

УДК 621.45.01:681.05.015

С. В. ЕПИФАНОВ, Р. Л. ЗЕЛЕНСКИЙ

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, Украина

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ЕМКОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

При анализе динамики проточных частей двигателей, пневмогидравлических агрегатов, трубопроводных систем и другого оборудования возникает необходимость оценки динамических свойств указанных систем и их элементов, которые обусловлены аккумуляцией массы и энергии на переходных режимах работы. В статье рассмотрены различные варианты упрощенного представления пневматических емкостей и на основании линеаризации соответствующих дифференциальных уравнений выполнен анализ основных динамических свойств и параметров: колебательности, продолжительности переходных процессов, собственных частот. Определено влияние геометрических параметров емкости и свойств газа на эти свойства и параметры.

Ключевые слова: математическая модель пневматической ёмкости, переходный процесс, законы сохранения энергии, массы, импульса, линеаризация, динамическая система, колебательность, аперриодичность, постоянная времени, частота

Список обозначений и индексов

a	- скорость звука в газе;
C_v	- теплоемкость при постоянном объеме;
c	- скорость газа;
D	- гидравлический диаметр;
F	- площадь поперечного сечения;
G	- массовый расход;
i	- энтальпия;
k	- коэффициент адиабаты газа;
L	- длина емкости;
M	- Число Маха;
m	- масса;
p	- давление;
R	- газовая постоянная;
T	- температура;
U	- внутренняя энергия;
V	- объем емкости;
ρ	- плотность (статическая);
ζ	- коэффициент сопротивления трения;
ξ	- коэффициент гидравлических потерь;
ω	- собственная частота;
τ	- постоянная времени;
v_x	- значение, соответствующее входу;
v_{yx}	- значение, соответствующее выходу;
0	- значение, соответствующее исходному установившемуся режиму.

1. Формулирование проблемы

В настоящее время динамические математические модели являются необходимым элементом, используемым на различных этапах проектирования, доводки и эксплуатации сложного оборудования, в состав которого входят пневмогидравличе-

ские элементы, и соответствующих систем автоматического управления (САУ). Примером такого оборудования являются газотурбинные двигатели (ГТД), проточная часть которых включает узлы, имеющие значительные объемы (основная и форсажная камеры сгорания, канал наружного контура, реактивное сопло, переходные каналы и др. В случае наземного применения ГТД возникают задачи моделирования их динамики совместно с присоединенными объемами, к которым можно отнести входное устройство с системой очистки воздуха, выходную шахту с устройствами шумоглушения, а в случае использования ГТД в системах транспорта газа – трубопроводы, присоединенные к газоперекачивающему агрегату, к компрессорному цеху и компрессорной станции, а также магистральный трубопровод.

При разработке систем управления и контроля используются различные математические модели, среди которых центральное место занимает нелинейная термогазодинамическая модель рабочего процесса [1], которая позволяет определять значения параметров проточной части с помощью термодинамических соотношений и характеристик узлов – компрессора, турбины, камеры сгорания, переходных каналов, входного и выходного устройств.

Основными факторами, определяющими динамику двигателя, являются инерция роторов, тепловая инерция конструктивных элементов, инерция пневматических объемов, задержки времени на тепловыделение и задержки времени на заполнение топливных коллекторов. Простейшие динамические

модели двигателей учитывают только инерцию роторов, и при этом обеспечивают решение большинства задач моделирования. Однако для ряда задач моделирования необходимы более точные модели, в которых учитывается динамика пневматических емкостей. Краткий обзор таких моделей приведен ниже.

Наиболее полное освещение общей задачи моделирования пневматических систем можно найти в работе [2]. Однако в ней приведено множество различных методических подходов, но нет прямых сравнений, позволяющих выработать рекомендации по их практическому использованию.

Применительно к газотурбинным двигателям, моделирование емкостей рассмотрено в работах А. А. Шевякова [3], И. Ф. Котляра [4], Д. В. Добрянского [5], А. Favke и Н. I. H. Saravanomuttoo [6, 7]. Использованный ими подход известен как метод межузловых объемов (ICV – intercomponent volumes). Он позволяет решать рассматриваемую задачу, однако его использование приводит к повышению порядка анализируемой системы дифференциальных уравнений, снижает ее устойчивость и существенно повышает трудоемкость вычислений. Чтобы преодолеть эти недостатки, в указанных работах приняты различные допущения. К сожалению, обоснование выбора этих допущений не приводится, что может привести к некорректным результатам.

Этот подход развит в работах других исследователей [8, 9-15].

Анализ показывает, что известные модели емкостей в составе ГТД основаны на следующих предположениях:

- баланс импульса не учитывается;
- гидравлическое сопротивление емкости не учитывается;
- емкость представляется как один элемент, состояние которого описывается давлением, температурой и массой.

Характеристики объема описываются дифференциальными уравнениями баланса массы и энергии. Эти уравнения решаются совместно с уравнениями динамики роторов и совместной работы узлов проточной части. В некоторых моделях учитывается только сохранение массы (в дальнейшем будем называть их моделями изотермического объема). Они позволяют моделировать изменение давления, однако температура на выходе из емкости принимается равной температуре на входе.

В модели, представленной О. С. Гуревичем [16], учитывается отличие статических давления и температуры от соответствующих параметров заторможенного потока. Однако баланс импульса не учитывается.

М. Henke, Т. Monz и М. Aigner [17] представляют возможности модели PROOSIS. В ней учитывается сохранение импульса. Однако в указанной работе характерное время переходных процессов, обусловленных влиянием емкости, связано с сохранением массы, что вызывает сомнения. В дальнейшем будет показано, что реальное значение этого времени значительно больше.

В работах [18-20] представлены модели, в которых законы сохранения импульса учитываются.

Исследования, необходимые для обоснования целесообразности учета или не учета законов сохранения импульса при моделировании емкостей, авторами указанных работ не приведены.

Авторами данной статьи в работе [21] выполнено исследование, которое показало, что отсутствие учета сохранения импульса может привести к значительным погрешностям в оценке динамических характеристик двигателя, связанных с влиянием емкостей.

Эти результаты подтверждены авторами работы [22]. Они сравнили три динамические модели: NVE (no volume effect), TVE (traditional simplified volume effect) и CVE (compressibility volume effect). Основное внимание было уделено запаздыванию, которое образуется в переходном процессе двигателя вследствие влияния емкости (то есть сжимаемости рабочего тела в ней). Результаты моделирования турбореактивного двигателя показали, что объемы оказывают малое влияние на результаты моделирования переходных характеристик. В начале переходного процесса модель CVE более точно воспроизводит детали переходного процесса, чем модели NVE и TVE. В работе проанализировано влияние учета сжимаемости в каждом узле двигателя. Показано, что это влияние зависит от положения рассматриваемого узла по отношению к сопловому аппарату турбины. Узлы, расположенные выше по потоку (компрессор и камера сгорания) способствуют запаздыванию в изменении частоты вращения при приемистости; а расположенные ниже по потоку узлы (турбина и форсажная камера) способствуют колебательному характеру переходных процессов. Компрессор и турбина влияют сильнее в начальной стадии приемистости, замедляя изменение частоты вращения и температуры. Турбина и форсажная камера влияют сильнее на последующей стадии переходного процесса, ускоряя изменение частоты вращения и температуры. Моделирование турбореактивного двухконтурного двигателя показало, что объемы проточной части низкого давления оказывают слабое влияние на частоту вращения ротора высокого давления и температуру газа; объем канала наружного контура значительно влияет на частоту вращения ротора низкого давления.

В статье [22] упомянуто, что авторы работ [14, 15] для решения проблемы вычислительной сложности при моделировании емкостей в составе проточной части двигателей предложили безытерационный метод. Такой подход широко применяется в вычислительной аэродинамике, когда динамика системы определяется несколькими группами факторов, имеющих существенно различные постоянные времени. Это открывает возможности для использования нелинейных поузловых динамических моделей двигателя с учетом динамики емкостей в системах реального времени, например, в составе комплексов для полунатурного моделирования САУ.

Таким образом, в ряде работ рассмотрено формирование динамических моделей ГТД, в которых учитывается влияние емкостей. В них показано, что основные узлы двигателя, такие как основная камера сгорания, компрессор, турбина, реактивное сопло и канал наружного контура, вызывают запаздывание переходных характеристик. Величина этого запаздывания мала и в первом приближении может не учитываться. Однако в некоторых случаях влияние емкостей может быть значительным. Во-первых, на переходные характеристики могут оказать значительное влияние емкости большого объема – форсажная камера с удлинительным каналом, канал наружного контура в двигателях с большой степенью двухконтурности и др. Во-вторых, при моделировании силовых установок для перекачки газа потребитель энергии (приводной компрессор и газовая магистраль) может иметь значительные присоединенные объемы.

Математическая модель емкости основана на учете следующих явлений: сохранении массы, сохранении энергии, сохранении импульса и гидравлическом сопротивлении канала. В известных работах одновременный учет всех этих факторов не рассмотрен. Встречаются модели, в которых есть сочетание лишь некоторых из них. Систематический сравнительный анализ всех возможных моделей, основанных на различных сочетаниях этих факторов, не выполнен.

Поэтому в работе [21] авторами данной статьи выполнено исследование влияния различных способов упрощенного математического описания емкостей на характер переходных процессов, получаемых при моделировании, а также разработаны рекомендации по их математическому описанию при моделировании ГТД.

При моделировании ГТД с целью создания систем автоматического управления возникает ряд специфических задач, которые связаны с моделированием емкостей: оценка наличия колебаний и характерных собственных частот объекта управления, обусловленных емкостями, оценка характерного

времени переходных процессов в емкостях. Эти задачи желательно решать минимальными средствами, без моделирования двигателя.

Соответствующие методы в известных работах не предложены. Кроме того, при моделировании емкостей не учитывается гидравлическое сопротивление. Нет анализа влияния наличия емкостей на колебательный характер переходных процессов. Не предложены алгоритмы, которые могли бы обеспечить решение уравнений динамики роторов и теплообмена, а также уравнений динамики емкостей с разным шагом интегрирования, или же реализовать безытерационное решение уравнений динамики емкостей на каждом шаге интегрирования уравнений, учитывающих остальные инерционные факторы.

Данная статья посвящена решению перечисленных проблем с использованием линеаризованных моделей емкостей. Вначале рассмотрены математические модели, основанные на различных сочетаниях упомянутых выше факторов. Они представлены системами нелинейных дифференциальных уравнений. Затем с помощью линеаризации этих систем уравнений для каждой модели получены линейные дифференциальные уравнения, обеспечивающие определение температуры и давления на выходе из емкости, получены аналитические решения, выполнен анализ колебательности и получены формулы, позволяющие определить характерные динамические параметры емкости (постоянные времени, собственную частоту и др.) на основании анализа их геометрических параметров, коэффициента гидравлического сопротивления, а также свойств газа.

В результате сформированы рекомендации по моделированию емкостей проточной части ГТД.

В данной работе изложен подход к решению этой задачи, обеспечивающий оценку основных динамических свойств емкостей.

2. Исходные математические модели пневматических ёмкостей

2.1. Основные допущения

Примем следующие допущения:

- емкость представляется одним элементом (как показано в [21], это не вносит существенных погрешностей в оценку основных динамических свойств);
- площадь поперечного сечения по длине емкости не изменяется;
- параметры газа условно отнесены к центру емкости;
- газ – совершенный;
- скорость газа достаточно мала ($M < 0.4$), чтобы пренебречь отличием статической плотности от

плотности, определенной по параметрам торможения потока;

- в качестве параметров, характеризующих состояние газа в емкости, будем рассматривать давление и температуру торможения, однако соответствующий индекс, обычно характеризующий параметры торможения, будем опускать;

- гидравлические потери давления в емкости описываются формулой Дарси-Вейсбаха

$$\Delta p = \xi \frac{RT}{2pF^2} G^2, \text{ а коэффициент гидравлических}$$

потерь емкости связан с коэффициентом сопротивления трения соотношением $\xi = \zeta \frac{L}{D}$.

Расчетная схема приведена на рис. 1.

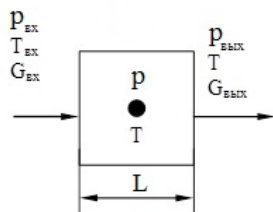


Рис. 1. Расчетная схема

2.2. Базовые модели

С учетом данных допущений, движение газа в емкости можно описать одномерной моделью с помощью уравнений, учитывающих баланс массы, энергии и импульса. Однако, как показано в работе [21], различные авторы используют различные упрощения этих уравнений или процесса, происходящего в емкости. Поэтому были составлены для анализа следующие модели.

Модель 1.1 (изотермическая без гидравлических потерь):

$$\tau_1^2 \frac{d^2 p}{dt^2} + p = \frac{1}{2}(p_{вх} - p_{вых}), \quad (1)$$

где $\tau_1 = \frac{1}{2} \tau_0$, $\tau_0 = \frac{L}{a_0}$ – время прохождения возмущения через емкость.

Модель 1.2 (изотермическая с учетом гидравлических потерь без учета сохранения импульса):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{k}{L} \sqrt{\frac{2RT}{\xi}} \left[\sqrt{p_{вх}(p_{вх} - p)} - \sqrt{p(p - p_{вых})} \right]. \quad (2)$$

Модель 1.3 (изотермическая с учетом гидравлических потерь и сохранения импульса):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{kRT}{LF} (G_{вх} - G_{вых}); \quad (3)$$

$$\frac{dG_{вх}}{dt} = \frac{2F}{L} \left(p_{вх} - p - \xi \frac{RT_{вх}}{2p_{вх} F^2} G_{вх}^2 \right); \quad (4)$$

$$\frac{dG_{вых}}{dt} = \frac{2F}{L} \left(p - p_{вых} - \xi \frac{RT}{2p F^2} G_{вых}^2 \right). \quad (5)$$

Модель 2.1 (учитывающая аккумуляцию массы и энергии в объеме, но не учитывающая потери давления):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{kRT^2}{pLF} \left(\frac{T_{вх}}{T} - 1 \right). \quad (6)$$

Модель 2.2 (учитывающая аккумуляцию массы и энергии, а также потери давления):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{kT}{L} \sqrt{\frac{2R}{\xi}} \left[\sqrt{\frac{p_{вх}(p_{вх} - p)}{T_{вх}}} - \sqrt{\frac{p(p - p_{вых})}{T}} \right]; \quad (7)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T^2}{p} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2R}{\xi}} \times \left[\left(k \frac{T_{вх}}{T} - 1 \right) \sqrt{\frac{p_{вх}(p_{вх} - p)}{T_{вх}}} - (k-1) \sqrt{\frac{p(p - p_{вых})}{T}} \right]. \quad (8)$$

Модель 3.1 (учитывающая аккумуляцию массы и энергии, а также сохранение импульса, но не учитывающая потери давления):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{kR}{LF} (T_{вх} G_{вх} - T G_{вых}); \quad (9)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT^2}{pLF} \left[\left(k \frac{T_{вх}}{T} - 1 \right) G_{вх} - (k-1) G_{вых} \right]; \quad (10)$$

$$\frac{dG_{вх}}{dt} = \frac{2F}{L} (p_{вх} - p); \quad (11)$$

$$\frac{dG_{вых}}{dt} = \frac{2F}{L} (p - p_{вых}). \quad (12)$$

Модель 3.2 (учитывающая аккумуляцию массы и энергии, а также сохранение импульса и потери давления) состоит из уравнений (9), (10), (4) и (5).

При использовании моделей 1.1, 1.2, 1.3 температура постоянна. Значения расходов при использовании моделей 1.2 и 2.2 могут быть определены по формулам, вытекающим из (4) и (5) при условии

$$\frac{dG_{вх}}{dt} = \frac{dG_{вых}}{dt} = 0 :$$

$$G_{вх} = F \sqrt{\frac{2p_{вх}(p_{вх} - p)}{\xi RT_{вх}}}; \quad G_{вых} = F \sqrt{\frac{2p(p - p_{вых})}{\xi RT}}. \quad (13)$$

В [21] установлено, что модели 1.1 и 3.1 не могут быть применены для моделирования емкости в составе модели агрегата, содержащего эту емкость, так как модель 1.1 дает незатухающие колебания, а модель 3.1 не обеспечивает условия неразрывности потока. Однако для оценки частотных характеристик эти модели могут быть использованы.

3. Линеаризация уравнений динамики емкостей

Представленные выше модели состоят из уравнений вида

$$\frac{dy}{dt} = f(x_1, \dots, x_n, y). \quad (14)$$

Нелинейный вид этих уравнений не позволяет использовать универсальные методы анализа динамических свойств [23], которые разработаны для линейных систем. Чтобы воспользоваться этими методами, линеаризуем уравнения емкости и запишем их относительно отклонений параметров $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$ от значений, которые соответствуют исходному установившемуся режиму (обозначенных индексом «0») в виде

$$\frac{d(\Delta y)}{dt} = \frac{df}{dx_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{df}{dx_n} \Delta x_n + \frac{df}{dy} \Delta y, \quad (15)$$

где производные определены в точке $(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_0)$, и перейдем к относительным отклонениям $\delta y = \frac{\Delta y}{y_0}$, $\delta x_1 = \frac{\Delta x_1}{x_{10}}$, ..., $\delta x_n = \frac{\Delta x_n}{x_{n0}}$:

$$y_0 \frac{d(\delta y)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_{10} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_{n0} \delta x_n + \frac{\partial f}{\partial y} y_0 \delta y. \quad (16)$$

Для каждой модели получим соответствующую систему линейных дифференциальных уравнений. Сформируем из этой системы дифференциальные уравнения для давления и температуры и выполним их анализ: определим порядок уравнений, их параметры и характер переходных процессов, обусловленных изменением входных параметров емкости – температуры на входе, а также входного и выходного давления.

4. Исследование динамических свойств емкости на основе анализа линеаризованных дифференциальных уравнений

4.1. Модель 1.1

Дифференциальное уравнение (1) является линейным, поэтому его вид при переходе к относительным отклонениям сохраняется:

$$\tau_1^2 \frac{d^2(\delta p)}{dt^2} + \delta p = \frac{1}{2} (\delta p_{\text{вх}} - \delta p_{\text{вых}}). \quad (17)$$

Система, описываемая таким уравнением, является колебательной, а ее решение при скачкообразном изменении входного или выходного давления на величину $\delta p = A$ имеет вид

$$\delta p(t) = \frac{1}{2} A \left(1 - \cos \frac{t}{\tau_1} \right), \quad (18)$$

и представляет незатухающие гармонические колебания с круговой частотой $\omega = \frac{1}{\tau_1}$.

При $L = 1$ м и $a_0 = 500$ м/с получим: $\tau_1 = 0.001$ с.

4.2 Модель 1.2

Линеаризуем уравнение (2):

$$\frac{d(\Delta p)}{dt} = \frac{k}{L} \sqrt{\frac{2RT}{\xi}} \times \left[\frac{(2p_{\text{вх}0} - p_0) \Delta p_{\text{вх}} - p_{\text{вх}0} \Delta p}{2\sqrt{p_{\text{вх}0}(p_{\text{вх}0} - p_0)}} - \frac{(2p_0 - p_{\text{вых}0}) \Delta p - p_0 \Delta p_{\text{вых}0}}{2\sqrt{p_0(p_0 - p_{\text{вых}0})}} \right].$$

Учтем, что

$$G_0 = F \sqrt{\frac{2p_{\text{вх}0}(p_{\text{вх}0} - p_0)}{\xi RT}} = F \sqrt{\frac{2p_0(p_0 - p_{\text{вых}0})}{\xi RT}},$$

откуда

$$p_0 = \sqrt{p_{\text{вх}0}^2 + \left(\frac{p_{\text{вх}0} - p_{\text{вых}0}}{2} \right)^2} - \frac{p_{\text{вх}0} - p_{\text{вых}0}}{2}.$$

Тогда, перейдя к относительным отклонениям, получим:

$$\tau_p \frac{d(\delta p)}{dt} + \delta p = K_{\text{вх}}^p \delta p_{\text{вх}} + K_{\text{вых}}^p \delta p_{\text{вых}}, \quad (19)$$

где $\tau_p = \frac{p_0}{p_{\text{вх}0} + 2p_0 - p_{\text{вых}0}} \xi \tau_0 M_0$ – постоянная времени;

$$M_0 = \frac{c_0}{a} \text{ – число Маха.}$$

$$K_{\text{вх}}^p = \frac{2p_{\text{вх}0} - p_0}{p_{\text{вх}0} + 2p_0 - p_{\text{вых}0}} \frac{p_{\text{вх}0}}{p_0},$$

$K_{\text{вых}}^p = \frac{p_{\text{вых}0}}{p_{\text{вх}0} + 2p_0 - p_{\text{вых}0}}$ – коэффициенты усиления.

Система, описываемая уравнением (19), является аperiodической. Характерное время переходного процесса определяется значением постоянной времени τ_p .

Для оценки значений постоянной времени и коэффициентов усиления можно учесть, что величина ξ мала, поэтому $\frac{p_{\text{вх}0}}{p_0} \approx \frac{p_{\text{вых}0}}{p_0} \approx 1$, тогда

$$\tau_p = \frac{1}{2} \xi \tau_0 M_0; \quad K_{\text{вх}}^p = \frac{1}{2}; \quad K_{\text{вых}}^p = \frac{1}{2}.$$

При $l = 1$ м, $\xi = 0.02$, $a = 500$ м/с и $M_0 = 0.3$ получим $\tau_p = 0,00006$ с.

Таким образом, данная модель описывает емкость как практически безынерционный объект.

4.3. Модель 1.3

Линеаризуем уравнения (3), (4), (5):

$$\frac{LF}{kRT} \frac{d(\Delta p)}{dt} = \Delta G_{\text{вх}} - \Delta G_{\text{вых}}, \quad (20)$$

$$\frac{d(\Delta G_{\text{вх}})}{dt} = \frac{2F}{L} \times \left[\Delta p_{\text{вх}} - \Delta p - \frac{\xi RT}{2F^2} \left(\frac{2G_0}{p_{\text{вх}0}} \Delta G_{\text{вх}} - \frac{G_0^2}{p_{\text{вх}0}^2} \Delta p_{\text{вх}} \right) \right];$$

$$\frac{d(\Delta G_{\text{вых}})}{dt} = \frac{2F}{L} \left[\Delta p - \Delta p_{\text{вых}} - \frac{\xi RT}{2F^2} \left(\frac{2G_0}{p_0} \Delta G_{\text{вых}} - \frac{G_0^2}{p_0^2} \Delta p \right) \right].$$

Дифференцируя уравнение (2) и подставляя в него производные от расходов, а также полагая

$$\frac{p_0}{p_{\text{вх}0}} \Delta G_{\text{вх}} - \Delta G_{\text{вых}} \approx \frac{LF}{kRT} \frac{d(\Delta p)}{dt}, \text{ получим:}$$

$$\frac{L^2}{2kRT} \frac{d^2(\Delta p)}{dt^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi RT G_0^2}{4F^2 p_{\text{вх}0}^2} \right) \Delta p_{\text{вх}} + \frac{1}{2} \Delta p_{\text{вых}} - \left(1 + \frac{\xi RT G_0^2}{4F^2 p_0^2} \right) \Delta p - \frac{\xi RT G_0}{2F^2 p_0} \frac{LF}{kRT} \frac{d(\Delta p)}{dt}.$$

В относительных отклонениях:

$$\frac{\tau_0^2}{2 + 0.5 \xi k M_0^2} \frac{d^2(\delta p)}{dt^2} + \frac{\tau_p}{1 + 0.25 \xi k M_0^2} \frac{d(\delta p)}{dt} + \delta p = \frac{2 + \xi k M_0^2}{4 + \xi k M_0^2} \delta p_{\text{вх}} + \frac{2}{4 + \xi k M_0^2} \frac{p_{\text{вых}0}}{p_0} \delta p_{\text{вых}}. \quad (21)$$

Выполним анализ этого уравнения. Условие аperiodичности имеет вид

$$\left(\frac{\tau_p}{1 + 0.25 \xi k M_0^2} \right)^2 > 4 \frac{\tau_0^2}{2 + 0.5 \xi k M_0^2}.$$

Учитывая малость значений ξ и M_0^2 , это условие можно упростить:

$$\tau_p^2 > 2\tau_0^2 \text{ или } \xi^2 \tau_0 M_0^2 > 8.$$

Очевидно, это условие не выполняется, и переходные процессы в емкости имеют колебательный характер. Коэффициенты левой части уравнения (21) положительны. Поэтому система устойчива, и указанные колебания затухают. Интенсивность затухания колебаний определяется значением постоянной времени τ_2 , которая обратна вещественной части α корней характеристического уравнения,

соответствующего дифференциальному уравнению (21):

$$\tau_2 = -\frac{1}{\alpha} = \frac{2\tau_0^2}{\tau_p} \frac{1 + 0.25 \xi k M_0^2}{2 + 0.5 \xi k M_0^2} \approx \frac{\tau_0^2}{\tau_p} = \frac{2\tau}{\xi},$$

где $\tau = \frac{L}{c_0}$ - время прохождения потока через емкость.

Частота колебаний равна модулю мнимой части корней:

$$\omega = \frac{\sqrt{\frac{\tau_p^2}{(1 + 0.25 \xi k M_0^2)^2} - \frac{4\tau_0^2}{2 + 0.5 \xi k M_0^2}}}{\frac{2\tau_0^2}{2 + 0.5 \xi k M_0^2}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\tau_0} = \frac{\sqrt{2a_0}}{L}.$$

Переходный процесс, вызванный скачкообразным изменением давления на входе на величину $\delta p_{\text{вх}} = A$, описывается выражением

$$p(t) = A \left[1 - e^{-\frac{\xi}{2\tau} t} \left(\cos \omega t + \frac{\xi M_0}{2\sqrt{2}} \sin \omega t \right) \right]. \quad (22)$$

Полученное значение постоянной времени значительно больше, чем для модели 1.2. Полученное значение частоты в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем прогнозирует модель 1.1, однако для грубой оценки данное различие можно считать незначительным.

4.4. Модель 2.1

Линеаризация уравнения (6) позволяет получить уравнение в относительных отклонениях

$$\frac{pLF}{kRG} \frac{d(\Delta T)}{dt} = -T_{\text{вх}0} \Delta T + T_0 \Delta T_{\text{вх}},$$

которое в относительных отклонениях имеет вид

$$\tau_T \frac{d(\delta T)}{dt} + \delta T = \delta T_{\text{вх}}, \quad (23)$$

где $\tau_T = \frac{pFL}{kRG_0 T_0} = \frac{\tau}{k}$ - постоянная времени.

Переходный процесс, вызванный скачкообразным изменением температуры на входе на величину $\delta T_{\text{вх}} = B$, описывается выражением

$$\delta T(t) = B \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_T}} \right). \quad (24)$$

При $L = 1$ м, $c_0 = 100$ м/с и $k = 1.4$ получим: $\tau_T = 0.007$ с. Эта величина мала, но значительно превосходит значение τ_p , которое дает модель 1.2.

4.5. Модель 2.2

Преобразуем уравнение (7) и линеаризуем его:

$$\frac{L}{k} \sqrt{\frac{\xi}{2R}} \frac{dp}{dt} = T \left[\sqrt{\frac{p_{вх} (p_{вх} - p)}{T_{вх}}} - \sqrt{\frac{p(p - p_{вых})}{T}} \right];$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{k} \sqrt{\frac{\xi}{2R}} \frac{d(\Delta p)}{dt} &= \frac{G_0}{2F} \sqrt{\frac{\xi R}{2}} (\Delta T_{вх} - \Delta T) + \\ &+ \frac{F}{2G_0} \sqrt{\frac{2}{\xi R}} [(2p_{вх0} - p_0) \Delta p_{вх} + \\ &p_0 \Delta p_{вых} - (p_{вх0} + 2p_0 - p_{вых0}) \Delta p]. \end{aligned}$$

Преобразование коэффициентов и переход к относительным отклонениям дает

$$\tau_p' \frac{d(\delta p)}{dt} + \delta p = K_T^p (\delta T - \delta T_{вх}) + K_{вх}^p \delta p_{вх} + K_{вых}^p \delta p_{вых}, \quad (25)$$

где $\tau_p' = 2\tau_p \frac{p_0}{p_{вх0} + 2p_0 - p_{вых0}}$;

$$K_T^p = \frac{1}{2} \xi k M_0^2 \frac{p_0}{p_{вх0} + 2p_0 - p_{вых0}}.$$

Аналогичным образом преобразуем уравнение (8):

$$\begin{aligned} \frac{2\tau}{k+1} \frac{d(\delta T)}{dt} + \delta T &= \delta T_{вх} + K_{вх}^T \delta p_{вх} + \\ &+ K_{вых}^T \delta p_{вых} - K_p^T \delta p, \end{aligned} \quad (26)$$

где $K_{вх}^T = \frac{2(k-1)}{k(k+1)\xi M_0^2} \frac{2p_{вх0} - p_0}{p_0} \frac{p_{вх0}}{p_0}$;

$$K_{вых}^T = \frac{2(k-1)}{k(k+1)\xi M_0^2} \frac{p_{вых0}}{p_0};$$

$$K_p^T = \frac{2(k-1)}{k(k+1)\xi M_0^2} \frac{p_{вх0} + 2p_0 - p_{вых0}}{p_0}.$$

Комбинируя (25) и (26), получим дифференциальные уравнения для давления и температуры:

$$\begin{aligned} \frac{\tau \tau_p}{k} \frac{d^2(\delta p)}{dt^2} + \left(\frac{\tau}{k} + \frac{k+1}{2k} \tau_p \right) \frac{d(\delta p)}{dt} + \delta p &= \\ = \frac{\tau}{2k} \left(\frac{d\delta p_{вх}}{dt} + \frac{d\delta p_{вых}}{dt} \right) + \frac{1}{2} (\delta p_{вх} + \delta p_{вых}) - \\ - \frac{\tau}{4} \xi M_0^2 \frac{d(\delta T_{вх})}{dt}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau \tau_p}{k} \frac{d^2(\delta T)}{dt^2} + \left(\frac{\tau}{k} + \frac{k+1}{2k} \tau_p \right) \frac{d(\delta T)}{dt} + \delta T &= \\ = \frac{k+1}{2k} \tau_p \frac{d(\delta T_{вх})}{dt} + \\ + \delta T_{вх} - \frac{k-1}{k} \frac{\tau_p}{\xi k M_0^2} \left(\frac{d(\delta p_{вх})}{dt} + \frac{d(\delta p_{вых})}{dt} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Левые части уравнений (27) и (28) имеют одинаковый порядок и одинаковые коэффициенты. Это свидетельствует о том, что динамические свойства емкости по давлению и температуре одинаковы.

Условие аperiodичности для этих уравнений имеет вид $\left(\frac{\tau}{k} + \frac{k+1}{2k} \tau_p \right)^2 > 4 \frac{\tau \tau_p}{k}$. Так как

$\tau_p = \frac{1}{2} \xi \tau_0 M_0$, справедливо неравенство $\tau_p \ll \tau$, и условие аperiodичности преобразуется к виду $\tau < 4k\tau_p$. Очевидно, это условие выполняется, и переходные характеристики имеют аperiodический характер.

Поэтому динамические свойства емкости определяются значениями ее постоянных времени

$$\tau_1 \approx \frac{\tau}{k} \text{ и } \tau_2 \approx \tau_p.$$

При скачкообразном изменении $\delta p_{вх}$ или $\delta p_{вых}$ на величину A_p переходные характеристики имеют вид

$$\delta p(t) = \frac{A_p}{2\tau_p} (Ae^{at} + Be^{bt} + \tau_p),$$

где $A = \frac{a+d}{a(a-b)}$; $B = \frac{b+d}{b(b-a)}$; $d = \frac{k}{\tau}$;

$$a = \frac{1}{\tau \tau_p} \left[-2\tau - (k+1)\tau_p - \sqrt{(2\tau + (k+1)\tau_p)^2 - 16k\tau \tau_p} \right];$$

$$b = \frac{1}{\tau \tau_p} \left[-2\tau - (k+1)\tau_p + \sqrt{(2\tau + (k+1)\tau_p)^2 - 16k\tau \tau_p} \right];$$

$$\delta T(t) = -\frac{A_p(k-1)}{\xi k \tau M_0^2} (A_1 e^{at} + B_1 e^{bt}),$$

где $A_1 = \frac{a}{a(a-b)}$; $B_1 = \frac{b}{b(b-a)}$.

При скачкообразном изменении $\delta T_{вх}$ на величину A_T переходные характеристики имеют вид

$$\delta p(t) = -\frac{A_T \xi k M_0^2}{4\tau_p} (A_1 e^{at} + B_1 e^{bt});$$

$$\delta T(t) = \frac{A_T(k+1)}{2\tau} \left(A_2 e^{at} + B_2 e^{bt} + \frac{2\tau}{k+1} \right),$$

где $A_2 = \frac{a+d_1}{a(a-b)}$; $B_2 = \frac{b+d_1}{b(b-a)}$; $d_1 = \frac{2k}{\tau_p(k+1)}$.

4.6. Модель 3.1

Линеаризованные и записанные для относительных отклонений уравнения (9)-(12) имеют вид

$$\frac{\tau}{k} \frac{d(\delta p)}{dt} = \delta G_{вх} - \delta G_{вых} + \delta T_{вх} - \delta T; \quad (29)$$

$$\frac{\tau}{k} \frac{d(\delta T)}{dt} = -\delta T + \delta T_{\text{ВХ}} + \frac{k-1}{k} (\delta G_{\text{ВХ}} - \delta G_{\text{ВЫХ}}); \quad (30)$$

$$\frac{1}{2} k \tau_0 M_0 (\delta G_{\text{ВХ}} - \delta G_{\text{ВЫХ}}) = \delta p_{\text{ВХ}} + \delta p_{\text{ВЫХ}} - 2\delta p. \quad (31)$$

В результате преобразования этих уравнений получим дифференциальные уравнения для давления и температуры:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \tau^2 \tau_0 M_0 \frac{d^3(\delta p)}{dt^3} + \frac{1}{4} k \tau \tau_0 M_0 \frac{d^2(\delta p)}{dt^2} + \tau \frac{d(\delta p)}{dt} + \delta p = \\ = \frac{1}{4} k \tau \tau_0 M_0 \frac{d^2 T_{\text{ВХ}}}{dt^2} + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{d(\delta p_{\text{ВХ}})}{dt} + \frac{d(\delta p_{\text{ВЫХ}})}{dt} \right) + \\ + \frac{1}{2} (\delta p_{\text{ВХ}} + \delta p_{\text{ВЫХ}}). \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \tau^2 \tau_0 M_0 \frac{d^3(\delta T)}{dt^3} + \frac{1}{4} k \tau \tau_0 M_0 \frac{d^2(\delta T)}{dt^2} + \tau \frac{d(\delta T)}{dt} + \delta T = \\ = \frac{1}{4} k \tau \tau_0 M_0 \frac{d^2 T_{\text{ВХ}}}{dt^2} + \delta T_{\text{ВХ}} + \\ + \frac{k-1}{2k} \tau \left(\frac{d(\delta p_{\text{ВХ}})}{dt} + \frac{d(\delta p_{\text{ВЫХ}})}{dt} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Выполним анализ полученных уравнений. Для этого выделим общее для них характеристическое уравнение

$$s^3 + as^2 + bs + c = 0, \quad (34)$$

где $a = \frac{k}{\tau}$, $b = \frac{4}{\tau_0^2}$, $c = \frac{4}{\tau \tau_0^2}$.

Вспользуемся решением Кардано [24]. Проверим условие аперидичности, которое имеет вид

$$Q > 0, \text{ где } Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2;$$

$$p = -\frac{a^2}{3} + b = -\frac{k^2}{3\tau^2} + \frac{4}{\tau \tau_0 M_0};$$

$$q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c = 2\left(\frac{k}{3\tau}\right)^3 - \frac{4k}{3\tau \tau_0^2} + \frac{4}{\tau \tau_0^2}. \quad (35)$$

Так как $\tau_0 < \tau$, $\frac{k^2}{3\tau^2} \ll \frac{4}{\tau_0^2}$ и $\frac{4k}{3\tau \tau_0^2} < \frac{4}{\tau \tau_0^2}$, $p > 0$ и $q > 0$, поэтому условие $Q > 0$ выполняется. Это означает, что переходная характеристика имеет колебательный характер.

Характеристическое уравнение (34) имеет один вещественный и два комплексно-сопряженных корня:

$$s_1 = A + B - \frac{a}{3} = A + B - \frac{k}{3\tau}; \quad (36)$$

$$s_{2,3} = \alpha \pm i\omega = -\frac{A+B}{2} - \frac{k}{3\tau} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad (37)$$

где $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$; $B = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$.

Анализ выражений (36) и (37) позволяет пренебречь малыми слагаемыми и получить следующие упрощенные выражения:

$$p \approx b = \frac{4}{\tau_0^2}; \quad q \approx -\frac{ab}{3} + c = \frac{4M_0}{\tau_0^3} \left(1 - \frac{k}{3}\right);$$

$$Q \approx \frac{1}{\tau_0^6} [c + x^2] \approx \left(\frac{4}{3\tau_0^2}\right)^3;$$

$$A \approx -\frac{1}{\tau_0} \sqrt[3]{x - \sqrt{c + x^2}}; \quad B \approx -\frac{1}{\tau_0} \sqrt[3]{x + \sqrt{c + x^2}},$$

где $x = 2M_0 \left(1 - \frac{k}{3}\right)$; $c = \left(\frac{4}{3}\right)^3$;

$$s_1 \approx -\frac{1}{\tau_0} \left(\sqrt[3]{x - \sqrt{c + x^2}} + \sqrt[3]{x + \sqrt{c + x^2}} + \frac{1}{3} k M_0 \right); \quad (38)$$

$$\alpha \approx -\frac{1}{\tau_0} \left[\frac{1}{3} k M_0 - \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{x - \sqrt{c + x^2}} + \sqrt[3]{x + \sqrt{c + x^2}} \right) \right]; \quad (39)$$

$$\omega \approx \frac{\sqrt{3}}{2\tau_0} \left(\sqrt[3]{x + \sqrt{c + x^2}} - \sqrt[3]{x - \sqrt{c + x^2}} \right). \quad (40)$$

Учитывая, что $M_0 < 0.3$, формулы для корней характеристического уравнения можно упростить, если заменить их линейными зависимостями от чисел Маха вида $y = y(M_0 = 0) + \frac{dy}{dM}(M_0 = 0)M_0$.

Необходимые значения производных

$$\frac{ds_1}{dM}(M_0 = 0) = -\frac{1}{\tau_0}; \quad \frac{d\alpha}{dM}(M_0 = 0) = -\frac{k-1}{2\tau_0};$$

$$\frac{d\omega}{dM}(M_0 = 0) = 0,$$

поэтому

$$s_1 \approx -\frac{M_0}{\tau_0} = -\frac{1}{\tau}; \quad \alpha \approx -\frac{k-1}{2\tau}; \quad \omega \approx \frac{1}{\tau_0}. \quad (41)$$

При скачкообразном изменении $\delta T_{\text{ВХ}}$ на величину A_T переходные характеристики имеют вид

$$\delta T(t) = A_T \frac{k}{\tau} \left(A_3 e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta_1) + B_3 e^{s_1 t} + K \right), \quad (42)$$

где α и ω определяются выражениями (41);

$$A_3 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\left(\alpha^2 - \omega^2 + \frac{4}{\tau \tau_0^2} \right)^2 + (2\alpha\omega)^2}{(\alpha^2 + \omega^2)[(\alpha - s_1)^2 + \omega^2]}};$$

$$B_3 = \frac{s_1^2 + \frac{4}{k\tau_0^2}}{s_1 \left[(s_1 - \alpha)^2 + \omega^2 \right]}; K = -\frac{4}{k\tau_0^2 s_1 (\alpha^2 + \omega^2)};$$

$$\beta = \arctg \frac{2\alpha\omega}{\alpha^2 - \omega^2 + \frac{4}{\gamma\tau_0^2}} - \arctg \frac{\omega}{\alpha - s_1} - \arctg \frac{\omega}{\alpha};$$

$$\delta p(t) = A_T \frac{k}{\tau} \left(A_4 e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta) + B_4 e^{s_1 t} \right), \quad (43)$$

где $A_4 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}{(\alpha^2 + \omega^2) \left[(\alpha - s_1)^2 + \omega^2 \right]}}$.

Переходный процесс, обусловленный скачкообразным изменением давления на величину A_p , определяется как

$$\delta T(t) = A_p \frac{2(k-1)}{k\tau_0^2} \left(A_5 e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta_1) + B_5 e^{s_1 t} \right), \quad (44)$$

где $A_5 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{(\alpha - s_1)^2 + \omega^2}}; B_5 = \frac{1}{(s_1 - \alpha)^2 + \omega^2};$

$$\beta_1 = -\arctg \frac{\omega}{\alpha - s_1};$$

$$\delta p(t) = A_p \frac{2}{\tau_0^2} \left(A_6 e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta_2) + B_6 e^{s_1 t} + K_2 \right), \quad (45)$$

где $A_6 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\left(\frac{\tau_0^2}{2\tau} + \alpha \right)^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2) \left[(\alpha - s_1)^2 + \omega^2 \right]}};$

$$B_6 = \frac{s_1 + \frac{\tau_0^2}{2\tau}}{s_1 \left[(s_1 - \alpha)^2 + \omega^2 \right]}; K_2 = -\frac{\tau_0^2}{2\tau s_1 (\alpha^2 + \omega^2)};$$

$$\beta_2 = -\arctg \frac{\omega}{\alpha + \frac{\tau_0^2}{2\tau}} - \arctg \frac{\omega}{\alpha - s_1} - \arctg \frac{\omega}{\alpha}.$$

4.7. Модель 3.2

Эта модель состоит из уравнений (4), (5), (9) и (10). Линеаризованные уравнения (4) и (5) представлены в форме (29) и (30). В результате линеаризации уравнений (9) и (10) получим необходимую для дальнейших преобразований разность

$$\frac{dG_{\text{ВХ}}}{dt} - \frac{dG_{\text{ВЫХ}}}{dt};$$

$$\begin{aligned} \frac{dG_{\text{ВХ}}}{dt} - \frac{dG_{\text{ВЫХ}}}{dt} &= \frac{2}{k\tau_0 M_0} \left(\frac{P_{\text{ВХ}0}}{P_0} + \xi k M_0^2 \frac{P_0}{P_{\text{ВХ}0}} \right) \times \\ &\times \delta p_{\text{ВХ}} + \frac{P_{\text{ВЫХ}0}}{P_0} \delta p_{\text{ВЫХ}} - \left(2 + \xi k M_0^2 \right) \delta p - \\ &- \xi k M_0^2 \left[2(\delta G_{\text{ВХ}} - \delta G_{\text{ВЫХ}}) + \delta T_{\text{ВХ}} - \delta T \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

С другой стороны, из (30) следует:

$$\delta G_{\text{ВХ}} - \delta G_{\text{ВЫХ}} = \frac{k}{k-1} \left[\frac{\tau}{k} \frac{d^2(\delta T)}{dt^2} + \frac{d(\delta T)}{dt} - \frac{d(\delta T_{\text{ВХ}})}{dt} \right]. \quad (47)$$

Определим значение $\frac{d(\delta p)}{dt}$ из (29) и (30):

$$\frac{d(\delta p)}{dt} = \frac{k}{k-1} \left[\frac{d(\delta T)}{dt} + \frac{1}{\tau} (\delta T - \delta T_{\text{ВХ}}) \right]. \quad (48)$$

Приравняв правые части уравнений (46) и (47), проинтегрировав полученное выражение и подставив в него значение производной (48), получим дифференциальное уравнение для температуры емкости:

$$\begin{aligned} \frac{\tau\tau_0^2}{2C} \frac{d^3(\delta T)}{dt^3} + \frac{\tau_0^2}{C} (0.5k + 2\xi) \frac{d^2(\delta T)}{dt^2} + \\ + \frac{\tau}{C} \left[2 + (2k+1)\xi M_0^2 \right] \frac{d(\delta T)}{dt} + \delta T = \\ = \frac{k\tau_0^2}{2C} \frac{d^2(\delta T_{\text{ВХ}})}{dt^2} + \frac{(k+1)\xi\tau_0 M_0}{C} \frac{d(\delta T_{\text{ВХ}})}{dt} + \\ + \delta T_{\text{ВХ}} + \frac{\tau(k-1)}{kC} \times \\ \times \left(\frac{P_{\text{ВХ}0}}{P_0} + \xi k M_0^2 \right) \frac{d(\delta p_{\text{ВХ}})}{dt} + \frac{P_{\text{ВЫХ}0}}{P_0} \frac{d(\delta p_{\text{ВЫХ}})}{dt}, \end{aligned} \quad (49)$$

где $C = 2 + \xi k M_0^2$.

Чтобы получить уравнение для давления, воспользуемся преобразованием Лапласа и передаточными функциями $W_T^P(s)$, $W_{P_{\text{ВХ}}}^T(s)$, $W_{P_{\text{ВЫХ}}}^T(s)$ и $W_{T_{\text{ВХ}}}^T(s)$, полученными из уравнений (29), (30) и (49). Результат имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\tau\tau_0^2}{2C} \frac{d^3(\delta p)}{dt^3} + \frac{\tau_0^2}{C} (0.5k + 2\xi) \frac{d^2(\delta p)}{dt^2} + \\ + \frac{\tau}{C} \left[2 + (2k+1)\xi M_0^2 \right] \frac{d(\delta p)}{dt} + \delta p = \\ = \frac{k\tau_0^2}{2C} \frac{d^2(\delta T_{\text{ВХ}})}{dt^2} + \frac{\tau_0 \xi k M_0}{C} \frac{d(\delta T_{\text{ВХ}})}{dt} + \frac{\tau}{C} \times \\ \times \left[\left(\frac{P_{\text{ВХ}0}}{P_0} + \xi k M_0^2 \right) \frac{d(\delta p_{\text{ВХ}})}{dt} + \frac{P_{\text{ВЫХ}0}}{P_0} \frac{d(\delta p_{\text{ВЫХ}})}{dt} \right] + \\ + \frac{1}{C} \left[\left(\frac{P_{\text{ВХ}0}}{P_0} + \xi k M_0^2 \right) \delta p_{\text{ВХ}} + \frac{P_{\text{ВЫХ}0}}{P_0} \delta p_{\text{ВЫХ}} \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Дифференциальные уравнения (49) и (50) имеют общее характеристическое уравнение вида (34),

$$\text{где } a = \frac{k+4\xi}{\tau}, \quad b = \frac{2}{\tau_0^2} \left[2 + (2k+1)\xi M_0^2 \right], \quad c = \frac{2C}{\tau\tau_0^2}.$$

Параметры, определяемые решением Кардано:

$$p = -\frac{a^2}{3} + b \approx \frac{2}{\tau_0^2} \left[2 + (2k+1)\xi M_0^2 \right],$$

$$q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c \approx \frac{4M_0}{3\tau_0^3} (3-k-4\xi),$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \approx \left\{ \frac{2}{3\tau_0^2} \left[2 + (2k+1)\xi M_0^2 \right] \right\}^3;$$

$$A \approx -\frac{1}{\tau_0} \sqrt[3]{x - \sqrt{c+x^2}}; \quad B \approx -\frac{1}{\tau_0} \sqrt[3]{x + \sqrt{c+x^2}},$$

$$\text{где } x = \frac{2}{3} M_0 (3-k-4\xi); \quad c = \left\{ \frac{2}{3\tau_0^2} \left[2 + (2k+1)\xi M_0^2 \right] \right\}^3.$$

Выражения для параметров корней характеристического уравнения, аналогичные формулам (38), (39) для модели 3.1:

$$s_1 \approx -\frac{1}{\tau_0} \times \left(\sqrt[3]{x - \sqrt{c+x^2}} + \sqrt[3]{x + \sqrt{c+x^2}} + \frac{1}{3}(k+4\xi)M_0 \right); \quad (51)$$

$$\alpha \approx -\frac{1}{\tau_0} \left[\frac{1}{3}(k+4\xi)M_0 - \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{x - \sqrt{c+x^2}} + \sqrt[3]{x + \sqrt{c+x^2}} \right) \right]. \quad (52)$$

Выражение (40) для ω остается неизменным.

Линеаризация этих выражений по числу Маха приводит к упрощенным формулам, аналогичным формуле (41):

$$s_1 \approx -\frac{1}{\tau}; \quad \alpha \approx -\frac{k-1+4\xi}{2\tau}; \quad \omega \approx \frac{1}{\tau_0}. \quad (53)$$

Из формул (53) следует, что гидравлическое сопротивление емкости оказывает влияние в основном на скорость затухания колебаний и практически не влияет на частоту колебаний и апериодическую составляющую переходного процесса.

Время переходного процесса зависит в основном от скорости движения газа и длины емкости.

При характерных для проточной части небольших значений гидравлического сопротивления время затухания колебаний меньше времени апериодической составляющей переходного процесса.

При скачкообразном изменении $\delta T_{вх}$ на величину A_T переходные характеристики имеют вид

$$\delta T(t) = A_T \frac{k}{\tau} \times \left(A_6 \cdot 1(t) - (A_6 + B_6) e^{s_1 t} + \frac{B_6 \sqrt{\left(\frac{K_3}{B_6} - \alpha\right)^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \beta_3) \right), \quad (54)$$

где α и ω определяются выражениями (40);

$$A_6 = -\frac{b_1}{s_1(\alpha^2 + \omega^2)}; \quad B_6 = \frac{(2\alpha s_1 - s_1^2) A_6 - s_1 - a_1}{\alpha^2 + \omega^2 - s_1(2\alpha - s_1)};$$

$$K_3 = 1 + s_1 A_6 - (2\alpha - s_1) B_6; \quad \beta_3 = \arctg \frac{\omega}{\frac{K_3}{B_6} - \alpha};$$

$$a_1 = \frac{2(k+1)\xi M_0}{k\tau_0}; \quad b_1 = \frac{2C}{k\tau_0^2};$$

$$\delta p(t) = A_T \frac{k}{\tau} \times \left(A_7 e^{s_1 t} + \frac{B_7 \sqrt{\left(\frac{K_4}{B_7} - \alpha\right)^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \beta_4) \right), \quad (55)$$

$$\text{где } A_7 = -B_7; \quad B_7 = -\frac{a_2 + s_1}{\alpha^2 + \omega^2 - s_1(2\alpha - s_1)};$$

$$K_4 = \frac{(\alpha^2 + \omega^2) A_7 - a_2}{s_1}; \quad \beta_4 = \arctg \frac{\omega}{\frac{D_2}{C_2} - \alpha};$$

$$a_2 = \frac{\xi M_0}{\tau_0}.$$

При скачкообразном изменении $\delta p_{вх}$ или $\delta p_{вых}$ на величину A_p переходные характеристики имеют вид

$$\delta T(t) = A_p \frac{2(k-1)}{\tau_0^2} \left(\frac{p_{inl0}}{p_0} + \xi k M_0^2 \right) \times \left(A_8 e^{s_1 t} + \frac{B_8 \sqrt{\left(\frac{K_5}{B_8} - \alpha\right)^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \beta_5) \right), \quad (56)$$

где

$$A_8 = -B_8; \quad B_8 = -\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2 - s_1(2\alpha - s_1)};$$

$$K_5 = \frac{(\alpha^2 + \omega^2)A_8 - 1}{s_1}; \beta_1 = \arctg \frac{\omega}{\frac{K_5}{B_8} - \alpha}.$$

$$\delta p(t) = A_p \frac{2}{\tau_0^2} \left(\frac{p_{вх0}}{p_0} + \xi k M_0^2 \right) \times \left(A_9 \cdot 1(t) - (A_9 + B_9) e^{s_1 t} + \frac{B_9 \sqrt{\left(\frac{K_6}{B_9} - \alpha \right)^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \beta_6) \right), \quad (57)$$

где $A_9 = -\frac{b_3}{s_1(\alpha^2 + \omega^2)}$; $B_9 = \frac{(2\alpha s_1 - s_1^2)A_9 - 1}{\alpha^2 + \omega^2 - s_1(2\alpha - s_1)}$;

$$K_6 = s_1 A_9 - (2\alpha - s_1) B_9; \beta_6 = \arctg \frac{\omega}{\frac{K_6}{B_9} - \alpha}; b_3 = \frac{1}{\tau}.$$

5. Результаты моделирования

Для оценки точности линеаризованных моделей емкостей было выполнено моделирование переходных характеристик с использованием исходных нелинейных моделей, а также из линеаризованных аналогов. На рис. 2 и 3 представлены переходные характеристики, соответствующие изменению давления в емкости при возмущении давления и температуры на входе. Как видно, линейные модели корректно воспроизводят основные особенности и параметры переходных процессов: колебательный характер, время переходных процессов, частоту колебаний и амплитуду заброса. Важно, что именно эти характеристики являются предметом анализа при разработке систем автоматического управления. Это дает основания рекомендовать полученные линейные модели для практического применения.

Значения динамических параметров, полученных в результате линейного анализа, представлены для всех исследуемых моделей в таблице 1. Эти значения соответствуют следующим параметрам емкости: $L=1$ м, $c=100$ м/с, $a=500$ м/с и $\xi=0.42$.

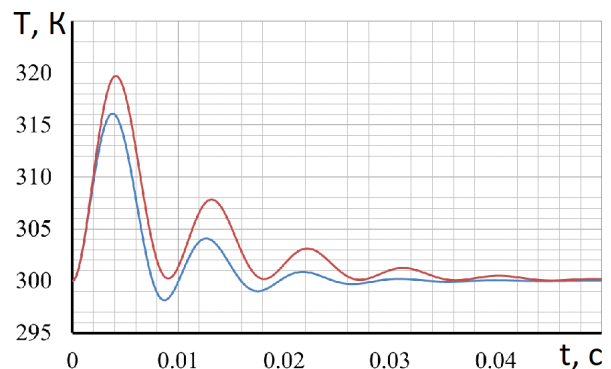
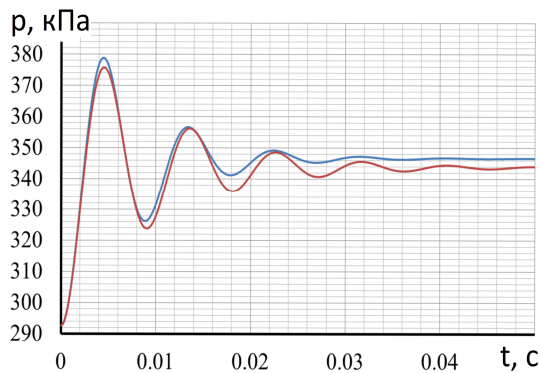


Рис. 2. Изменение давления в емкости при возмущении входного давления (одноремкостная модель, — нелинейная модель, — линейная модель)

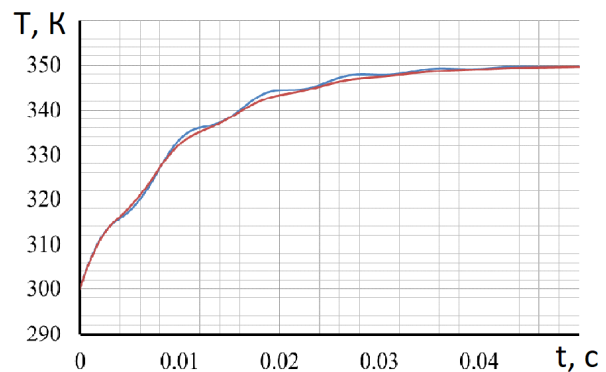
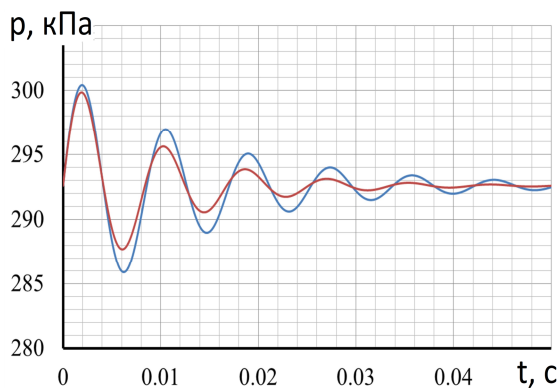


Рис. 3. Изменение давления в емкости при возмущении температуры на входе (одноремкостная модель, — нелинейная модель, — линейная модель)

Таблица 1

Динамические параметры объемов

Модель	Характер переходного процесса	Постоянные времени		Собственная частота, ω	
		Формула	Значение, с	Формула	Значение, 1/с
1.1	колебательный	∞	∞	$\frac{2}{\tau_0}$	1000
1.2	апериодический	$\tau_p \approx \frac{1}{2} \xi \tau_0 M_0$	0.000084	-	
1.3	колебательный	$\frac{2\tau}{\xi}$	0.0476	$\frac{\sqrt{2}}{\tau_0}$	707
2.1	апериодический	$\frac{\tau}{k}$	0.00714	-	-
2.2	апериодический	$\frac{\tau}{k}, \tau_p$	0.00714, 0.000084	-	-
3.1	колебательный	$\tau, \frac{2\tau}{k-1}$	0.01, 0.05	$\frac{1}{\tau_0}$	500
3.2	oscillatory	$\tau, \frac{2\tau}{k-1+4\xi}$	0.01, 0.00962	$\frac{1}{\tau_0}$	500

Заключение

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Учет закона сохранения импульса вносит существенный вклад в характер переходных процессов, поэтому при моделировании емкостей в составе ГТД им пренебрегать нельзя. Поэтому необходимо использовать модель 3.2.

2. Представление емкостей проточной части ГТД одноемкостными линеаризованными моделями обеспечивает точность, необходимую для моделирования основных динамических свойств емкостей – времени переходных процессов, частот собственных колебаний и величины заброса.

3. Переходные процессы в емкости, описываемые указанной моделью, имеют колебательный характер, а характерное время переходных процессов определяется временем затухания колебаний и постоянной времени апериодической компоненты.

4. Характерное время переходных процессов в емкости можно оценить с помощью постоянной времени апериодической компоненты $\tau = \frac{L}{c}$, где L – длина емкости, c – скорость потока. Таким образом, эта величина равна времени прохождения газа через емкость.

5. Время затухания колебаний зависит от гидравлического сопротивления емкости. При малом гидравлическом сопротивлении время затухания колебаний существенно (при отсутствии сопротивления

– в 5 раз) превышает длительность апериодической составляющей.

6. Характерная собственная частота колебаний емкости может быть оценена как $f = \frac{1}{\tau_0}$, где

$$\tau_0 = \frac{L}{c_0}, \quad c_0 - \text{скорость звука.}$$

7. Время переходных процессов в рассмотренном примере составляет порядка 0,01 с и соизмеримо с характерным временем таких процессов, как задержка тепловыделения в камере сгорания, заполнение топливных коллекторов и др. Поэтому в случае моделирования указанных факторов целесообразно включать в состав модели также и динамику емкостей.

8. Полученные аналитические решения уравнений динамики емкостей позволяют формировать модели двигателей и их систем автоматического управления, в которых динамика двигателя «в большом» представлена дифференциальными уравнениями динамики роторов (и, при необходимости, уравнениями динамики теплообмена и изменения радиальных зазоров), а динамика емкостей – аналитическими решениями линеаризованных уравнений, которые применяются локально на каждом шаге решения указанных дифференциальных уравнений. Применение такого подхода обеспечит существенное (на несколько порядков) увеличение шага интегрирования без потери устойчивости решений и соответствующее уменьшение времени вычислений.

Литература

1. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей [Текст] / С. В. Епифанов, Б. И. Кузнецов и др. – К. : Техника, 1998. – 312 с.
2. Гликман, Б. Ф. Математические модели пневмогидравлических систем [Текст] / Б. Ф. Гликман. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 368 с.
3. Шевяков, А. А. Системы автоматического управления авиационными воздушно-реактивными силовыми установками [Текст] : учебник для студентов вузов / А. А. Шевяков. – М. : Машиностроение, 1992 – 432 с.
4. Переходные процессы в газотурбинных установках [Текст] ; под ред. проф. И. В. Котляра - Л. : Машиностроение, 1973. – 256 с.
5. Добрянский, Г. В. Динамика авиационных ГТД [Текст] / Г. В. Добрянский, Т. С. Мартынова – М. : Машиностроение, 1989. – 240 с.
6. Fawke, A. J. Digital Computer Methods for Prediction of Gas Turbine Dynamic Response [Text] / A. J. Fawke, H. I. H. Saravanamuttoo // Rept. 710550, Society of Automotive Engineers. - Station, Newcastle, England, 1971. – 23 p.
7. Fawke, A. J. Digital Computer Simulation of Gas Turbine Dynamic Behavior [Text] : Ph.D. thesis / Fawke A. J. ; University of Bristol. - Bristol, England, 1970. – 128 p.
8. Jaw, Link C. Aircraft engine controls: design, system analysis, and health monitoring [Text] / Link C. Jaw, Jack D. Mattingly // AIAA Education Series, AIAA. – Reston, VA, 2009. – 361 p.
9. Gas Turb web site [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.gasturb.de>. – 12.02.2017.
10. Steady-State and Transient Performances Simulation of Large Civil Aircraft Auxiliary Power Unit / Y. S. Zhao, J. Hu, T. Y. Wu at al. // ISABE paper. – ISABE-2011-1323. – 2011. – 10 p.
11. Micro Gas Turbine Real-Time Modeling : Test Rig Verification [Text] / F. Ghigliazza, A. Traverso, M. Pascenti at al. // ASME Paper. – GT2009-59124. – 2009. – 8 p.
12. Davison, C. R. Comparison of Transient Modeling Techniques for a Micro Turbine Engine [Text] / C. R. Davison, A. M. Birk // ASME Paper. – GT2006-91085. – 2006. – 10 p.
13. Koçer, G. Simulation of the Transient Response of a Helicopter Turboshaft Engine to hot-gas Ingestion [Text] / G. Koçer, O. Uzol, İ. Yavrucuk // ASME Paper. – GT2008-51164. – 2008. – 6 p.
14. Non-Iterative Method of Aero-Engine Modeling Using Complementary Variables [Text] / Y. Gang, S. Jianguo, H. Xianghua at al. // Journal of Aerospace Power, Chinese Society of Aeronautics and Astronautics. – Beijing, China, 2003. – 8 p.
15. Non-Iterative Aero engine Model Based on Volume Effect [Text] / X. Kong, X. Wang, D. Tan at al. // AIAA paper. – AIAA2011-6623. – 2011. – 6 p.
16. Гуревич, О. С. Системы автоматического управления авиационными ГТД [Текст] : энцикл. справ ; под ред. д.т.н., проф. О. С. Гуревича. – М. : TOPYS ПРЕСС, 2011. – 208 с.
17. Henke, M. Introduction of a New Numerical Simulation Tool to Analyze Micro Gas Turbine Cycle Dynamics [Text] / M. Henke, T. Monz, M. Aigner // ASME Paper. – GT2016-56335. – 2016. – 11 p.
18. Culmone, M. V. Sensitivity Analysis and Experimental Validation of Transient Performance Predictions for a Short-Range Turbofan [Text] / M. V. Culmone, N. Garcia-Rosa, X. Carbonneau // ASME Paper. – GT2016-57257. – 2016. – 10 p.
19. Wang, C. Transient Performance Simulation of Aircraft Engine Integrated with Fuel and Control Systems [Text] / C. Wang, Y.-G. Li, B. Y. Yang // ISABE Paper. – ISABE-2015-20103. – 2015. – 11 p.
20. Volume Dynamics Propulsion System Modeling for Supersonics Vehicle Research. [Text] / G. Kopasakis, J. W. Connolly, D. E. Paxson at al. // ASME Paper. – GT2008-50524. – 2008. – 10 p.
21. Епифанов, С. В. Моделирование пневматических емкостей в задачах анализа динамики газотурбинных двигателей [Текст] / С. В. Епифанов, К. С. Епифанов, Р. Л. Зеленский // Авиационно-космическая техника и технология. – 2016. – № 5 (132). – С. 52–59.
22. Investigation of the Compressibility Effects on Engine Transient Performance [Text] / Y. Shi, Q. Tu, P. Jiang at al. // ASME Paper. – GT2015-42889. – 2015. – 8 p.
23. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления [Текст] / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. - 768 с.
24. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] : пер с англ. / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. - 831 с.

References

1. Epifanov, S. V., Kuznecov, B. I. Sintez sistem upravlenija i diagnostirovanija gazoturbinnyh dvigatelej [Turbine Engines Control and Diagnosing Systems Synthesis]. Kiev, Tehnika Publ, 1998. 312 p.
2. Glikman, B. F. Matematicheskie modeli pnevmogidravlicheskih sistem [Mathematical Models of Pneumatic-hydraulic Systems]. Moscow, Nauka Publ. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986. 368 p.
3. Shevjakov, A. A. Sistemy avtomaticheskogo upravlenija aviacionnymi vozdušno-reaktivnymi silovymi ustanovkami [Automatic Control Systems of Air-breathing Power Plants]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 432 p.
4. I. Kotlyar Perehodnye processy v gazoturbinnyh ustanovkah [Transient Processes in Gas-turbine Power Plants]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1973. 256 p.

5. Dobrjanskij, G. V., Mart'janova, T. S. *Dinamika aviacionnyh GTD* [Aircraft turbine engines dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 240 p.
6. Fawke, A. J., Saravanamuttoo, H. I. H. *Digital Computer Methods for Prediction of Gas Turbine Dynamic Response. Rept. 710550, Society of Automotive Engineers*. Station, Newcastle, England, 1971. 23 p.
7. Fawke, A. J. *Digital Computer Simulation of Gas Turbine Dynamic Behavior*. Ph.D. thesis. Bristol, England, 1970. 128 p.
8. Jaw, Link C. Jack D., Mattingly. *Aircraft engine controls: design, system analysis, and health monitoring*. AIAA Education Series, AIAA, Reston, VA, 2009. 361 p.
9. *Gas Turb web site*. Available at: <http://www.gasturb.de> (accessed 12.02.2017).
10. Zhao, Y. S., Hu, J., Wu, T. Y., Chen, J. J. *Steady-State and Transient Performances Simulation of Large Civil Aircraft Auxiliary Power Unit*. ISABE paper ISABE-2011-1323, 2011. 10 p.
11. Ghigliazza, F., Traverso, A., Pascenti, M. A., Massardo, F. *Micro Gas Turbine Real-Time Modeling: Test Rig Verification*. ASME Paper GT2009-59124, 2009. 8 p.
12. Davison, C. R., Birk, A. M. *Comparison of Transient Modeling Techniques for a Micro Turbine Engine*. ASME Paper GT2006-91085, 2006. 10 p.
13. Koçer, G., Uzol, O., Yavrucuk, İ. *Simulation of the Transient Response of a Helicopter Turbohaft Engine to hot-gas Ingestion*. ASME Paper GT2008-51164, 2008. 6 p.
14. Gang, Y., Jianguo, S., Xianghua, H., Wei-Sheng, S. *A Non-Iterative Method of Aero-Engine Modeling Using Complementary Variables*. Journal of Aerospace Power, Chinese Society of Aeronautics and Astronautics, Beijing, China, 2003. 8 p.
15. Kong, X., Wang, X., Tan, D., He, A. *A Non-Iterative Aero engine Model Based on Volume Effect*. AIAA paper AIAA2011-6623, 2011. 6 p.
16. Gurevich, O. S. *Sistemy avtomaticheskogo upravlenija aviacionnymi GTD* [Automatic Control Systems of Aircraft Turbine Engines]. Moscow, TORUS PRESS, 2011. 208 p.
17. Henke, M., Monz, T., Aigner, M. *Introduction of a New Numerical Simulation Tool to Analyze Micro Gas Turbine Cycle Dynamics*. ASME Paper GT2016-56335, 2016. 11 p.
18. Culmone, M. V., Garcia-Rosa, N., Carbonneau X. *Sensitivity Analysis and Experimental Validation of Transient Performance Predictions for a Short-Range Turbofan*. ASME Paper GT2016-57257, 2016. 10 p.
19. Wang, C., Li, Y.-G., Yang, B. Y. *Transient Performance Simulation of Aircraft Engine Integrated with Fuel and Control Systems*. ISABE Paper ISABE-2015-20103, 2015. 11 p.
20. Kopasakis, G., Connolly, J. W., Paxson, D. E., Ma. P. *Volume Dynamics Propulsion System Modeling for Supersonics Vehicle Research*, ASME Paper GT2008-50524, 2008. 10 p.
21. Epifanov, S. V., Epifanov, K. S., Zelenskij, R. L. *Modelirovanie pnevmaticheskikh emkostej v zadachah analiza dinamiki gazoturbinnih dvigatelej* [Modeling of the Pneumatic Capacities in the Gas Turbine Engine Dynamics Analysis]. *Aviacionno-kosmicheskaja tehnika i tehnologija*, 2016, no. 5 (132), pp. 52–59.
22. Shi, Y., Tu, Q., Jiang, P., Zheng, H., Cai, Y. *Investigation of the Compressibility Effects on Engine Transient Performance*. ASME Paper GT2015-42889, 2015. 8 p.
23. Besekerskij, V. A., Popov, E. P. *Teorija sistem avtomaticheskogo upravlenija* [Automatic Control Systems Theory]. Moscow, Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1975. 768 p.
24. Korn, G., Korn, T. *Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, theorems and Formulas for Reference and Review]. Moscow, Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1984. 831 p.

Поступила в редакцію 1.04.2017, рассмотрена на редколлегии 9.06.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. каф. систем управления летательными аппаратами А. С. Гольцов, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

ОЦІНКА ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПНЕВМАТИЧНИХ ЄМНОСТЕЙ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНЕАРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ

С. В. Єпіфанов, Р. Л. Зеленський

Під час аналізу динаміки проточних частин двигунів, пневмогідролічних агрегатів, трубопровідних систем та іншого обладнання виникає необхідність оцінки динамічних властивостей зазначених систем та їх елементів, які обумовлені акумуляцією маси та енергії на перехідних режимах роботи. У статті розглянуто різні варіанти спрощеного представлення пневматичних ємностей і на основі лінеаризації відповідних диференціальних рівнянь виконано аналіз основних динамічних властивостей і параметрів: коливальності, тривалості перехідних процесів, власних частот. Визначено вплив геометричних параметрів ємності та властивостей газу на ці властивості та параметри.

Ключові слова: математична модель пневматичної ємності, перехідний процес, закони збереження енергії, маси, імпульсу, лінеаризація, динамічна система, коливальність, аперіодичність, стала часу, частота

**DYNAMIC PROPERTIES OF PNEUMATIC CAPACITIES ESTIMATION
USING LINEARIZED EQUATIONS**

S. Yepifanov, R. Zelenskyi

Dynamic analysis of turbine engine gas path, pneumatic and hydraulic equipment, pipeline systems and other equipment meets the problem of dynamic parameters estimation, which are related with mass, energy and momentum accumulation at transient operating conditions. The paper deals with different variants of simplified representation of the pneumatic capacities and on the base of differential equations linearization gives analysis of the main dynamic properties and parameters: oscillation ability, transient processes durability, natural frequencies. Influence of geometric parameters of the capacity and properties of the gas on these properties and parameters is determined.

Key words: mathematical model of pneumatic capacity, transient process, mass, energy and momentum conservation laws, dynamic system, linearization, oscillation, aperiodicity, time constant, natural frequency

Епифанов Сергей Валериевич – д-р техн. наук, проф., зав. каф. конструкции авиационных двигателей, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: aedlab@gmail.com.

Зеленский Роман Леонидович – канд. техн. наук, ст. преп. каф. конструкции авиационных двигателей, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: aedlab@gmail.com.

Yepifanov Sergiy – Doctor of Technical Science, Professor of Aircraft Engine Design department, National aerospace university named after N. Ye. Zhukovsky “KhAI”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: aedlab@gmail.com.

Zelenskiy Roman – Candidate of Technical Science, Senior Lecturer of Aircraft Engine Design department, National aerospace university named after N. Ye. Zhukovsky “KhAI”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: aedlab@gmail.com.