УДК 519.674

О.П. Приставка, О.Г. Байбуз

Дніпропетровський національний університет ім. О.Гончара

ОЦІНЮВАННЯ ПЕРІОДІВ ПРОФІЛАКТИКИ СИСТЕМИ ДЛЯ СПЛАЙН-ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО РОЗПОДІЛУ

Обґрунтовано обчислювальну технологію проведення профілактик технічних систем для сплайн-експоненціального розподілу. Доведено, що момент початку профілактики співпадає з вузлом склеювання.

Постановка проблеми та мета роботи. Використання існуючої нормативно-технічної бази оцінки періодів профілактик технічних систем, зокрема виробів авіаційної та космічної техніки не дозволяє достовірно та адекватно провести оцінювання періодичності профілактичних робіт, які, з одного боку – зменшують експлуатаційні витрати, а з другого – забезпечують належний рівень показників надійності функціонування технічних систем. Указані недоліки використання в нормативній базі постійної функції інтенсивності відмов, яка відповідає експоненціальній функції розподілу часу наробітку до відмови (ФРЧНВ). Як випливає з низки розв'язку практичних задач для оцінювання параметрів ФРЧНВ технічних систем прийнятним є використання сплайн-експоненціального розподілу з одним та більше вузлами склеювання [1].

Задачам оцінки періодів проведення профілактик технічних систем приділено значну увагу вчених, які досліджують надійність та експлуатаційні характеристики систем. У цьому напрямку відомі [2 – 4], які отримали вираз для коефіцієнта готовності при наявних значеннях часу проведення та періоду профілактик. Виходячи з уніфікації сплайн-експоненціального розподілу при дослідженні ФРЧНВ метою представленої роботи є знаходження оцінок періоду профілактик технічних систем для максимізації коефіцієнта готовності технічного виробу до виконання цільової задачі при кусково-постійній функції інтенсивності відмов.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо функціонування складної системи, яка має функцію розподілу часу безвідмовної роботи

© О.П. Приставка, О.Г.Байбуз, 2008

$F\left(t,\vec{\Lambda}\right)$ з обмежено-зростаючою функцією інтенсивності (ОЗФІ) $\lambda\left(t\right)$. Як показано в [5], така функція $\lambda\left(t\right)$ може бути апроксимована ступінчатою функцією з будь-яким ступенем точності. Останнє призводить до введення сплайн-експоненційного розподілу виду

$$F\left(t,\vec{\Lambda}\right)=1-\exp\left[-\sum_{k=1}^{i-1}\left(\lambda_k-\lambda_{k+1}\right)t_k-\lambda_i t\right],\ t\in\left[t_{i-1},t_i\right]. \quad (1)$$

Таким чином, вважаємо, що задано $\vec{\Lambda}=\left\{\lambda_k,k=\overline{1,n}\right\}$, $T=\left\{t_i,i=\overline{0,n-1}\right\}$, при цьому $t_0=0$.

Ефективність функціонування системи оцінюється через коефіцієнт $K_r(\tau)$. Режим функціонування системи передбачає стан проведення аварійних ремонтів та профілактичних робіт, характеристиками яких є масиви часу проведення профілактик $\left\{\tau_n\right\}$ та аварійних ремонтів $\left\{\tau_v\right\}$. У цьому випадку коефіцієнт готовності системи має вигляд [3]

$$K_r\left(\tau_i\right)=\frac{\sum_{k=1}^{i-1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}F_k\left(t\right)dt+\int_{t_{i-1}}^{\tau_i}\overline{F}_i\left(t\right)dt\right)}{\sum_{k=1}^{i-1}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}F_k\left(t\right)dt+t_n+\left(t_v-t_n\right)F_i\left(\tau_i\right)+\int_{t_{i-1}}^{\tau_i}\overline{F}_i\left(t\right)dt\right)},\quad i=\overline{1,n}, \quad (2)$$

де $\overline{F}_k\left(t\right)=1-F_k\left(t,\vec{\Lambda}\right)$.

На основі (2) розв'язується задача проведення знаходження оптимального періоду профілактики $\tau_{опт}=\tau_e$, при якому досягається максимум $K_r(\tau)$.

З урахуванням розподілу (1), значення коефіцієнта готовності (2) прийме вигляд:

$$K_r\left(\tau\right)=\left[\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\lambda_j}\exp\left(-\sum_{k=1}^{j-1}\left(\lambda_k-\lambda_{k+1}\right)t_k\exp\left(-\alpha_j t_{j-1}\right)-\exp\left(-\lambda_j t_j\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_i}\left(\exp\left(-\lambda_i t_{i-1}\right)-\exp\left(-\lambda_i\tau\right)\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1}\left(\lambda_k-\lambda_{k+1}\right)t_k\right)\right]\times \quad (3)$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\lambda_j}\exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1}(\lambda_k-\lambda_{k+1})\right)\left(\exp\left(-\lambda_j t_{j-1}\right)-\exp\left(\lambda_j t_j\right)\right)+\frac{1}{\lambda_i}\left(\exp\left(-\lambda_i t_{i-1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\lambda_i t_\tau\right)\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{i-1}(\lambda_k-\lambda_{k+1})t_k\right)+t_n+(t_v-t_n)\left(1-\exp\left(-\lambda_i\tau-\sum_{k=1}^{i-1}(\lambda_k-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\lambda_{k+1})t_k\right)\right]-1,\quad t\in\left[t_{i-1},t_i\right], i=\overline{0,n}\,.$$

Функція $K_r(\tau)$, записана в (3), є сплайн-функцією, неперервною в точках $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots t_n$.

Для визначення оптимального періоду профілактики τ досліджується $\frac{\partial K_r(\tau)}{\partial\tau}$, при цьому достатньо проаналізувати

$$sign\frac{\partial K_r(\tau)}{\partial\tau}=\begin{cases} sign\left(\exp(-\lambda\tau)\right), & \tau\in[0,t_1] \\ sign\left(\frac{t_v}{t_v-t_n}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1-\exp(-\lambda_1 t_1)\right)-\exp(-\lambda_1\tau)\right), & \tau\in[t_1,t_2] \\ sign\left(\frac{t_v}{t_v-t_n}-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\left(1-\exp(-\lambda_1 t_1)\right)-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\exp(-(\lambda_1-\lambda_2)\tau)\times\right. & \\ \quad\left.\times\left(\exp(-\lambda_2 t_1)-\exp(-\lambda_2 t_2)\right)-\exp\left(-\lambda_2 t_2-(\lambda_1-\lambda_2)\tau\right)\right), & \\ & \tau\in[t_2,t_3] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Таким чином, зміна знаку $K_r(\tau)$ визначає оптимальний час профілактики.

Доведемо існування та єдність оптимального періоду профілактики для випадку сплайн експоненційного розподілу.

Лема 1. Якщо для розподілу (1) справедливе $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_i<\ldots\lambda_n$ та якщо $\frac{\partial K_r(\tau)}{\partial\tau}>0, \tau\in[t_i,t_{i+1}]$, то $\frac{\partial K_r(\tau)}{\partial\tau}>0$ для будь-якого $\tau\in[t_k,t_{k+1}], k=0,1,2,\ldots$.

Доведення. Проводиться за методом математичної індукції. Для $\tau\in[t_1,t_2]$ справедливе $\frac{\partial K_r(\tau)}{\partial\tau}>0$, оскільки $\exp(-\lambda_1\tau)>0$.

Нехай $\tau\in[t_2,t_3]$, тоді

$$\frac{t_v}{t_v - t_n} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\left(1 - \exp\left(-\lambda_1 t_1\right)\right) - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(\exp\left(-\lambda_2 t_1\right) - \exp\left(-\lambda_2 t_2\right) -\right.$$

$$\left. - \exp\left(-\lambda_2 t_2 - \left(\lambda_1 - \lambda_2\right) t_1\right)\right) > 0 \, ,$$

оскільки $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1 - \exp\left(-\lambda_1 t_1\right)\right) < \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\left(1 - \exp\left(-\lambda_1 t_1\right)\right)$ та

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\left(\exp\left(-\lambda_2 t_1 - \exp\left(-\lambda_2 t_2\right)\right)\exp\left(-\left(\lambda_1 - \lambda_2\right) t_1\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\lambda_2 t_2 - \left(\lambda_1 - \lambda_2\right) t_1\right)\right) > \exp\left(-\lambda_1 t_1\right) .$$

Тоді,

$$\left[\frac{t_v}{t_v - t_n} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1 - \exp\left(-\lambda_1 t_1\right)\right) - \exp\left(-\lambda_1 t_1\right)\right] > \left[\frac{t_v}{t_v - t_n} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1 - \exp\left(-\lambda_1 t_1\right)\right) - \right.$$

$$- \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\exp\left(-\lambda_2 t_1\right) - \exp\left(-\lambda_2 t_2\right)\right)\exp\left(-\left(\lambda_1 - \lambda_2\right) t_1 - \right.$$

$$\left.\left. - \exp\left(-\lambda_2 t_2 - \left(\lambda_1 - \lambda_2\right) t_1\right)\right)\right] > 0 .$$

Враховуючи, що

$$sign \frac{\partial K_r\left(\tau\right)}{\partial \tau} = sign\left[\frac{t_v}{t_v - t_n} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1 - \exp\left(-\lambda_1 t_1\right)\right) - \exp\left(-\lambda_1 t_1\right)\right],$$

отримують для $\tau \in \left[t_1, t_2\right]$, що $\frac{\partial K_r\left(\tau\right)}{\partial \tau} > 0$.

Аналогічним чином доводиться, що для $\tau \in \left[t_i, t_{i+1}\right]$ $\frac{\partial K_r\left(\tau\right)}{\partial \tau} > 0$. Це еквівалентно

$$\left[\frac{t_v}{t_v - t_n} - \sum_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \exp\left(-\sum_{k=1}^{j-1}\left(\lambda_k - \lambda_{k+1}\right) t_k\right)\left(\exp\left(-\lambda_j t_{j-1}\right) - \exp\left(-\lambda_j t_j\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\lambda_{j+1} t_i - \sum_{k=1}^{i}\left(\lambda_k - \lambda_{k+1}\right) t_k\right)\right] > 0 \, .$$

Лема 2. Якщо для розподілу (1) виконується $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_i < \ldots \lambda_n$ та якщо $\frac{\partial K_r\left(\tau\right)}{\partial \tau} < 0, \tau \in \left[t_i, t_{i+1}\right]$, то $\frac{\partial K_r\left(\tau\right)}{\partial \tau} < 0$

для будь-якого $\tau \in \left[t_k, t_{k+1}\right], k = \overline{i+1, n}$.

Доведення леми відбувається за аналогією з першою лемою.
Базуючись на приведених лемах, маємо наступну теорему.

Теорема 1. Якщо функцію розподілу часу безвідмовної роботи системи можна навести у вигляді (1) та виконуються умови

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_i < \ldots \lambda_n,$$

$$\left[\frac{t_v}{t_v - t_n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_j} \exp\left(-\sum_{k=1}^{j-1} \left(\lambda_k - \lambda_{k+1}\right) t_k\right) \left(\exp\left(-\lambda_j t_{j-1}\right) - \exp\left(-\lambda_j t_j\right)\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(-\lambda_{n+1} t_n - \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k - \lambda_{k+1}\right) t_k\right)\right] < 0, \qquad (4)$$

то існує один оптимальний період проведення профілактики τ, що оптимізує $K_r(\tau)$ такий, що $\tau = \tau_m, m \le n$.

Існування оптимального періоду проведення профілактики τ випливає з умови (4) та наведених лем. Таким чином, існує єдине m, що

$$\forall k < m \quad \frac{\partial K_r(\tau)}{\partial \tau} > 0, \quad \tau \in \left[t_{k-1}, t_k\right],$$

$$\forall k > m \quad \frac{\partial K_r(\tau)}{\partial \tau} < 0, \quad \tau \in \left[t_k, t_{k+1}\right].$$

Якщо при визначенні оптимального періоду проведення профілактики в якості цільової функції обирають математичне сподівання питомих економічних витрат [3]

$$E\left\{C(\tau)\right\} = \frac{C_v F(\tau) + C_n \left(1 - F(\tau)\right)}{\int_0^\tau \left(1 - F(t)\right) dt},$$

де C_v – середні витрати на один аварійний ремонт; C_n – середні витрати на один профілактичний ремонт, тоді оптимальний період проведення профілактики τ визначається з рівняння

$$\lambda(\tau) \int_0^\tau \overline{F}(t) dt + \overline{F}(t) = \frac{C_v}{C_v - C_n}.$$

З урахуванням розподілу (1), маємо наступну теорему.

Теорема 2. Якщо функція розподілу часу безвідмовної роботи може бути представлена у вигляді (1) з достатнім ступенем точності і якщо виконуються умови

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_i < \ldots \lambda_n,$$

$$\left[\frac{C_v}{C_v - C_n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_j} \exp\left(-\sum_{k=1}^{j-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) t_k\right) \left(\exp\left(-\lambda_j t_{j-1}\right) - \exp\left(-\lambda_j t_j\right)\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\lambda_{n+1} t_n - \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) t_k\right)\right] < 0, \qquad (5)$$

то існує один оптимальний період проведення профілактики, що оптимізує математичне сподівання питомих експлуатаційних витрат, значення τ співпадає з одним з вузлів сплайн-експоненційного розподілу.

Висновки. Аналізуючи наведені теореми, маємо висновок, що для ОЗФІ існує оптимальний період проведення профілактики, який співпадає з одним з вузлів сплайн-експоненційного розподілу.

Вибір вузла залежить від значень C_ϑ, C_r. Тим самим, враховуючи, що будь-яка ОЗФІ може бути апроксимована кусково-сталими функціями [5], є можливість побудувати керуючу стратегію обслуговування технічних систем.

Бібліографічні посилання

1. **Приставка А.Ф.** Сплайн-распределения в статистическом анализе / А.Ф. Приставка.– Д., 1996. – 160 с.
2. **Барзилович Е.Ю.** Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. / Е.Ю. Барзилович, В.А. Каштанов. – М., – 1971. – 272 с.
3. **Барзилович Е.Ю.** Модели технического обслуживания сложных систем / Е.Ю. Барзилович. – М., 1982. – 231с
4. **Барлоу Р.** Статистическая теория надежности и испытания на безотказность / Р.Барлоу, Ф.Прошан. – М., 1984. – 329 с.
5. **Байбуз О.Г.** Сплайны в надежности/ О.Г. Байбуз, А.Ф. Приставка. – Д., 2003. – 246 с.

Надійшла до редколегії 14.10.08