УДК 658.5:004

Ю.К. ТАРАНЕНКО, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри
Дніпропетровського університету імені Альфреда Нобеля

О.Г. ХОЛОД, кандидат технічний наук, доцент, професор
Дніпропетровського університету імені Альфреда Нобеля

О.А. ЗАРУБІН, студент
Дніпропетровського університету імені Альфреда Нобеля

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В МОДЕЛЮВАННІ РОБОТИ ПІДПРИЄМСТВА

У статті розглянуто модель задачі мінімізації маршруту перевезень готової продукції замовникам (задача комівояжера), наведено приклади розв'язування. Для аналізу задач при розмірності матриці ваг, що потребує значної кількості обчислень, авторами розроблено спеціальний додаток до електронних таблиць Excel (усіх існуючих версій) із застосуванням програмування на VBA та вбудованого в таблиці обчислювача Solver. З метою мінімізації відходів у задачах розкрою деревини запропоновано використовувати математичну модель цілочисельного програмування. Запропоновано чисельну реалізацію задачі методом гілок та границь у пакеті прикладних програм MathCad 14.0.

Ключові слова: оптимізація, цільова функція, математична модель, цілочисельне програмування, метод гілок та границь, задача комівояжера.

Актуальність досліджень. Проблеми вибору раціонального управлінського рішення в унікальних ситуаціях, характерних для адміністративної діяльності (вибір плану капіталовкладень, проектів проведення наукових досліджень, оптимального плану виробництва, визначення перспектив розвитку підприємства та ін.) завжди цікавили фахівців і дослідників. Розв'язування цих задач неможливе без використання методів математичного моделювання і створення відповідного програмного забезпечення [2, 5].

Значна частка економічних задач описується в рамках лінійних співвідношень, тобто для їх дослідження доцільно використовувати методи лінійного програмування (ЛП) [3]. Часом народження ЛП прийнято вважати 1939 р., коли була надрукована брошура Л.В. Канторовича «Математичні методи організації і планування виробництва» [5]. Оскільки методи, викладені ним, були мало придатні для ручного рахунку, а швидкодіючих обчислювальних машин у той час не існувало, робота Л.В. Канторовича залишилася майже не поміченою. Своє друге народження ЛП одержало на початку п'ятдесятих років з появою ЕОМ. Тоді почалося загальне захоплення ЛП, що викликало, у свою чергу, розвиток інших розділів математичного програмування.

Таким чином, слід визначити, що використання математичного моделювання і сучасних інформаційних технологій і в завданнях планування роботи підприємства, розгляд різних моделей, аналіз отриманих результатів на прикладі конкретних пакетів обумовлюють актуальність досліджень цієї роботи.

Цілі дослідження. Ця робота спрямована на розробку методів дослідження конкретних завдань планування роботи підприємства, розмірність яких потребує залучення не тільки аналітичних досліджень математичних моделей, а й чисельної реалізації економіко-математичних задач.

Виклад основного матеріалу. ***Метод гілок та границь в задачах лінійної оптимізації.*** У значній частині практичних економічних завдань потрібно визначити цілочисельний оптимальний план. Наприклад, завдання розподілу виробничих площ між структурними підрозділами, визначення оптимального маршруту доставки замовлень, завантаження устаткування, розкрою матеріалу тощо. До дослідження таких задач застосовують методи цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) [3–5], орієнтовані на вирішення завдань, у яких всі змінні або частина з них є цілі.

У загальному випадку задача ЦЛП формулюється таким чином: знайти план $\overline{x}^* = (x_1^*; x_2^*; ..., x_n^*)$, який оптимізує значення цільової функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt \tag{1}$$

при виконанні обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \geq \\ \leq \\ = \end{Bmatrix} b_i; \quad i = \overline{1, m}; \tag{2}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}; \tag{3}$$

$$x_j \Rightarrow цілі. \tag{4}$$

Широко використовуваний для задач ЦЛП виду (1) – (4) метод гілок та границь належить до групи комбінаторних методів, ідея яких полягає в тому, що процедуру повного перебору всіх планів замінюють частковим перебором. Відсів неперспективних варіантів реалізується шляхом відкидання варіантів, які завідомо не містять шуканого оптимуму. Рішення задачі ЦЛП складається з кроків:

<u>0 крок</u>. Відкинувши умови (4) цілочисельності змінних, на безлічі припустимих планів G_0 знаходимо оптимальне значення функції мети (1), при цьому вводимо оцінку функції якості (функції мети):

$$\xi(G_0) = F(\overline{X}_0)\,. \tag{5}$$

Оцінку (5) приймаємо за верхню оцінку функції якості, якщо вирішується завдання на opt типу max, і за нижню оцінку в задачах знаходження opt типу min. Якщо план $\overline{X}_0$ задовольняє умовам цілочисельності (4), то він вважається оптимальним для вихідної задачі (1) – (4), якщо ні – переходимо до процесу розгалуження.

<u>1 крок</u>. Обираємо деяку ***нецілочисельну компоненту*** плану $\overline{X}_0$: $x_j = x_{j0}$, $1 \leq j \leq n$ та множину G_0 розбиваємо на дві непересічні підмножини: $G_0 \subset G_1^{(1)} \cup G_1^{(2)}$. Операцію розсічення реалізуємо так:

$$G_1^{(1)} = \left\{ x : \overline{X} \in G_0; \quad x_j \leq [x_{j0}] \right\};$$

$$G_1^{(2)} = \left\{ x : \overline{X} \in G_0; \quad x_j \geq [x_{j0}] + 1 \right\}.$$

Для наочності отриманого результату зобразимо дерево рішень:

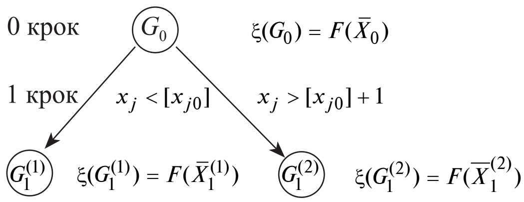


Рис. 1. Дерево рішень для задачі ЦЛП

Вирішуємо дві задачі лінійного програмування: *задачу 1* – на множині $G_1^{(1)}$, *задачу 2* – на множині $G_1^{(2)}$. У результаті отримуємо нові оцінки функції якості: $\xi(G_1^{(1)}) = F(\overline{X}_1^{(1)})$ та $\xi(G_1^{(2)}) = F(\overline{X}_1^{(2)})$ відповідно. Аналіз отриманих оцінок дає можливість виявити перспективну множину, і процес розгалуження (побудова дерева рішень) реалізується до отримання рішення, що задовольняє вихідній постановці задачі.

Метод гілок та границь стосовно ЦЛП було вперше запропоновано в праці Ленда і Дойга в 1960 р. Фактично друге народження цього методу пов'язане з працями Літла, Муті, Суїні і Керела (1963 р.) [1]. Цю роботу присвячено дослідженню задачі комівояжера. Автори відзначили надзвичайну широту методу, вони показали важливість і можливість використання специфіки завдання при застосуванні цього методу.

Використання методу гілок та границь у задачах оптимального розкрою матеріалу. Одним з видів популярної продукції, що поставляє ПП «Примамеблі», є кухонний комплект «Марго». Ці корпусні меблі виготовляються з досить дорогих сортів дерева (липа, бук, горіх, дуб тощо), тому завдання мінімізації відходів при розпилюванні заготовок і мінімізації кількості використаних заготовок є досить актуальними і важливими з економічної точки зору.

Розпилу підлягають заготовки довжиною 2 і 4 м. Для виготовлення чотирьох названих комплектів необхідно отримати вироби довжиною 0,6 і 0,24 м у кількостях не менше 112 і 64 штук відповідно.

Розглянемо розпил заготовок довжиною 2 м. Варіанти розпилу наведено в табл. 1.

Складемо математичну модель задачі мінімізації сумарних відходів. Введемо змінні x_1, x_2, x_3, x_4, кожна з яких відповідає кількості заготовок, що розпилюються способами 1, 2, 3, 4 відповідно. Цільова функція задачі F з економічної точки зору визначає сумарну кількість відходів.

Згідно з даними табл. 1, задача оптимізації формулюється таким чином:

$$F = 0,2x_1 + 0,08x_2 + 0,2x_3 + 0,08x_4 \to \min \quad (6)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 112; \\ 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \ge 64; \end{cases} \quad (7)$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}; \quad (8)$$

$$x_j \Rightarrow \textit{цілі}. \quad (9)$$

Обмеження (7) за своїм економічним змістом визначають необхідну кількість готових до використання заготовок, умови (8) – умови невід’ємності змінних задачі, умови (9) – умови цілочисельності рішення. Таким чином, сформульована задача є задачею ЦЛП, вирішується методом гілок і границь.

Тому що задача (6)–(9) має велику кількість змінних, на кожному кроці використовувався симплексний метод розв’язування у поєднанні з його чисельною реалізацією в пакеті прикладних програм MathCad 14.0. Програма дозволяє досить легко проводити багатоваріантні розрахунки оптимізації залежно від того, якою є потреба у виробах означеної довжини.

За результатами розрахунків мінімальна сумарна кількість відходів при використанні заготовок довжиною 2 м складає 4,48 м (при цьому найбільш оптимальним є другий варіант розпилювання).

Розглянемо варіант розпилу заготовок довжиною 4 м. За даними табл. 1 складаємо математичну модель:

$$F = 0,16x_1 + 0,04x_2 + 0,16x_3 + 0,04x_4 + \\ +0,16x_5 + 0,04x_6 + 0,16x_7 \to \min \quad (10)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 112; \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 14x_6 + 16x_7 \ge 64; \end{cases} \quad (11)$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,7}; \quad (12)$$

$$x_j \Rightarrow \textit{цілі}. \quad (13)$$

На нульовому кроці розв’язання задачі відкидалися умови цілочисельності

Таблиця 1

Варіанти розпилу заготовок довжиною 2 та 4 м

Розпил заготовок довжиною 2 м				Розпил заготовок довжиною 4 м			
Варіант розпилу	Кількість виробів, шт.		Відходи, м	Варіант розпилу	Кількість виробів, шт.		Відходи, м
	l_1 = 0,24 м	l_2 = 0,6 м			l_1 = 0,24 м	l_2 = 0,6 м	
1	3	0	0,2	1	6	1	0,16
2	2	3	0,08	2	5	4	0,04
3	1	5	0,2	3	4	6	0,16
4	0	8	0,08	4	3	9	0,04
–				5	2	11	0,16
–				6	1	14	0,04
–				7	0	16	0,16
Загальна кількість виробів, шт.	≥ 112	≥ 64		Загальна кількість виробів, шт.	≥ 112	≥ 64	

(13) і визначалася початкова оцінка цільової функції $\xi(G_0)$ та початковий опорний план. Далі на кожному кроці, відповідно до методу гілок і меж, визначалася перспективна для подальшого аналізу область рішень і проводився її розтин по одній з нецілочисельних компонент, отриманих на попередньому кроці. Процес розгалуження тривав до отримання оптимального цілочисельного розв’язку.

Аналіз рішення показує, що на кроці 3 найкращою оцінкою для цільової функції є $\xi(G_3^4) = 0,92\,м$, подальший розтин областей не має сенсу.

Таким чином, при використанні заготовок довжиною 4 м логіка задачі мінімізації виявляється трохи складнішою, але при цьому кількість відходів скорочується більш ніж у чотири рази.

Алгоритм рішення може бути також використано при оптимізації відходів при підготовці до виробництва інших видів готових виробів: комплектів для корпусних меблів іншого призначення, дверних блоків, сходів тощо. Залежно від довжин передбачуваних готових виробів в умовах задачі видозмінюються варіанти розпилу і коригується математична модель.

Застосування задачі комівояжера при складанні маршрутів доставки продукції споживачам. У процесі доставки готової продукції замовникам виникає питання про складання такого маршруту перевезень, за якого довжина шляху буде мінімальною. Це дозволяє оптимізувати роботу транспорту, знизити витрати на оренду машин, амортизаційні відрахування, скоротити витрати пально-мастильних матеріалів, оптимально використовувати людські ресурси і т. д.

Така задача відома в літературі як знаменита задача комівояжера, поставлена ще в 1934 р., і є однією з найважливіших у теорії графів [4]. У своїй області (оптимізації дискретних задач) задача комівояжера до теперішнього часу залишається об’єктом досліджень і є своєрідним полігоном, на якому випробовуються нові методи.

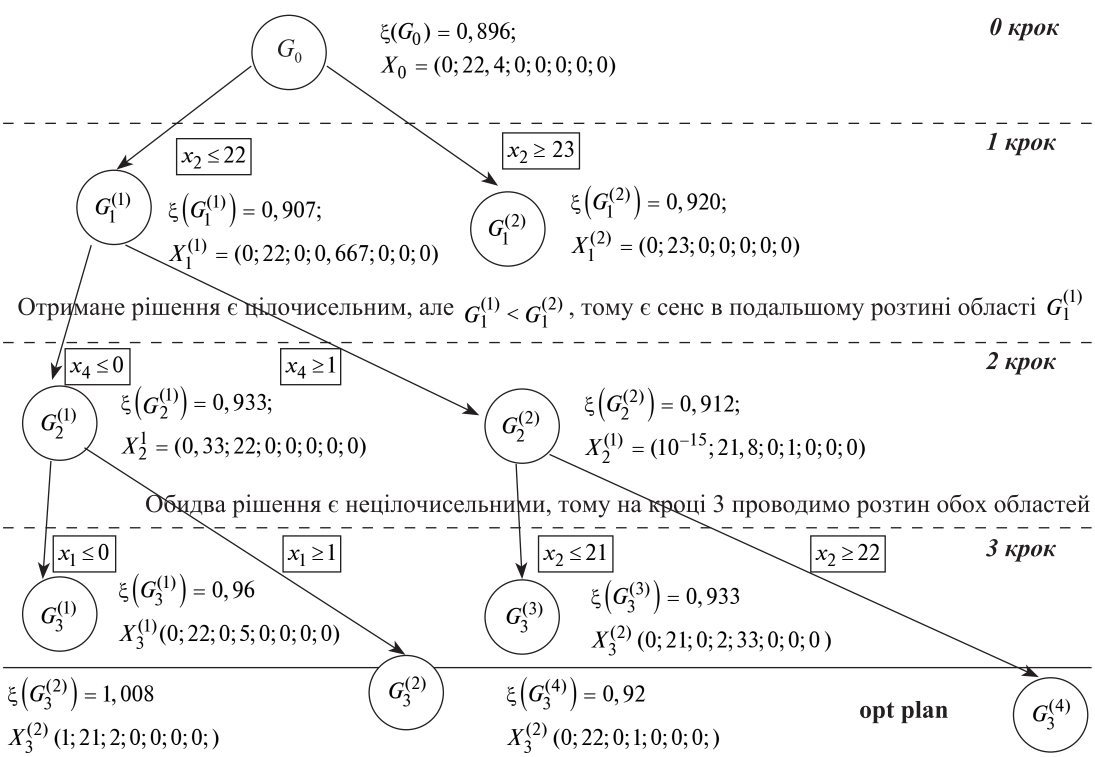


Рис. 2. Дерево рішень задачі мінімізації відходів при розпилюванні заготовок довжиною 4 м

Постановка задачі. Розглядається *n* міст, відстані між якими відомі. Комівояжер повинен пройти всі *n* міст по одному разу, повернувшись у те місто, з якого почав. Потрібно знайти такий маршрут руху, при якому сумарна пройдена відстань буде мінімальною. Очевидно, що задача комівояжера – це задача визначення найкоротшого гамильтонова циклу в повному графі. У літературі відомі декілька алгоритмів розв’язання задачі комівояжера, які мають свої слабкі і сильні сторони [1].

Задача комівояжера може бути сформульована як цілочисельна введенням булевих змінних $x_{ij} = 1$, якщо маршрут включає переїзд з міста *i* безпосередньо в місто *j* та $x_{ij} = 0$ – в інакшому випадку. Якщо розглядати задачу комівояжера як цілочисельну, то для її рішення можна використовувати метод гілок і меж, цей алгоритм ще називають у літературі алгоритмом Літтла [1, 5].

Як приклад розглянемо задачу доставки готової продукції з міста Дніпропетровська (1) замовникам, розташованим у п’яти містах Дніпропетровської області: Нікополі (2), Новомосковську (3), Царичанці (4), Перещепиному (5) та Тернівці (6). Відому матрицю відстаней $C = \left[c_{ij}\right]_{6x6}$ наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Матриця відстаней між пунктами призначень, км

№ з/п	Пункт призначення	1	2	3	4	5	6
1	Дніпропетровськ	0	158	26	72	71	90
2	Нікополь	158	0	136	231	181	236
3	Новомосковськ	26	136	0	97	45	53
4	Царичанка	72	231	97	0	142	150
5	Перещепіне	71	181	45	142	0	101
6	Тернівка	90	236	53	150	101	0

З метою мінімізації транспортних витрат необхідно відшукати такий замкнутий маршрут (цикл), що проходить один і тільки один раз через кожне місто, при якому сумарна довжина шляху буде найменшою.

Математична модель задачі. Цільова функція (довжина шляху) запишеться таким чином [1]:

$$F = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij} \to \min, \qquad (14)$$

де $X = \left[x_{ij}\right]_{6x6}$ – матриця альтернативних змінних.

Мінімізація цільової функції (14) проводиться при обмеженнях:

I група обмежень – умови прибуття в кожен пункт і виходу і з кожного пункту тільки по ***одному*** разу [1]:

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1 \qquad (15)$$
$$j = \overline{1,6} \qquad i = \overline{1,6}$$

II група обмежень – умови забезпечення безперервності маршруту (забезпечується введенням додаткових незалежних змінних $u_i \geq 0,\ i = 1,6$) [1]:

$$u_i - u_j + 6x_{ij} = 6 - 1 \qquad (16)$$
$$i = \overline{1,6}; \quad j = \overline{1,6}$$

Метод гілок та границь для задачі комівояжера. Початкова область допустимих планів Ω – це сукупність усіх можливих варіантів побудови маршруту доставки продукції. Проаналізуємо область Ω (нульовий крок рішення).

Матриця мінімальних відстаней по рядках: $X' = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$	Значення цільової функції: $H' = F(X') = 26 + 136 + 26 + 72 + 45 + 53 = 384\,(км)$
Матриця мінімальних відстаней по стовпцях: $X'' = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	Значення цільової функції: $H'' = F(X'') = 26 + 136 + 26 + 72 + 45 + 53 = 384\,(км)$

Нижня межа функції якості:

$$H_0 = \max(H', H'') = \max(384, 384) = 384\ (км).$$

Оберемо первісний план перевезення товару: $l_0 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 1)$. За цим планом довжина шляху складе:

$$V_0 = F(l_0) = 158 + 136 + 97 + 142 + 101 + 90 = 724.$$

Очевидно, що вихідна область планів Ω буде включати в себе такі непересічні області: Ω_{12}, Ω_{13}, Ω_{14}, Ω_{15}, Ω_{16}.

Аналіз областей Ω_{12}, Ω_{13}, Ω_{14}, Ω_{15}, Ω_{16} (перший крок рішення).

Як приклад розглянемо область Ω_{12}. Маємо:

Звідси випливає, що перспективною для подальшого розгалуження є область Ω_{14} (рекорд). Область Ω_{14} буде включати в себе такі непересічні області: Ω_{142}, Ω_{143}, Ω_{145}, Ω_{146}. Аналіз областей (другий крок розв'язування задачі) дає можливість виявити, що область Ω_{146} (рекорд) має найкращу верхню оцінку функції якості і є перспективною для подальшого розсічення.

Аналогічним чином проводимо відсів неперспективних областей на наступних етапах аналізу задачі (рис. 4). Виявляється, що область Ω_{14635} має найкращу верхню оцінку функції якості і відповідає оптимальному розв'язку.

$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \end{bmatrix}$	$l_{12} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 1)$, $H' = 158 + 136 + 26 + 72 + 45 + 53 = 384\,(км)$, $H'' = 26 + 158 + 45 + 97 + 45 + 53 = 424\,(км)$, $H_{12} = \max(384, 424) = 424\,(км)$, $V_{12} = 158 + 136 + 97 + 142 + 101 + 90 = 724\,(км)$.

Нульовий та перший кроки рішення графічно представлені на рис. 3.

Проведемо відсів неперспективних областей:

$$\min(V_{12}, V_{13}, V_{14}, V_{15}, V_{16}) = \\ = V_{14} = V_{15} = 713\,(км).$$

Таким чином, області Ω_{12}, Ω_{13}, Ω_{16} не є перспективними і можуть бути виключені з розгляду. Тому що верхні межі функції якості на областях Ω_{14} и Ω_{15} рівні між собою, порівнюємо їх нижні межі:

$$H_{14} = 404\,(км) < H_{15} = 428\,(км).$$

Остаточно, оптимальна матриця переміщень має вигляд:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Маршрут перевезення готової продукції, що відповідає умовам задачі:

Дніпропетровськ ⇒ Царичанка ⇒ Тернівка ⇒ Новомосковськ ⇒ Перещепіне ⇒ Нікополь ⇒ Дніпропетровськ.

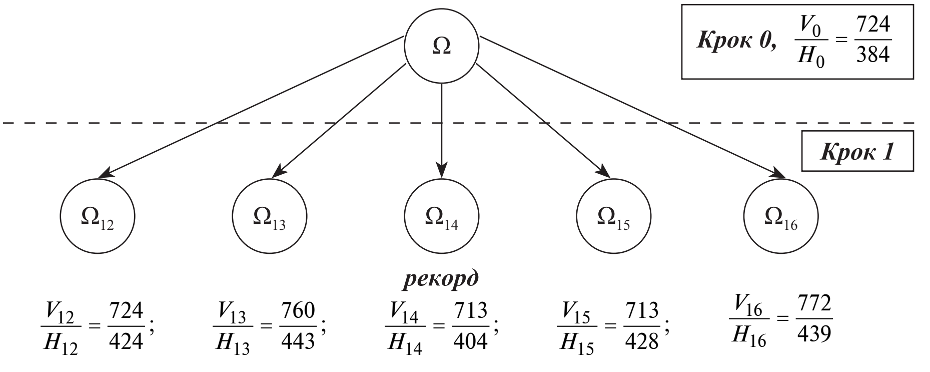


Рис. 3. Розсічення області допустимих планів на кроці 1

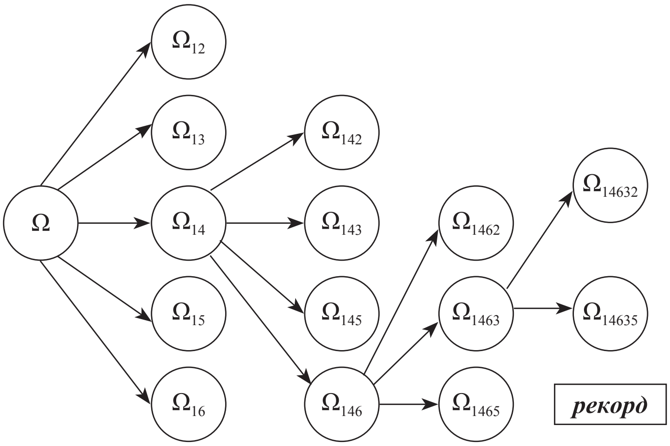


Рис. 4. Схема відсіву неперспективних областей

Графічно маршрут прямування транспорту з готовою продукцією таведено на рис. 5. Оптимальна з точки зору мінімуму довжина маршруту складає 659 км.

Звичайно при обробці замовлень великого обсягу суттєво зростає розмірність матриці відстаней, і безпосереднє використання підходу, що пропонується, пов'язане з великим обсягом обчислень. Тому авторами було розроблено спеціальний додаток до електронних таблиць Excel (усіх існуючих версій) з використанням мови програмування VBA та вбудованого в таблиці обчислювача Solver [2, 4].

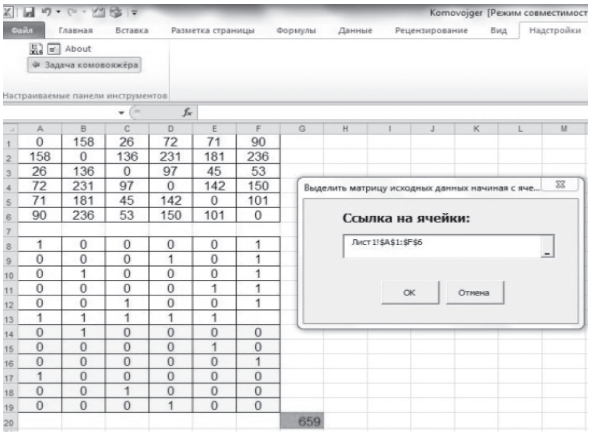
Програму було протестовано на вищерозглянутому прикладі. Завантаження даних у додаток спрощено завдяки інтерфейсу, наведеному на рис. 6.

Аналіз результатів роботи додатку проілюстровано на рис. 7. Результати розрахунків аналітичним та чисельним шляхами збігаються.

Таким чином, отримано інструмент для практичного застосування при розв'язанні задачі комівояжера за мінімальних витрат часу та ресурсів.

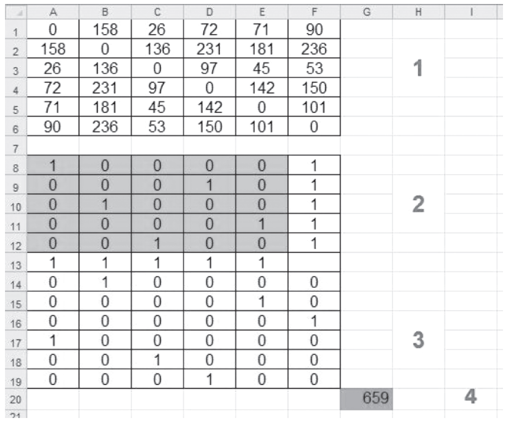
Як приклад ефективності роботи додатку на рис. 8 показано результат розрахунку оптимального плану перевезень го-

Рис. 5. Оптимальний маршрут доставки готової продукції (довжина маршруту 659 км)



	A	B	C	D	E	F	G
1	0	158	26	72	71	90	
2	158	0	136	231	181	236	
3	26	136	0	97	45	53	
4	72	231	97	0	142	150	
5	71	181	45	142	0	101	
6	90	236	53	150	101	0	
7							
8	1	0	0	0	0	1	
9	0	0	0	1	0	1	
10	0	1	0	0	0	1	
11	0	0	0	0	1	1	
12	0	0	1	0	0	1	
13	1	1	1	1	1		
14	0	1	0	0	0	0	
15	0	0	0	0	1	0	
16	0	0	0	0	0	1	
17	1	0	0	0	0	0	
18	0	0	1	0	0	0	
19	0	0	0	1	0	0	
20							659

Рис. 6. Інтерфейс додатку Excel



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	0	158	26	72	71	90			
2	158	0	136	231	181	236			
3	26	136	0	97	45	53		1	
4	72	231	97	0	142	150			
5	71	181	45	142	0	101			
6	90	236	53	150	101	0			
7									
8	1	0	0	0	0	1			
9	0	0	0	1	0	1			
10	0	1	0	0	0	1		2	
11	0	0	0	0	1	1			
12	0	0	1	0	0	1			
13	1	1	1	1	1				
14	0	1	0	0	0	0			
15	0	0	0	0	1	0			
16	0	0	0	0	0	1			
17	1	0	0	0	0	0		3	
18	0	0	1	0	0	0			
19	0	0	0	1	0	0			
20							659		4

Рис. 7. Результат роботи додатку Excel

Рис. 8. Оптимальний маршрут доставки готової продукції (довжина маршруту 712 км)

тової продукції відповідно до замовлень у випадку, коли розмірність матриці відстань складає 8×8.

Висновки. У статті наведено математичну модель задачі мінімізації маршруту перевезень готової продукції замовникам (задача комівояжера), наведено приклади розв’язування таких задач, а також розроблено програму чисельної реалізації в середовищі Microsoft Excel з використанням вбудованої мови програмування Visual Basic for Application (VBA).

З метою мінімізації відходів у задачах розкрою деревини запропоновано використовувати математичну модель цілочисельного програмування. Тому що задача має велику кількість змінних, використовувався симплексний метод розв’язування у поєднанні з його чисельною реалізацією в пакеті прикладних програм MathCad 14.0. Програма дозволяє досить легко проводити багатоваріантні розрахунки при оптимізації. Це пов’язане тільки зі зміною вихідних даних і характеру обмежень математичної моделі. Усі проміжні результати коригуються автоматично. На прикладах доведено, як можна скоротити відходи цінної деревини, якщо використовувати відповідні типи заготовок і оптимальні способи їх розпилу.

Таким чином, слід зазначити, що проведені дослідження мають практичну спрямованість, розглянуті підходи можуть бути використані при моделюванні роботи підприємства з метою підвищення її ефективності і формування виробничих замовлень.

Список використаних джерел

1. Левитин Ананий В. Метод грубой силы: Задача коммивояжера. Алгоритмы: введение в разработку и анализ; пер. с англ. / Ананий В. Левитин. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2010. – 310 с.

2. Костевич Л.С. Математичне програмування: Інформаційні технології оптимальних рішень / Л.С. Костевич. – Мн.: Нове знання, 2003. – 424 с.

3. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: учебн. пос. для бакалавров / Н.Ш. Кремер. – М.: Юрайт, 2013. – 432 с.

4. Мастяева И.Н. Математические методы исследования операций в экономике / И.Н. Мастяева, О.Н. Семенихина, Н.Ю. Грызина. – М.: МЭСИ, 2009. – 405 с.

5. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах; пер. с англ. / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 916 с.

В статье рассмотрена модель задачи минимизации маршрута перевозок готовой продукции заказчикам (задача коммивояжера), приведены примеры решения. Для анализа задач при размерности матрицы расстояний, которая требует значительного объёма вычислений, авторами разработано специальное приложение электронных таблиц Excel (всех существующих версий) с применением программирования на VBA и встроенного в таблицы вычислителя Solver. С целью минимизации отходов в задачах раскроя древесины предложено использовать математическую модель целочисленного программирования. Предложена численная реализация задачи методом ветвей и границ в пакете прикладных программ MathCad.

Ключевые слова: оптимизация, целевая функция, математическая модель, целочисленное программирование, метод ветвей и границ, задача коммивояжера.

In this paper we consider the model problem of minimizing transport route of finished products to customers (traveling salesman problem). Examples of solutions have been considered too. The special spreadsheet application Excel (all current versions) using VBA programming and built- in table calculator Solver was developed by authors in order to analyze the problems in the dimension of the distance matrix, which requires a significant amount of computation. The authors proposed to use the mathematical model of integer programming with a view to minimize waste in the timber cutting tasks. The numerical implementation of the problem by the branch and bound in the application package MathCad has been proposed.

Key words: optimization, the objective function, a mathematical model, integer programming, branch and bound, the traveling salesman problem.

Одержано 12.02.2014.