

УДК 539.311

В. Б. МИНТЮК

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ПРИМЕНЕНИЕ ГИПОТЕЗ КИРХГОФА-ЛЯВА  
ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН**

*Рассмотрены две пластины, для которых считаются справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява, заполненные материалом Джона и стандартным материалом второго порядка. На примере обратной задачи о нелинейном изгибе пластин проведен сравнительный анализ действительного распределения в них деформаций и напряжений. Показано, что по толщине пластины напряжения симметричного тензора Био распределяются по закону, который гораздо ближе к линейному, чем закон распределения напряжений второго тензора Пиола-Кирхгофа. Линеаризация напряжений по вырожденной координате приводит к практически одинаковым значениям внутренних моментов и существенно отличающимся мембранным усилиям.*

**Ключевые слова:** нелинейный изгиб пластин, гипотезы Кирхгофа-Лява, энергетически сопряженные тензоры.

**Введение**

Бурное развитие нелинейной механики деформируемого твердого тела, наблюдаемое последние полвека, связано, прежде всего, с новыми тенденциями и потребностями практики. Одной из наиболее важных причин такого развития является повышенное требование к точности и достоверности получаемых решений: полей напряжений, перемещений, критических и предельных нагрузок, собственных частот колебаний и др. Существенные погрешности широко распространенных ныне решений линейных краевых задач зачастую вызваны неадекватностью моделей реальным физическим процессам. Более того, в ряде практически важных случаев линейные модели вообще не могут привести к сколь-нибудь правильному результату. Ярким примером такой задачи может служить задача о закритическом поведении силовых тонкостенных конструкций.

Все преимущества нелинейных моделей над линейными с лихвой перекрываются их недостатками. Среди таковых, например, сложность анализа нелинейных моделей, ряд неопределенностей при их построении: считать ли большими (малыми) перемещения, а деформации – малыми (большими) или и то и другое малыми считать нельзя, что принять за меру деформации, в какой системе отсчета работать и др. Установление определенности при построении нелинейных теорий напрямую зависит от конкретной моделируемой проблемы. Здесь, по-видимому, не может быть построена единая нелинейная теория “на все случаи жизни”. Эта статья, как и предыдущие работы [1–3], посвящена развитию нелинейной теории механики деформируемого твердого тела в целях построения наиболее адекватных моделей поведения тонкостенных силовых конструкций и их

элементов. Решения, полученные в результате анализа этих моделей, призваны существенно повысить точность определения полей перемещений и напряжений, что особенно актуально при проектировании аэрокосмической техники и напрямую связано с безопасностью и качеством изделий.

Ниже ставится численный эксперимент в целях выявления характера распределения напряжений и деформаций в прямоугольном параллелепипеде с одной вырождающейся координатой. Между собой сравниваются поля деформаций и напряжений для двух типов материалов, а также отмечается нелинейный характер распределений этих полей по толщине. В качестве объекта исследования выступает обратная задача об изгибе пластины, т.е. по известной деформации (полю перемещений) пластины определяется ее напряженно-деформированное состояние. Задача в такой постановке не является корректной: не всякое произвольно заданное поле перемещений будет решением какой-нибудь краевой задачи. Кроме того, гарантировать непрерывную зависимость решения от исходных данных невозможно. Поэтому в качестве деформации выбрано точное решение линейного изгиба свободно опертой прямоугольной пластины под действием поперечной нагрузки, распределенной по одной полуволне синусоиды. Этим гарантируется корректность задачи при малых прогибах по отношению к толщине пластины и малой толщине по отношению к размерам пластины. Априори считаются справедливыми геометрическая и статическая гипотезы Кирхгофа-Лява, “интуитивная” формулировка которых подтверждается как экспериментальными исследованиями, так и строгими математическими методами (формального масштабирования, асимптотического разложения и др., см., например, [4–6]).

### 1. Постановка задачи

Как известно, вектор положения точек деформированной срединной поверхности свободно опертой пластины под действием поперечной нагрузки, распределенной по одной полуволне синусоиды и занимавшей в исходном состоянии безразмерную область  $\Omega = \{(x, y): -\pi/2 < x, y < \pi/2\}$ , имеет вид

$$\mathbf{X}_0 = \{x, y, W \cos x \cos y\}^T, \quad (1)$$

где  $W$  – величина безразмерного прогиба в центре пластины.

Согласующиеся с кинематической гипотезой Кирхгофа-Лява положения точек, отстоящих от срединной поверхности на расстояние  $z$ , определяются вектором

$$\mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{l} x + zW\omega^{-1} \sin x \cos y \\ y + zW\omega^{-1} \cos x \sin y \\ W \cos x \cos y + z\omega^{-1} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

где  $\omega = |\partial_x \mathbf{X}_0 \times \partial_y \mathbf{X}_0| =$

$$= \sqrt{W^2 (\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y \sin^2 x) + 1} - \text{длина}$$

вектора нормали к деформированной срединной поверхности;

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассматриваются две такие пластины: объем одной заполнен материалом Джона (первого порядка, гармоничным), второй – стандартным материалом второго порядка. Оба эти материала являются гиперупругими, и соответствующие плотности энергии деформации (в расчете на единицу недеформированного объема) даются выражениями [7]

$$W^{(1)} = E \frac{1-\nu}{1+\nu} \left( \frac{(\iota_1(\mathbf{U})-3)^2}{2(1-2\nu)} + \frac{2\iota_1(\mathbf{U})-\iota_2(\mathbf{U})-3}{1-\nu} \right); \quad (3)$$

$$W^{(2)} = \frac{E}{8} \left( \frac{(1-\nu)\iota_1^2(\mathbf{C})}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{3-2\iota_1(\mathbf{C})}{1-2\nu} - 2\frac{\iota_2(\mathbf{C})}{1+\nu} \right),$$

где  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона;

$\iota_1, \iota_2$  – первый и второй инварианты тензоров;

$\mathbf{U}$  – правый тензор кратности удлинений;

$\mathbf{C}$  – правый тензор Коши-Грина.

Эти тензоры определяются с помощью тензора градиента деформации  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (4)$$

который, в свою очередь, определяется как градиент вектора (2)

$$\mathbf{F} = \text{grad } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \partial_x X_1 & \partial_y X_1 & \partial_z X_1 \\ \partial_x X_2 & \partial_y X_2 & \partial_z X_2 \\ \partial_x X_3 & \partial_y X_3 & \partial_z X_3 \end{bmatrix}.$$

Тензоры деформаций, порождаемые тензорами  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{C}$ , по не совсем установившейся терминологии называются соответственно тензор Коши и тензор Грина [8]

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{1}, \quad (5)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}). \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{1}$  – единичный тензор.

Распределение деформаций срединной поверхности ( $z = 0$ ), которые в линейном случае равны нулю, изображено на рис. 1. Слева приведено рас-

пределение  $\mathbf{E}_{11}^{(1)}$  (на соседние квадранты продлева-

ется симметрично), справа –  $\mathbf{E}_{12}^{(1)} = \mathbf{E}_{21}^{(1)}$  (на соседние

квадранты продлевается кососимметрично). Приве-

денные величины деформаций соответствуют умеренному прогибу  $W = 0,1\pi$ . Графики распределения

соответствующих компонент тензора деформаций

$\mathbf{E}^{(2)}$  качественно схожи с графиками, показанными

на рис. 1. Количественно они тоже мало отличаются. Так, например, максимальное значение линейной

деформации тензора Грина составляет  $\mathbf{E}_{11}^{(2)} = \pi^2/200 \approx 0,0493$ , а соответствующее значе-

ние тензора Коши –  $\mathbf{E}_{11}^{(1)} = \sqrt{1 + \pi^2/100} - 1 \approx 0,0482$ .

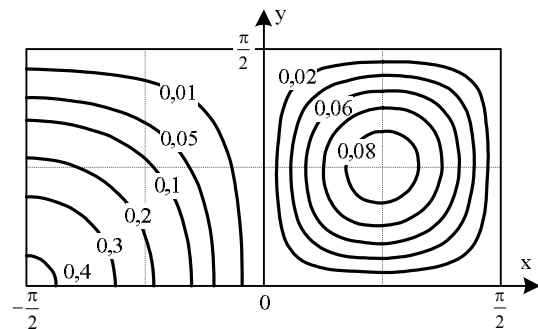


Рис. 1. Распределение деформаций срединной поверхности пластины

Отметим, что кроме отмеченных компонент тензоров деформаций ненулевыми будут компонен-

ты  $\mathbf{E}_{22}^{(\alpha)}$ <sup>1</sup>. Все остальные компоненты будут равны

нулю:  $\mathbf{E}_{\beta 3}^{(\alpha)} = \mathbf{E}_{3\beta}^{(\alpha)} = 0$  (угловые деформации),

$\mathbf{E}_{33}^{(\alpha)} = 0$  (линейные деформации вдоль нормали),

что является следствием принятия кинематической

<sup>1</sup> Здесь и далее греческие символы пробегают значения 1, 2.

гипотезы Кирхгофа-Лява. Но результатом использования статической гипотезы Кирхгофа-Лява являются используемые далее выражения деформаций

$$E_{33}^{(\alpha)} = -\frac{\nu}{1-\nu} (E_{11}^{(\alpha)} + E_{22}^{(\alpha)}) \quad (7)$$

С учетом этих значений компонент тензоров деформации (5) и (6) энергетически сопряженными с ними, т.е. такими тензорами, свертка с которыми приводит к потенциалам (3), будут симметричный тензор напряжений Био  $S^{(1)}$  и второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа  $S^{(2)}$ . Их связь с соответствующими тензорами деформаций дается законом Гука

$$S^{(\alpha)} = \frac{E}{1+\nu} \left( E^{(\alpha)} + \frac{\nu}{1-2\nu} I_1(E^{(\alpha)}) \mathbf{1} \right) \quad (8)$$

Свертка соответствующих тензоров напряжений и деформаций приводит к тем же выражениям потенциалов (3), если компонент тензора Коши-Грина  $C_{33}$  и компонент тензора кратности удлинений  $U_{33}$  положить равными

$$C_{33} = 1 + \frac{\nu(2 - C_{1,1} - C_{2,2})}{1-\nu}; U_{33} = 1 + \frac{\nu(2 - U_{1,1} - U_{2,2})}{1-\nu}$$

Таким образом, приходим к узнаваемому выражению внутренней энергии деформации, записанной через деформации

$$W^{(\alpha)} = E^{(\alpha)} \cdot S^{(\alpha)} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left\{ (E_{11}^{(\alpha)} + E_{22}^{(\alpha)})^2 + 2(1-\nu) \left( (E_{12}^{(\alpha)})^2 - E_{11}^{(\alpha)} E_{22}^{(\alpha)} \right) \right\} \quad (9)$$

Заметим, что и в выражения потенциалов (3), (9), и в закон Гука (7) для различных типов исследуемых материалов входят одни и те же механические характеристики  $E$  и  $\nu$ . В общем-то, это должны быть различные величины. Причем, многочисленные данные, приводимые в справочной литературе, относятся именно к первому типу материала, потому что при их определении используются деформации Коши и условные напряжения. Влияние неточности определения характеристик материала на погрешности, возникающие при построении двумерной теории пластин, ввиду малости диапазона изменения деформаций большинства конструкционных материалов, в пределах которых справедлив закон Гука, здесь не рассматриваются. Кроме того, эти неточности с лихвой перекрываются существенной погрешностью эксперимента по их определению.

Несмотря на то, что были использованы и кинематическая и статическая гипотезы Кирхгофа-Лява, привести задачу об изгибе пластины к двумерной не представляется возможным. Для этого необходимо линейное распределение напряжений

по толщине пластины (ввиду справедливости закона Гука деформации также будут распределены линейно). Пока линейно распределяются только перемещения (2).

Распределение нормальных напряжений по толщине пластины в девяти точках показано на рис. 2.

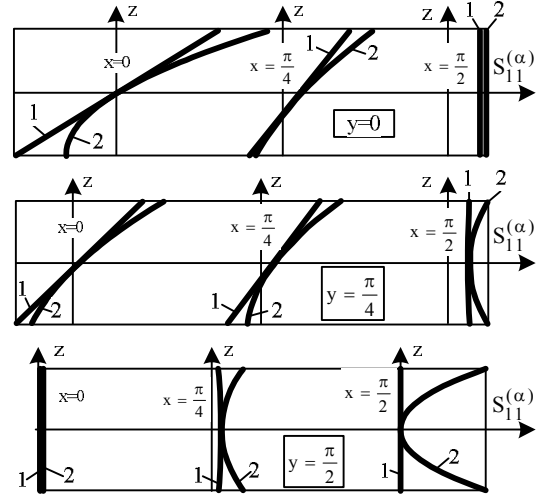


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений по толщине пластины: 1 –  $S_{11}^{(1)}$ ; 2 –  $S_{11}^{(2)}$

Как видно из рис. 2, распределение по толщине пластины напряжений Био  $S_{11}^{(1)}$  гораздо ближе к линейному, чем распределение напряжений Пиола-Кирхгофа  $S_{11}^{(2)}$ . Более того, в нормальных сечениях, проходящих через точки осей симметрии срединной плоскости пластины, напряжения Био в точности распределяются по линейному закону.

Графики, изображенные на рис. 2, получены при существенном прогибе ( $W = 1$ ) и широком диапазоне изменения координаты  $z$  ( $-1 \leq z \leq 1$ ). Количественно напряжения, например, в точке  $x = y = 0$  характеризуются зависимостями

$$S_{11}^{(1)} = \frac{E}{1-\nu} (|Wz+1|-1); S_{11}^{(2)} = \frac{E}{2(1-\nu)} Wz(Wz+2) \quad (10)$$

Если продлить график распределения напряжений в этой точке, показанный на рис. 2, увеличивая диапазон изменения  $z$  или, что то же самое, увеличивая прогиб  $W$ , то получим картину распределения напряжений по толщине, изображенную на рис. 3.

Как можно видеть, при значениях величины  $Wz$ , меньших  $-1$ , напряжения в нижних слоях начинают увеличиваться. Такой характер распределения напряжений с механической точки зрения нефизичен, с математической – это нарушение условия инъективности (взаимопроникновения) [9], а продиктован он гипотезой прямых нормалей. Как известно, две бесконечно близкие нормали пересекаются в центре кривизны, поэтому если при прибли-

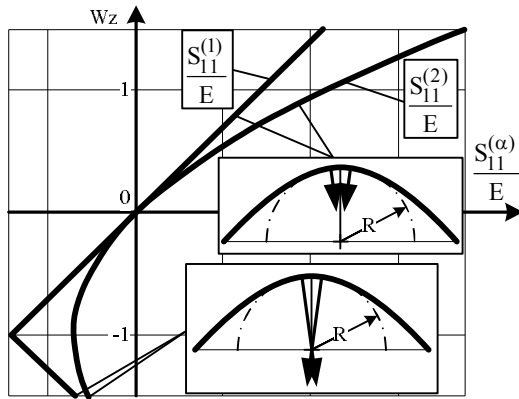


Рис. 3. Нарушение условий инъективности

жении по нормали к центру кривизны наблюдается вследствие деформации сближение точек, то при переходе через этот центр точки удаляются, что графически изображено на рис. 3. Здесь представлена деформированная пластина ( $W = 1$ ) и показаны нормальные векторы  $0,6R$  и  $1,2R$ , где  $R = W^{-1}$  – радиус кривизны деформированной срединной поверхности в данной точке. Взаимопроникновение материала такой пластины возможно, если ее толщина  $h > 2$ , т.е. очень толстой пластины. Тем не менее, для тонких пластин всегда можно указать такую кривизну, при которой инъективность будет нарушена, что видно из структуры формул (10).

Таким образом, при использовании гипотезы прямых нормалей условие ненарушения инъективности, должно звучать так: “Тело пластины не должно содержать точек, являющихся центрами кривизны срединной поверхности”.

Вообще, сравнивать напряжения Био и Пиола-Кирхгофа не имеет смысла, поскольку эти напряжения различаются способом подсчета. Более правильным будет сравнение истинных напряжений для рассматриваемых типов материалов. Истинные напряжения выражаются с помощью следующих известных зависимостей:

$$\Sigma^{(1)} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^{(1)}) \cdot \mathbf{Q}^T; \quad \Sigma^{(2)} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{S}^{(2)}) \cdot \mathbf{F}^T,$$

где  $J = \text{Det}(\mathbf{F}) = \text{Det}(\mathbf{A})$  – относительное изменение объема;  $\mathbf{Q} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}^{-1}$  – ортогональный тензор поворота.

Разумно рассмотреть компоненты этих тензоров в повернутой системе координат, таким образом, чтобы вычислять напряжения “вдоль волокон”

$$\hat{\Sigma}^{(\alpha)} = \mathbf{Q}^T \cdot \Sigma^{(\alpha)} \cdot \mathbf{Q}.$$

Компоненты  $\hat{\Sigma}_{33}^{(\alpha)}$  этих тензоров сонаправлены с нормальными и вместе с компонентами  $\hat{\Sigma}_{\beta 3}^{(\alpha)} = \hat{\Sigma}_{3\beta}^{(\alpha)}$

равны нулю  $\hat{\Sigma}_{33}^{(\alpha)} = \hat{\Sigma}_{\beta 3}^{(\alpha)} = \hat{\Sigma}_{3\beta}^{(\alpha)} = 0$ .

На рис. 4 показаны графики распределения этих напряжений по толщине пластины в произ-

вольно выбранной точке  $x = \pi/3, y = \pi/4$  при  $W = 1$  и  $\nu = 0,3$ . Величины напряжений приведены в долях от  $E$ . Как можно заметить, напряжения в пластине из материала второго рода несколько больше напряжений, возникающих в пластине из материала Джона и если напряжения  $S_{11}^{(\alpha)}$  и  $\hat{\Sigma}_{11}^{(1)}$  близки к линейному распределению по толщине, то распределение истинных напряжений  $\hat{\Sigma}_{11}^{(2)}$  назвать линейным трудно.

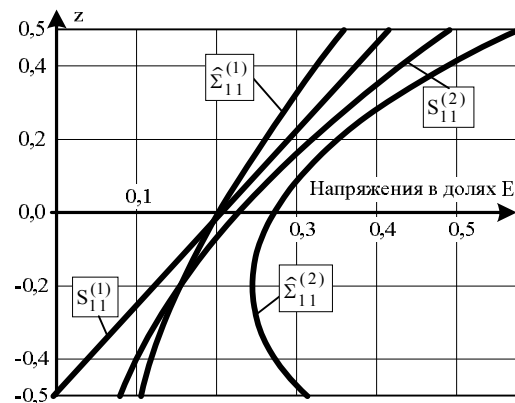


Рис. 4. Распределение напряжений по толщине пластины в точке  $x = \pi/3, y = \pi/4$

Следующий шаг для построения двумерной теории пластин – это линеаризация функций напряжений по малой величине  $z$ . Линейные по  $z$  зависимости напряжений Пиола-Кирхгофа получаются путем отбрасывания квадратичного слагаемого. Напряжения Био линеаризуются путем разложения их в ряд Тейлора и отбрасыванием членов выше первого порядка. Теперь после интегрирования по толщине напряжений и их моментов приходим к выражениям для погонных внутренних сил и моментов. Здесь необходимо отметить, что, несмотря на существенное качественное и количественное различие в распределении напряжений, величины моментов практически совпадают. Так, например, изгибающие моменты в точке  $x = y = 0$ , где они максимальны, принимают одинаковое значение, равное линейному выражению для этих моментов

$$M_x^{(1)} = M_x^{(2)} = M_y^{(1)} = M_y^{(2)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} W.$$

Аналогична ситуация и с крутящими моментами в угловой точке  $x = y = \pi/2$

$$M_{xy}^{(1)} = M_{xy}^{(2)} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} W.$$

В отличие от моментов мембранные усилия для различных типов материалов, которые в линейной теории изгиба пластин отсутствуют, различаются более существенно. Так, максимальные нормальные мембранные напряжения  $N_x$  в точке  $x = \pi/2, y = 0$

для первого и второго материалов определяются следующими формулами:

$$N_x^{(1)} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \sqrt{W^2 + 1} - 1 \right); \quad N_x^{(2)} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \cdot \frac{W^2}{2},$$

а сдвиговые – в точке  $x = y = \pi/4$  – формулами

$$N_{xy}^{(1)} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \sqrt{W^2/2 + 1} - 1 \right); \quad N_{xy}^{(2)} = \frac{Eh}{8(1+\nu)} W^2.$$

Можно заметить, что мембранные напряжения в пластине из материала второго рода являются первыми слагаемыми в разложениях в ряды Тейлора по  $W$  соответствующих мембранных напряжений для пластины из материала Джона, т.е. их близкие значения следует ожидать только при малых величинах прогибов. Кроме того, линеаризация напряжений Пиола-Кирхгофа корректирует их распределение, так, например, и в центре пластины  $x = y = 0$ , и в угловых точках  $x = y = \pm\pi/2$  мембранные усилия от напряжений Пиола-Кирхгофа равны

$$\int_{-h/2}^{h/2} S_{11}^{(2)} dz = \int_{-h/2}^{h/2} S_{22}^{(2)} dz = \frac{Eh^3 W}{24(1-\nu)}.$$

Усилия же от остальных напряжений, в том числе и линеаризованных напряжений Пиола-Кирхгофа, в этих точках равны нулю

$$N_x^{(1)} = N_y^{(1)} = N_x^{(2)} = N_y^{(2)} = \int_{-h/2}^{h/2} S_{11}^{(1)} dz = \int_{-h/2}^{h/2} S_{22}^{(1)} dz = 0.$$

В заключительном примере рассматривается зависимость энергии деформации пластины от величины прогиба. Ни рис. 5 показаны графики изменения энергий деформации пластин из рассматриваемых материалов  $\Pi^{(\alpha)}$  и энергии линейного изгиба  $\Pi^{(L)}$ , отнесенных к модулю упругости  $E$  при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,3$  и толщине  $h = 0,1\pi$ :

$$\Pi^{(\alpha)} = \frac{1}{E} \int_V W^{(\alpha)} dV;$$

$$\Pi^{(L)} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ \left( \partial_{xx} X_3 + \partial_{yy} X_3 \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \partial_{xx} X_3 \partial_{yy} X_3 - \left( \partial_{xy} X_3 \right)^2 \right] \right\} d\Omega = \frac{\pi^5 W^2}{21840}.$$

Различие между величинами  $\Pi^{(1)}$  и  $\Pi^{(2)}$  начинается при значительном прогибе, когда энергия мембранных напряжений на порядок превышает энергию изгибных. Обе эти величины существенно отличаются от линейной энергии изгиба, в которой мембранные напряжения отсутствуют.

Отметим, что “линеаризованные” по  $z$  (а точнее – квадратичные по  $z$ ) величины энергий  $\Pi^{(\alpha)}$  практически не отличаются от точных. Их графики совпадают с точностью до толщины линии в выбранном масштабе.

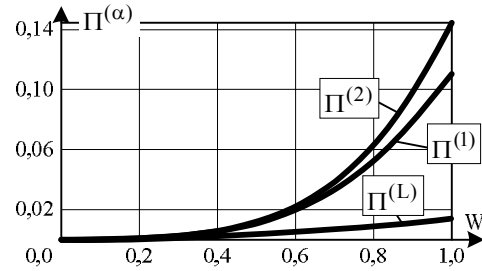


Рис. 5. Зависимость энергии деформации пластины от величины прогиба

### Заключение

1. Согласно гипотезе прямых нормалей перемещения по толщине пластины распределяются линейно, при этом деформации и даже, если справедлив закон Гука, напряжения линейной зависимости от вырожденной координаты не имеют. Степень этой нелинейности во многом определяется типом заложенного в пластину материала. Показано, что материал Джона дает распределение деформаций и напряжений по толщине гораздо ближе к линейному, чем материал второго порядка.

2. Показано, что принятие гипотез Кирхгофа-Лява может привести к нарушению условий инъективности.

3. Линеаризация напряжений хотя и меняет (иногда существенно) закон их распределения по вырожденной координате, но дальнейшее интегрирование этих величин по толщине приводит к практически одинаковым значениям изгибающих моментов. Мембранные усилия остаются различными.

4. Линеаризация практически не сказывается на величине энергии деформации, запасенной в пластине.

Автор выражает искреннюю благодарность С. А. Халилову за помощь в подготовке и написании статьи.

### Литература

1. Халилов, С.А. Плоский нелинейный изгиб балки. Вывод замкнутой системы уравнений [Текст] / С.А. Халилов, В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 1 (78). – С. 39-45.
2. Минтюк, В. Б. Исследование плоского нелинейного изгиба балки [Текст] / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2011. – № 3 (80). – С. 43-52.
3. Минтюк, В. Б. Исследование геометрически и физически нелинейного обобщенного плоского напряженного состояния [Текст] / В. Б. Минтюк // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2012. – № 4 (91). – С. 38-44.

4. Амбарцумян, С. А. Теория анизотропных пластин: прочность, устойчивость и колебания [Текст] / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1987. – 360 с.

5. Antman, St. S. *Nonlinear Problems of Elasticity [Text]* / St. S. Antman. – NY: Springer, 1995. – 835 p.

6. Ciarlet, Ph. G. *Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates [Text]* / Ph. G. Ciarlet. – Amsterdam: Elsevier, 1997. – 498 p.

7. Черных, К. Ф. *Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах [Текст]* / К. Ф. Черных. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1986. – 336 с.

8. Пановко, Я. Г. *Устойчивость и колебания упругих систем [Текст]* / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

9. Ciarlet, P. G. *Mathematical Elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity [Text]* / P. G. Ciarlet. – Elsevier Science Publishers, 1988. – 451 p.

2. Mintyuk, V. B. *Issledovanie ploskogo nelineinogo izgiba balki [Researching nonlinear plane bending of a beam]*. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya [Aerospace Engineering and Technology]*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2011, no. 3, vol. 80, pp. 43 – 52.

3. Mintyuk, V. B. *Issledovanie geometricheski i fizicheski nelineinogo obobshchennogo ploskogo napryazhenogo sostoyaniya [Research of geometrically and physically nonlinear generalized plane stress]*. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya [Aerospace Engineering and Technology]*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2012, no. 4, vol. 91, pp. 38 – 44.

4. Ambartsumyan, S. A. *Teoriya anizotropnykh plastin: prochnost', ustoichivost' i kolebaniya [The theory of anisotropic plates: strength, buckling and oscillations]*. Moscow, «Nauka» Publ., 1987. 360 p.

5. Antman, St. S. *Nonlinear Problems of Elasticity*. NY, Springer Publ., 1995. 835 p.

6. Ciarlet, Ph. G. *Mathematical Elasticity. Volume II: Theory of Plates*. Amsterdam, Elsevier Publ., 1997. 498 p.

7. Chernykh, K. F. *Nelineinaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh [Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations]*. Leningrad, «Mashinostroenie» Publ., 1986. 336 p.

8. Panovko, Ya. G. *Ustoichivost' i kolebaniya uprugikh sistem [Buckling and oscillations of elastic systems]*. Moscow, «Nauka» Publ., 1979. 384 p.

9. Ciarlet, P. G. *Mathematical Elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*. Elsevier Science Publishers, 1988. 451 p.

## References

1. Khalilov, S. A., Mintyuk, V. B. *Ploskii nelineinyi izgib balki. Vyvod zamknutoi sistemy uravnenii [Simple non-linear bending of beam. Derivation of closed equations set]*. *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya [Aerospace Engineering and Technology]*. Kharkiv, «KhAI» Publ., 2011, no. 1, vol. 78, pp. 39 – 45.

Поступила в редакцию 12.05.2017, рассмотрена на редколлегии 8.06.2017

## ЗАСТОСУВАННЯ ГІПОТЕЗ КІРХГОФА-ЛЯВА ПРИ НЕЛІНІЙНОМУ ВИГІНІ ПЛАСТИН

**В. Б. Минтюк**

Розглянуто дві пластини, які заповнено матеріалом Джона і стандартним матеріалом другого порядку. Для обох пластин вважаються справедливими гіпотези Кірхгофа-Лява. На прикладі зворотної задачі про нелінійний вигин пластин проведено порівняльний аналіз дійсного розподілу в них деформацій та напруг. Показано, що по товщині пластини напруги симетричного тензора Біо розподіляються за законом, який значно ближче до лінійного, ніж закон розподілення напруг другого тензора Піола-Кірхгофа. Лінеаризація напруг по виродженій координаті приводить до практично однакових величин внутрішніх моментів і суттєво відмінних мембранних зусиль.

**Ключові слова:** нелінійний вигин пластин, гіпотези Кірхгофа-Лява, енергетично спряжені тензори.

## APPLICATION OF KIRCHHOFF-LOVE HYPOTHESES FOR NON-LINEAR PLATE BENDING

**V. B. Myntiuk**

Two plates were considered that follow the Kirchhoff-Love hypotheses and have John's material formulation and the standard second order material formulation. A comparative analysis of actual strain and stress distributions was carried for the inverse problem of plate non-linear bending. It was shown that through-thickness variation of the components of plate Bio symmetric stress tensor was much closer to linear distribution than the distribution law for the components of second Piola-Kirchhoff stress tensor. Linearization of stresses with respect to the degenerated coordinate leads to practically similar values of internal moments and significantly different membrane forces.

**Keywords:** non-linear plate bending, Kirchhoff-Love hypotheses, energy-conjugated tensors.

**Минтюк Віталій Борисович** – канд. техн. наук, доц. кафедри прочності летательних апаратів, Національний аерокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ», Харків, Україна, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.

**Myntiuk Vitalii Borysovych** – PhD, assistant professor of Aircraft strength department of National Aerospace University “KhAI” named after M. Ye. Zhukovsky, Kharkiv, e-mail: vitalii.myntiuk@khai.edu.