – 26.
11. Khalilov, S. A., Kravchenko, S. G. Reshenie osnovnoy bigarmonicheskoy problemy v trapetsievidnoy oblasti [The basic biharmonic problem solution in the trapezoidal region]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirrovannyye tekhnologii : sb. nauch. tr. Nats. aerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «KhAI»* [Open information and computer integrated technologies: scientific papers collection of Zhukovsky National Aerospace university]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2009, vol. 43, pp. 213 – 223.
12. Khalilov, S. A., Makarov, O. V., Vesel'skiy, S. I. Issledovanie vliyaniya parametrov podkrepleniya na napyazhennoe sostoyanie paneli, vyzvannoe lokal'nymi nagruzkami. Soobshchenie 2 [Investigation into the reinforcement parameters impact on the panel stress state caused by local loads. Report 2]. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstruktssiy letatel'nykh apparatov: sb. nauch. tr. Nats. aerokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «KhAI»* [Aircraft structures design and production questions: Sci. Proc. Coll. Zhukovsky National Aerospace University «KhAI»]. Kharkiv, «*KhAI*» Publ., 2010, no. 1, vol. 61, pp. 15 – 22.
13. Mintyuk, V. B. *Ustoychivost' podkreplennoy v oblasti i na krivolineynoy granitse plastiny kak elementa tonkostennoy prostranstvennoy sistemy. Diss. kand. tekhn. nauk* [Stability of plate stiffened in its area and along curved boundary as element of thin-walled space structure. Cand. tech. sci. diss.]. Kharkiv, 2004. 147 p.
14. Yarovoy, M. O. *Proektivannyya ratsional'nykh silovykh konstruktssiy bahatostinkovykh kryl maloho podovzheniya bezpilotnykh lital'nykh apparativ. Diss. kand. tekhn. nauk* [Rational Primary Structure's Design of Unmanned Aircraft Multi-Web Low Aspect Ratio Wings. Cand. tech. sci. diss.]. Kharkiv, 2007. 142 p.
15. Kravchenko, S. G. *Ustoychivost' prostranstvennykh tonkostennykh plastinchatykh sistem. Diss. kand. tekhn. nauk* [Stability of space thin-walled plate systems. Cand. tech. sci. diss.]. Kharkiv, 2010. 160 p.
16. Dibir, A. G. *Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya ploskikh tonkostennykh orebrennykh konstruktssiy iz kompozitsionnykh materialov na osnove resheniya kontaktnykh zadach. Diss. kand. tekhn. nauk* [Study the stress-strain state of flat thin-walled finned structures made of composite materials on the basis of solving contact problems. PhD diss.]. Kharkiv, 1985. 240 p.
17. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. *Novyye metody issledovaniya lineino i nelineino deformiruemyykh tel iz kompozitsionnykh materialov. T. 2. Matematicheskie modeli, metody ikh analiza i chislennaya realizatsiya nelineinogo deformirovaniya tonkostennykh prostranstvennykh sistem; otchet o NIR.* [New methods of research in linear and nonlinear deformable bodies made of composite materials. Vol. 2. Mathematical models, analysis techniques and numerical implementation of thin-

walled spatial systems nonlinear deformation]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. GR 0112U002135. Inv. no. 0215U006163, 160 p.

18. Mikhlin, S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, «Gostekhizdat» Publ., 1957. 478 p.

19. Mikhlin, S. G. *Chislennaya realizatsiya variatsionnykh metodov* [Numerical realization of variational methods]. Moscow, «Nauka» Publ., 1966. 432 p.

20. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. Postroenie i issledovanie analitiko-chislennogo resheniya zadachi ob izgibe zhestko zashchemlennoi pryamougol'noi plastiny [Development and research of the analytic-numerical solution for the bending problem of stiffened rectangular plate]. *Otkrytye informatsionnye i kompyuternye integrirrovannye tekhnologii : sb. nauch. tr. Nats. aérokosm. un-ta im. N. E. Zhukovskogo «KhAI»* [Open information and computer integrated technologies : scientific papers collection of Zhukovsky National Aerospace university]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2011, vol. 49, pp. 81 – 94.

21. Khalilov, S. A. Novye sistemy ortonormirovannykh mnogochlenov, nekotorye ikh svoystva i prilozheniya [New orthonormal polynomials systems, some of their properties and applications]. *Prochnost' konstruktivnykh letatel'nykh apparatov: temat. sb. nauch. tr.* [Strength of aircraft structures: thematic collection of scientific papers]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 1978, vol. 5, pp. 46 – 56.

22. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. Priblizhennoe analiticheskoe reshenie bigarmonicheskoi problemy v pryamougol'nike pri odnorodnykh glavnykh kraevykh usloviyakh na dvukh protivopolozhnykh storonakh i proizvol'nykh – na dvukh drugikh [An approximate analytical solution of biharmonic problem in the rectangle with homogeneous main boundary conditions on the two opposite sides and arbitrary boundary conditions on the other two sides]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2013, no. 5, vol. 102, pp. 40 – 49.

23. Tkachenko, D. A. Ortonormirovannyi v energeticheskom prostranstve bigarmonicheskogo operatora bazis v pryamougol'nike pri odnorodnykh glavnykh kraevykh usloviyakh po granitse [Orthonormal basis in the biharmonic operator energy space in the rectangle with homogeneous principal boundary conditions along the boundary]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. 3, vol. 110, pp. 41 – 51.

24. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A., Kopychko, V. V. Sobstvennyi spektr bigarmonicheskogo operatora v pryamougol'nike pri glavnykh kraevykh usloviyakh [Biharmonic operator own spectrum in a rectangle at the main boundary conditions]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2014, no. 5, vol. 112, pp. 70 – 78.

25. Khalilov, S. A., Krivtsov, V. S., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A. Funktsiya Grina osnovnoi kraevoi zadachi dlya bigarmonicheskogo operatora v pryamougol'nike [Green function of basic boundary value problem for biharmonic operator in the rectangle]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2015, no. 6, vol. 123, pp. 12 – 22.

26. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B., Kopychko, V. V., Tkachenko, D. A. Osnovnaya kraevaya zadacha obshchey klassicheskoy teorii otkrytoy tsilindricheskoy obolochki. Reshenie bazovoy zadachi [Main boundary va-

lue problem of classical theory of general open cylindrical shell. Basic solution]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2015, no. 3, vol. 120, pp. 24 – 32.

27. Krivtsov, V. S., Pavlenko, V. N., Kopychko, V. V. Osnovnaya kraevaya zadacha obshchey klassicheskoy teorii otkrytoy tsilindricheskoy obolochki. Konstruktsiya resheniya [Main boundary value problem of general classical theory of open cylindrical shell. Solution construction]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2015, no. 6, vol. 123, pp. 5 – 11.

28. Khalilov, S. A., Krivtsov, V. S., Mintyuk, V. B., Tkachenko, D. A., Pavlenko, V. N., Kopychko, V. V. Zadacha Dirikhle dlya transversal'no-izotropnoy pryamougol'noy plastiny [The Dirichlet problem for transversely isotropic rectangular plate]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2017, no. 2, vol. 137, pp. 4 – 21.

29. Khalilov, S. A., Krivtsov, V. S., Mintyuk, V. B., Kopychko, V. V., Tkachenko, D. A., Pavlenko, V. N. Zadacha Dirikhle dlya transversal'no-izotropnoy paneli [The Dirichlet problem for transversely-isotropic panel]. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya* [Aerospace Engineering and Technology]. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2017, no. 3, vol. 138, pp. 50 – 63.

30. Ciarlet, P. G. *Mathematical Elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*. Elsevier Science Publishers, 1988. 451 p.

31. Prokhorov, Yu. V. *Matematicheskii entsiklopedicheskii slovar'* [Mathematical encyclopedia]. Moscow, «Sovetskaya Entsiklopediya» Publ., 1988. 847 p.

32. Kondrat'ev, V. A. Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi i uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical and angular points]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Proc. Moscow Mathematical Community]. Moscow, 1967, vol. 16, pp. 209 – 292.

33. Kalandiya, A. I. Zamechanie ob osobennostyakh uprugikh resheniy vblizi uglov [A remark on the elastic solutions features near angles]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. Moscow, 1969, no. 1, vol. 33, pp. 132 – 135.

34. Belonosov, S. M. *Osnovnye ploskie staticheskie zadachi teorii uprugosti dlya odnosvyaznykh i dvusvyaznykh oblastey* [Basic statistical plane elastic problems for simply-connected and doubly-connected regions]. Novosibirsk, SO AN SSSR Publ., 1962. 231 p.

35. Maz'ya, V. G., Nazarov, O. A., Plamenevskiy, B. A. *Asimptotika resheniy ellip-ticheskikh kraevykh zadach pri singulyarnom vozmushchenii oblasti* [Elliptic boundary value problems solutions asymptotics for a singular perturbation of the domain]. Tbilisi, Tbilis. un-ta Publ., 1981. 206 p.

36. Lur'e, A. I. O statiko-geometricheskoy analogii teorii obolochek [On the shells theory static-geometric analogy]. *Problemy mekhaniki sploshnoy sredy* [Continuum mechanics problems]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1961, pp. 233 – 240.

37. Parton, V. Z., Perlin, P. I. *Metody matematicheskoi teorii uprugosti* [Methods of mathematical elasticity theory]. Moscow, «Nauka» Publ., 1981. 688 p.

38. Kreyn, S. G. *Funktsional'nyy analiz. Izd. 2-e* [Functional analysis. Ed. 2]. Moscow, «Nauka» Publ., 1972. 544 p.

Поступила в редакцию 18.05.2017, рассмотрена на редколлегии 8.06.2017

## СИНТЕЗ МЕТОДУ ІДЕНТИФІКАЦІЇ КРАЙОВИХ УМОВ І МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ. ПРЯМОКУТНІ ПЛАСТИНИ

*С. А. Халілов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко, В. В. Копичко*

У виконанні методу ідентифікації крайових умов, запропонованого авторами раніше, ключовою є проблема розв'язання проміжних крайових задач. Це достатньо складні крайові задачі на сполучення конструктивних елементів розгалужених тонкостінних просторових систем, якими є несучі поверхні та корпуси конструкції літальних апаратів. У розв'язанні проблеми ідентифікації крайових умов для виділеного блок-елемента може надати суттєву допомогу індустріальний метод скінченних елементів. З іншого боку, метод ідентифікації крайових умов як такий може допомогти методу скінченних елементів у плані вибору ефективного типу скінченного елемента, характерного для розглядуваного класу задач механіки деформованого твердого тіла. Ця ідея – «метод ідентифікації крайових умов ↔ метод скінченних елементів» – покладена в основу роботи. Шляхом проведення численних розрахунків на окремому прикладі достатньо простої, але не тривіальної задачі показано плідність об'єднання двох по суті різних методів.

**Ключові слова:** базова крайова задача, критеріальний розв'язок, ідентифікація крайових умов, взаємодія методу ідентифікації крайових умов і методу скінченних елементів.

## SYNTHESIS OF BOUNDARY CONDITIONS IDENTIFICATION METHOD AND FINITE ELEMENT METHOD. RECTANGULAR PLATES

*S. A. Khalilov, V. B. Myntiuk, D. A. Tkachenko, V. V. Kopychko*

The key problem in the use of previously proposed boundary conditions identification method is the solution of intermediate boundary-value problems. These are quite complex boundary-value problems of structural elements conjugation of branched thin-walled spatial systems, such as bearing surfaces and hulls of aircraft structure. In solving the boundary conditions identifying problem for selected block-element the industrial finite element method can substantially help. On the other hand, boundary conditions identification method as such can help the finite element method to choose the effective type of finite element typical for the considered class of solid mechanics problems. This idea “boundary conditions identification method ↔ finite element method” is the basis of the study. The fruitfulness of combining two essentially different methods is shown by carrying out numerous calculations on a particular example of a rather simple but not trivial problem.

**Keywords:** basic boundary-value problem, criterion solution, boundary conditions identification, boundary conditions identification method and finite element method interaction.

**Халілов Сиявуш Ахмедович** – ст. науч. сотр., Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: khalilov@ukr.net.

**Минтюк Виталий Борисович** – канд. техн. наук, доц. каф. прочности летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.

**Ткаченко Денис Анатольевич** – асп. каф. технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, e-mail: tkachenko\_d\_an@ukr.net.

**Копычко Виктор Владимирович** – асп. каф. технологии и производства летательных аппаратов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: viktor\_kopychko@mail.ru.

**Khalilov Siavush Akhmedovych** – senior researcher of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: khalilov@ukr.net.

**Myntiuk Vitalii Borysovych** – PhD, assistant professor of Aircraft strength department of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.

**Tkachenko Denys Anatoliiovych** – postgraduate student of Aircraft technology and manufacture department of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: tkachenko\_d\_an@ukr.net.

**Kopychko Viktor Volodymyrovych** – postgraduate student of Aircraft technology and manufacture department of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: viktor\_kopychko@mail.ru.