УДК 519.224

О.П. Приставка, О.М. Мацуга

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара

МОДЕЛЬ ДВОВИМІРНОГО СПЛАЙН-НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Запропоновано модель двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією та двома прямими склеювання, паралельними осям спостережень, та досліджено її властивості.

Постановка проблеми. У задачах статистичної обробки неоднорідних даних, класифікації та кластерного аналізу для підвищення точності розпізнавання пропонується двовимірний сплайн-нормальний розподіл, в описі якого вже міститься поділяюча пряма.

Актуальним є введення моделі двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією та двома прямими склеювання, паралельними осям спостережень. Такі прямі відповідають межам, які розділяють дані, що характеризують різні стадії протікання процесів або явищ. Для задач медичної діагностики, наприклад, зазначені прямі склеювання можна трактувати як межі, що відокремлюють різні стадії захворювання. Коли постановка діагнозу здійснюється лише за одним показником, можливим є введення сплайн-розподілу з однією прямою склеювання. При проведенні діагностики одночасно за двома показниками доцільним є введення сплайн-розподілу з двома прямими склеювання, паралельними осям спостережень і взаємно перпендикулярними.

Розробка обчислювальної схеми відтворення та реалізація зазначеного розподілу під час обробки експериментальних даних вимагають попереднього дослідження його властивостей, чому і присвячено роботу.

Аналіз досліджень і публікацій. Дослідження та відтворення сплайн-розподілів у більшості випадків проведено для одновимірного випадку [1; 2]. Стосовно моделі двовимірного сплайн-нормального розподілу отримано лише окремий частковий розв’язок [3]. При цьому сформульовано обчислювальну схему відтворення такого розподілу без обґрунтування його введення та дослідження властивостей.

Постановка задачі. Нехай задано двовимірну випадкову величину $\vec{\zeta} = (\xi_1, \xi_2)$, для якої вводяться функції розподілу:

– у вигляді двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією прямою склеювання

$$F\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{сп2}\right)=\begin{cases}\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\le C,\\ \mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\ge C,\end{cases} \tag{1}$$

де $\vec{\Theta}_1^{сп2}=\left\{\vec{\Theta}_1^{н2},\vec{\Theta}_2^{н2},C\right\}$ – вектор параметрів розподілу; $\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_s^{н2}\right)$ – функція розподілу двовимірного нормального закону з параметрами $\vec{\Theta}_s^{н2}=\left\{m_{1,s},m_{2,s},\sigma_{1,s},\sigma_{2,s},r_s\right\}$, $s=1,2$; $x_1\left(x_2\right)=C$ – пряма склеювання, в точках якої функція $F\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{сп2}\right)$ неперервна; $C=const$;

– у вигляді двовимірного сплайн-нормального розподілу з двома прямими склеювання

$$F\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{сп2}\right)=\begin{cases}\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\le C_1,x_2\left(x_1\right)\le C_2,\\ \mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\le C_1,x_2\left(x_1\right)\ge C_2,\\ \mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_3^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\ge C_1,x_2\left(x_1\right)\le C_2,\\ \mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_4^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\ge C_1,x_2\left(x_1\right)\ge C_2,\end{cases} \tag{2}$$

де $\vec{\Theta}_2^{сп2}=\left\{\vec{\Theta}_1^{н2},\vec{\Theta}_2^{н2},\vec{\Theta}_3^{н2},\vec{\Theta}_4^{н2},C_1,C_2\right\}$ – вектор параметрів розподілу; $\vec{\Theta}_s^{н2}=\left\{m_{1,s},m_{2,s},\sigma_{1,s},\sigma_{2,s},r_s\right\}$, $s=\overline{1,4}$; $x_1\left(x_2\right)=C_1$, $x_2\left(x_1\right)=C_2$ – прямі склеювання, в точках яких $F\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{сп2}\right)$ неперервна; $C_1,C_2=const$.

Функція розподілу двовимірного нормального закону подається

$$\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_s^{н2}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_{1,s}\sigma_{2,s}\sqrt{1-r_s^2}}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\exp\left(-Q\left(z_1,z_2;\vec{\Theta}_s^{н2}\right)\right)dz_1dz_2, \tag{3}$$

де $Q\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_s^{н2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{x_1-m_{1,s}}{\sigma_{1,s}}\right)^2-2r_s\dfrac{\left(x_1-m_{1,s}\right)\left(x_2-m_{2,s}\right)}{\sigma_{1,s}\sigma_{2,s}}+\left(\dfrac{x_2-m_{2,s}}{\sigma_{2,s}}\right)^2}{2\left(1-r_s^2\right)}$.

Зручним для обчислень є такий вигляд функції розподілу (3) [4]:

$$\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_s^{н2}\right)=\Phi\left(y_{1,s}\right)\Phi\left(y_{2,s}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_S}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\exp\left(-\frac{y_{1,s}^2-2zy_{1,s}y_{2,s}+y_{2,s}^2}{2\left(1-z^2\right)}\right)dz\,, \tag{4}$$

де $y_{1,s}=\dfrac{x_1-m_{1,s}}{\sigma_{1,s}}$; $y_{2,s}=\dfrac{x_2-m_{2,s}}{\sigma_{2,s}}$; $\Phi(\cdot)$ – функція Лапласа.

Необхідно визначити умови, за яких функції розподілів (1) та (2) є неперервні та дослідити модальність відповідних функцій щільності.

Основний матеріал. Спочатку надається дослідження двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією прямою склеювання (1). З урахуванням маргінальної властивості функції розподілу визначено функції розподілів окремих складових двовимірної випадкової величини $\vec{\zeta}=\left(\xi_1,\xi_2\right)$, а саме – одновимірних випадкових величин ξ_1 та ξ_2.

Функція розподілу випадкової величини ξ_1

$$F_1\left(x_1\right)=\lim_{x_2\to\infty}F\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x_2\to\infty}\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right), & x_1\le C,\\ \lim\limits_{x_2\to\infty}\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right), & x_1\ge C,\end{cases}$$

де $\lim\limits_{x_2\to\infty}\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_s^{н2}\right)=\Phi\left(\left(x_1-m_{1,s}\right)/\sigma_{1,s}\right)$.

У силу неперервності $F\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)$ за точками прямої склеювання $x_1\left(x_2\right)=C$, $F_1\left(x_1\right)$ має бути неперервна в точці $x_1=C$. Це означає, що повинно виконуватися

$$\Phi\left(\left(C-m_{1,1}\right)/\sigma_{1,1}\right)=\Phi\left(\left(C-m_{1,2}\right)/\sigma_{1,2}\right),\ \text{або}\ \frac{C-m_{1,1}}{\sigma_{1,1}}=\frac{C-m_{1,2}}{\sigma_{1,2}}\,,$$

звідки випливає, що

$$m_{1,2}=m_{1,1}+u_C\left(\sigma_{1,1}-\sigma_{1,2}\right),\quad \text{де}\ u_C=\left(C-m_{1,1}\right)/\sigma_{1,1}\,. \tag{5}$$

Отже, ξ_1 розподілена за сплайн-нормальним законом з одним вузлом, функція розподілу якого має вигляд [2]:

$$F_1\left(x_1\right)\equiv F_1\left(x_1;\vec{\Theta}_1^{cn1}\right)=\begin{cases}\Phi\left(\left(x_1-m_{1,1}\right)/\sigma_{1,1}\right), & x_1\le C,\\ \Phi\left(\left(x_1-m_{1,1}-u_C\left(\sigma_{1,1}-\sigma_{1,2}\right)\right)/\sigma_{1,2}\right), & x_1\ge C,\end{cases} \tag{6}$$

де $\vec{\Theta}_1^{сп1} = \{m_{1,1}, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, C\}$ – вектор параметрів розподілу ξ_1.

Аналогічно функція розподілу випадкової величини ξ_2

$$F_2(x_2) = \begin{cases} \Phi\left(\left(x_2 - m_{2,1}\right)/\sigma_{2,1}\right), & \forall x_2, \\ \Phi\left(\left(x_2 - m_{2,2}\right)/\sigma_{2,2}\right), & \forall x_2 \end{cases}$$

З аналізу $F_2(x_2)$ випливає, що

$$m_{2,2} \equiv m_{2,1}, \ \sigma_{2,2} \equiv \sigma_{2,1}.$$

Для зручності вводиться позначення

$$m_2 \equiv m_{2,2} \equiv m_{2,1} \quad \text{та} \quad \sigma_2 \equiv \sigma_{2,2} \equiv \sigma_{2,1}. \tag{7}$$

Тобто, ξ_2 розподілена за нормальним законом з функцією розподілу

$$F_2(x_2) \equiv F_2\left(x_2; \vec{\Theta}_2^{н1}\right) = \Phi\left(\left(x_2 - m_2\right)/\sigma_2\right),$$

де $\vec{\Theta}_2^{н1} = \{m_2, \sigma_2\}$ – вектор параметрів розподілу ξ_2.

Що стосується функції розподілу (1), то використовуючи представлення функцій $\mathrm{N}\left(x_1, x_2; \vec{\Theta}_s^{н2}\right)$, $s = 1, 2$, у вигляді (4), умова неперервності за точками прямої склеювання $x_1(x_2) = C$

$$\mathrm{N}\left(C, x_2, \vec{\Theta}_1^{н2}\right) = \mathrm{N}\left(C, x_2, \vec{\Theta}_2^{н2}\right)$$

набуває вигляду

$$\Phi\left(y_{1,1}\right)\Phi\left(y_{2,1}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{r_1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left(-\frac{y_{1,1}^2 - 2zy_{1,1}y_{2,1} + y_{2,1}^2}{2\left(1-z^2\right)}\right) dz =$$

$$= \Phi\left(y_{1,2}\right)\Phi\left(y_{2,2}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left(-\frac{y_{1,2}^2 - 2zy_{1,2}y_{2,2} + y_{2,2}^2}{2\left(1-z^2\right)}\right) dz \tag{8}$$

де $y_{1,s} = \left(C - m_{1,s}\right)/\sigma_{1,s}$, $y_{2,s} = \left(x_2 - m_{2,s}\right)/\sigma_{2,s}$.

Враховуючи (5) та (7), виконується

$$y_{1,1} = y_{1,2} \ \text{та} \ y_{2,1} = y_{2,2}.$$

Тоді умова (8) буде справедлива, якщо

$$r_1 = r_2 \equiv r. \tag{9}$$

Таким чином, для двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією прямою склеювання функція розподілу

$$F\left(x_1,x_2,\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)=\begin{cases}\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\le C,\\ \mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\ge C,\end{cases}\tag{10}$$

де $\vec{\Theta}_1^{cn2}=\left\{\vec{\Theta}_1^{н2},\vec{\Theta}_2^{н2},C\right\}$; $\vec{\Theta}_s^{н2}=\left\{m_{1,s},m_2,\sigma_{1,s},\sigma_2,r\right\}$, $s=1,2$; $m_{1,2}$ визначається згідно (5).

При $r=0$ виконується

$$F\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)=F_1\left(x_1\right)F_2\left(x_2\right),$$

тобто, випадкові величини ξ_1, ξ_2 є незалежні.

Функція щільності двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією прямою склеювання має вигляд:

$$f\left(x_1,x_2,\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)=\begin{cases}n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\le C,\\ n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right)\ge C,\end{cases}\tag{11}$$

де $n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_s^{н2}\right)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_{1,s}\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left(-Q\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_s^{н2}\right)\right)$ – функція щільності двовимірного нормального закону з параметрами $\vec{\Theta}_s^{н2}$, $s=1,2$.

Розглянемо властивості функції (11).

Якщо $\sigma_{1,1}=\sigma_{1,2}$, має місце двовимірний нормальний розподіл. При $\sigma_{1,1}\ne\sigma_{1,2}$ функція (11) не є неперервна. Якщо $\sigma_{1,1}<\sigma_{1,2}$, то

$$f\left(C-0,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)>f\left(C+0,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right),\ \forall x_2,$$

інакше ($\sigma_{1,1}>\sigma_{1,2}$)

$$f\left(C-0,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)<f\left(C+0,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right),\ \forall x_2.$$

Проведемо дослідження функції щільності (11) на модальність.

Знайдемо стаціонарні точки функції (11) ($x_1\left(x_2\right)\ne C$). Вони визначаються з розв’язку системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)}{\partial x_1}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)}{\partial x_2}=0,\end{cases}$$

яка в даному випадку має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right)}{\sigma_{1,1}\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_1-m_{1,1}}{\sigma_{1,1}}-r\dfrac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)=0, \\ \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right)}{\sigma_2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_2-m_2}{\sigma_2}-r\dfrac{x_1-m_{1,1}}{\sigma_{1,1}}\right)=0, \end{cases} \quad x_1\left(x_2\right)<C,$$

$$\begin{cases} \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right)}{\sigma_{1,2}\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_1-m_{1,2}}{\sigma_{1,2}}-r\dfrac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)=0, \\ \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right)}{\sigma_2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_2-m_2}{\sigma_2}-r\dfrac{x_1-m_{1,1}}{\sigma_{1,1}}\right)=0, \end{cases} \quad x_1\left(x_2\right)>C. \qquad (12)$$

З розв’язку системи (12) випливає, що якщо $m_{1,1}<C$, то стаціонарна точка є $M\left(m_{1,1},m_2\right)$. Якщо $m_{1,1}>C$, то стаціонарна точка є $M\left(m_{1,2},m_2\right)$, де $m_{1,2}$ визначається згідно (5).

При $m_{1,1}<C$ для стаціонарної точки $M\left(m_{1,1},m_2\right)$ має місце:

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=m_{1,1};x_2=m_2}=-\frac{n\left(m_{1,1},m_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right)}{\sigma_{1,1}^2\left(1-r^2\right)}<0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)}{\partial x_2^2}\right|_{x_1=m_{1,1};x_2=m_2}=-\frac{n\left(m_{1,1},m_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right)}{\sigma_2^2\left(1-r^2\right)}<0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)}{\partial x_1\partial x_2}\right|_{x_1=m_{1,1};x_2=m_2}=\frac{rn\left(m_{1,1},m_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right)}{\sigma_{1,1}\sigma_2\left(1-r_2\right)},$$

$$\Delta=\left.\left(\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right)\right|_{x_1=m_{1,1};x_2=m_2}=$$

$$=\frac{\left(n\left(m_{1,1},m_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right)\right)^2}{\sigma_{1,1}^2\sigma_2^2\left(1-r^2\right)}>0.$$

Отже, при $m_{1,1}<C$, $M\left(m_{1,1},m_2\right)$ є точка максимуму (11).

Аналогічно для точки $M\left(m_{1,2},m_2\right)$, що є стаціонарна при $m_{1,1}>C$:

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{сп2}\right)}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=m_{1,2};x_2=m_2}=-\frac{n\left(m_{1,2},m_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right)}{\sigma_{1,2}^2\left(1-r^2\right)}<0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{сп2}\right)}{\partial x_2^2}\right|_{x_1=m_{1,2};x_2=m_2}=-\frac{n\left(m_{1,2},m_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right)}{\sigma_2^2\left(1-r^2\right)}<0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{сп2}\right)}{\partial x_1\partial x_2}\right|_{x_1=m_{1,2};x_2=m_2}=\frac{rn\left(m_{1,2},m_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right)}{\sigma_{1,2}\sigma_2\left(1-r^2\right)},$$

$$\Delta=\frac{\left(n\left(m_{1,2},m_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right)\right)^2}{\sigma_{1,2}^2\sigma_2^2\left(1-r^2\right)}>0.$$

Отже, $M\left(m_{1,2},m_2\right)$ є точка максимуму (11) при $m_{1,1}>C$.

З аналізу (11) випливає, що слід також розглянути точки прямої $x_1\left(x_2\right)=C$. Якщо $x_1=C$, то (11) приймає максимальне значення при $x_2=m_2+r\sigma_2 u_C$, і додатковому аналізу підлягає точка $M\left(C,m_2+r\sigma_2 u_C\right)$.

З аналізу (11) в точках $M\left(m_{1,1},m_2\right)$, $M\left(m_{1,2},m_2\right)$, $M\left(C,m_2+r\sigma_2 u_C\right)$ випливає, що функція (11) є одномодальна, якщо виконується одна з умов:

$$m_{1,1}\le C,\qquad \sigma_{1,1}<\sigma_{1,2}; \tag{13}$$

$$m_{1,1}\ge C,\qquad \sigma_{1,1}>\sigma_{1,2}; \tag{14}$$

та двомодальна при виконанні однієї з умов:

$$m_{1,1}<C,\qquad \sigma_{1,1}>\sigma_{1,2}; \tag{15}$$

$$m_{1,1}>C,\qquad \sigma_{1,1}<\sigma_{1,2}. \tag{16}$$

При виконанні умов (13), (14) мода співпадає з точкою $M\left(m_{1,1},m_2\right)$ або $M\left(m_{1,2},m_2\right)$ відповідно. Для умов (15), (16) мають місце дві моди, які відповідно співпадають з $M\left(m_{1,1},m_2\right)$, $M\left(C,m_2+r\sigma_2u_C\right)$ або $M\left(m_{1,2},m_2\right)$, $M\left(C,m_2+r\sigma_2u_C\right)$.

Дійсно, в точці $M\left(C,m_2+r\sigma_2u_C\right)$ функція (11) приймає значення

$$f\left(C,m_2+r\sigma_2u_C;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sigma_{1,1}\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left(-u_{C-0}^2/2\right),\\ \dfrac{1}{2\pi\sigma_{1,2}\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left(-u_{C+0}^2/2\right).\end{cases}$$

Якщо $m_{1,1}<C$, то, як було показано вище, функція щільності (11) досягає максимального значення в точці $M\left(m_{1,1},m_2\right)$, і воно дорівнює

$$f\left(m_{1,1},m_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_{1,1}\sigma_2\sqrt{1-r^2}}.$$

Очевидно, що $f\left(m_{1,1},m_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)>f\left(C-0,m_2+r\sigma_2u_C;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)$. Якщо $\sigma_{1,1}<\sigma_{1,2}$, то $f\left(C-0,m_2+r\sigma_2u_C;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)>f\left(C+0,m_2+r\sigma_2u_C;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)$ та має місце одна мода $M\left(m_{1,1},m_2\right)$. При $\sigma_{1,1}>\sigma_{1,2}$ $f\left(C-0,m_2+r\sigma_2u_C;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)<f\left(C+0,m_2+r\sigma_2u_C;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)$ і поряд з $M\left(m_{1,1},m_2\right)$ модою є точка $M\left(C,m_2+r\sigma_2u_C\right)$.

Якщо $m_{1,1}=C$, то функція щільності (11) досягає максимального значення в точці $M\left(C,m_2+r\sigma_2u_C\right)$, яка тотожна $M\left(C,m_2\right)$, оскільки $u_C=0$. Отже, (11) є одно модальна, незалежно від співвідношення $\sigma_{1,1}$ та $\sigma_{1,2}$. Лише при $\sigma_{1,1}<\sigma_{1,2}$ модою є $M\left(C-0,m_2\right)$, інакше ($\sigma_{1,1}>\sigma_{1,2}$) – $M\left(C+0,m_2\right)$.

Випадок, коли $m_{1,1}\geq C$, розглядається аналогічно.

Графік функції щільності $f\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{cn2}\right)$, де проілюстровано умову (13), представлено нижче (рис. 1, *a*).

Отже, функція розподілу (1) буде неперервна за умов (5), (7) та (9). Залежно від співвідношень між параметрами розподілу функція щільності може бути одно- чи двомодальна.

У подальшому викладенні надається дослідження двовимірного сплайн-нормального розподілу з двома прямими склеювання (2).

З урахуванням маргінальної властивості визначено функції розподілів одновимірних випадкових величин ξ_1 та ξ_2.

Для випадкової величини ξ_1 функція розподілу така

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} F\left(x_1, x_2; \vec{\Theta}_2^{cn2}\right) = \begin{cases} \Phi\left(\left(x_1 - m_{1,1}\right)/\sigma_{1,1}\right), & x_1 \le C_1, \\ \Phi\left(\left(x_1 - m_{1,2}\right)/\sigma_{1,2}\right), & x_1 \le C_1, \\ \Phi\left(\left(x_1 - m_{1,3}\right)/\sigma_{1,3}\right), & x_1 \ge C_1, \\ \Phi\left(\left(x_1 - m_{1,4}\right)/\sigma_{1,4}\right), & x_1 \ge C_1. \end{cases}$$

З аналізу $F_1(x_1)$ випливає, що

$$\Phi\left(\left(C_1 - m_{1,1}\right)/\sigma_{1,1}\right) \equiv \Phi\left(\left(C_1 - m_{1,2}\right)/\sigma_{1,2}\right),$$
$$\Phi\left(\left(C_1 - m_{1,3}\right)/\sigma_{1,3}\right) \equiv \Phi\left(\left(C_1 - m_{1,4}\right)/\sigma_{1,4}\right)$$

або

$$m_{1,1} \equiv m_{1,2}, \sigma_{1,1} \equiv \sigma_{1,2}, \qquad m_{1,3} \equiv m_{1,4}, \sigma_{1,3} \equiv \sigma_{1,4}. \tag{17}$$

У силу неперервності (2) за точками прямих склеювання, $F_1(x_1)$ при $x_1 = C$ має бути неперервна. Тоді з урахуванням (17) є справедливе

$$\Phi\left(\left(C_1 - m_{1,1}\right)/\sigma_{1,1}\right) = \Phi\left(\left(C_1 - m_{1,3}\right)/\sigma_{1,3}\right), \quad \text{або } \frac{C_1 - m_{1,1}}{\sigma_{1,1}} = \frac{C_1 - m_{1,3}}{\sigma_{1,3}},$$

тобто

$$m_{1,3} = m_{1,1} + u_{C_1}\left(\sigma_{1,1} - \sigma_{1,3}\right), \quad \text{де } u_{C_1} = \left(C_1 - m_{1,1}\right)/\sigma_{1,1}. \tag{18}$$

Отже, ξ_1 розподілена за сплайн-нормальним законом з одним вузлом, функція розподілу якого має вигляд:

$$F_1(x_1) \equiv F_1\left(x_1; \vec{\Theta}_1^{cn1}\right) = \begin{cases} \Phi\left(\left(x_1 - m_{1,1}\right)/\sigma_{1,1}\right), & x_1 \le C_1, \\ \Phi\left(\left(x_1 - m_{1,1} - u_{C_1}\left(\sigma_{1,1} - \sigma_{1,3}\right)\right)/\sigma_{1,3}\right), & x_1 \ge C_1, \end{cases} \tag{19}$$

де $\vec{\Theta}_1^{cn1} = \left\{m_{1,1}, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,3}, C_1\right\}$ – вектор параметрів розподілу ξ_1.

Аналогічно для випадкової величини ξ_2 :

$$F_2(x_2)=\begin{cases}\Phi\left(\left(x_2-m_{2,1}\right)/\sigma_{2,1}\right), & x_2\le C_2,\\ \Phi\left(\left(x_2-m_{2,2}\right)/\sigma_{2,2}\right), & x_2\ge C_2,\\ \Phi\left(\left(x_2-m_{2,3}\right)/\sigma_{2,3}\right), & x_2\le C_2,\\ \Phi\left(\left(x_2-m_{2,4}\right)/\sigma_{2,4}\right), & x_2\ge C_2\end{cases}$$

випливає, що

$$m_{2,1}\equiv m_{2,3},\ \sigma_{2,1}\equiv\sigma_{2,3}, \qquad m_{2,2}\equiv m_{2,4},\ \sigma_{2,2}\equiv\sigma_{2,4}\,. \tag{20}$$

З умови неперервності $F_2(x_2)$ при $x_2=C_2$ з урахуванням (7)

$$\Phi\left(\left(C_2-m_{2,1}\right)/\sigma_{2,1}\right)=\Phi\left(\left(C_2-m_{2,2}\right)/\sigma_{2,2}\right),\ \text{або}\ \frac{C_2-m_{2,1}}{\sigma_{2,1}}=\frac{C_2-m_{2,2}}{\sigma_{2,2}}\,,$$

тобто

$$m_{2,2}=m_{2,1}+u_{C_2}\left(\sigma_{2,1}-\sigma_{2,2}\right),\ \text{де}\ u_{C_2}=\left(C_2-m_{2,1}\right)/\sigma_{2,1}\,. \tag{21}$$

Отже, ξ_2 також розподілена за сплайн-нормальним законом з одним вузлом, функція розподілу якого має вигляд:

$$F_2(x_2)\equiv F_2\left(x_2;\vec{\Theta}_2^{cn1}\right)=\begin{cases}\Phi\left(\left(x_2-m_{2,1}\right)/\sigma_{2,1}\right), & x_2\le C_2,\\ \Phi\left(\left(x_2-m_{2,1}-u_{C_2}\left(\sigma_{2,1}-\sigma_{2,2}\right)\right)/\sigma_{2,2}\right), & x_2\ge C_2,\end{cases} \tag{22}$$

де $\vec{\Theta}_2^{cn1}=\left\{m_{2,1},\sigma_{2,1},\sigma_{2,2},C_2\right\}$ – вектор параметрів розподілу ξ_2 .

Як і для двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією прямою склеювання з неперервності функції розподілу (2) в точках прямих склеювання випливає, що

$$r_1\equiv r_2\equiv r_3\equiv r_3\equiv r\,. \tag{23}$$

Отже, функція двовимірного сплайн-нормального розподілу з двома прямими склеювання має вигляд:

$$F\left(x_1,x_2,\vec{\Theta}_2^{cn2}\right)=\begin{cases}\mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right), & x_1(x_2)\le C_1, x_2(x_1)\le C_2,\\ \mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right), & x_1(x_2)\le C_1, x_2(x_1)\ge C_2,\\ \mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_3^{н2}\right), & x_1(x_2)\ge C_1, x_2(x_1)\le C_2,\\ \mathrm{N}\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_4^{н2}\right), & x_1(x_2)\ge C_1, x_2(x_1)\ge C_2,\end{cases} \tag{24}$$

де $\vec{\Theta}_2^{сп2} = \left\{\vec{\Theta}_1^{н2}, \vec{\Theta}_2^{н2}, \vec{\Theta}_3^{н2}, \vec{\Theta}_4^{н2}, C_1, C_2\right\}$; $\vec{\Theta}_1^{н2} = \left\{m_{1,1}, m_{2,1}, \sigma_{1,1}, \sigma_{2,1}, r\right\}$; $\vec{\Theta}_2^{н2} = \left\{m_{1,1}, m_{2,2}, \sigma_{1,1}, \sigma_{2,2}, r\right\}$; $\vec{\Theta}_3^{н2} = \left\{m_{1,3}, m_{2,1}, \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1}, r\right\}$; $\vec{\Theta}_4^{н2} = \left\{m_{1,3}, m_{2,2}, \sigma_{1,3}, \sigma_{2,2}, r\right\}$; $m_{1,3}$ визначається за (18); $m_{2,2}$ – за (21).

Якщо $r = 0$, то

$$F\left(x_1, x_2; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right) = F_1\left(x_1\right) F_2\left(x_2\right).$$

Функція щільності розподілу (24) визначається:

$$f\left(x_1, x_2, \vec{\Theta}_2^{сп2}\right) = \begin{cases} n\left(x_1, x_2; \vec{\Theta}_1^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right) \le C_1, x_2\left(x_1\right) \le C_2, \\ n\left(x_1, x_2; \vec{\Theta}_2^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right) \le C_1, x_2\left(x_1\right) \ge C_2, \\ n\left(x_1, x_2; \vec{\Theta}_3^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right) \ge C_1, x_2\left(x_1\right) \le C_2, \\ n\left(x_1, x_2; \vec{\Theta}_4^{н2}\right), & x_1\left(x_2\right) \ge C_1, x_2\left(x_1\right) \ge C_2, \end{cases} \quad (25)$$

і має наступні властивості.

При $\sigma_{1,1} = \sigma_{1,3}$, $\sigma_{2,1} = \sigma_{2,2}$ має місце двовимірний нормальний розподіл. Якщо $\sigma_{1,1} \ne \sigma_{1,3}$ або $\sigma_{2,1} \ne \sigma_{2,2}$, то (25) не є неперервна. Якщо $\sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}$, то

$$f\left(C_1 - 0, x_2; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right) > f\left(C_1 + 0, x_2; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right),\ \forall x_2,$$

у протилежному випадку ($\sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}$)

$$f\left(C_1 - 0, x_2; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right) < f\left(C_1 + 0, x_2; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right),\ \forall x_2.$$

Коли $\sigma_{2,1} < \sigma_{2,2}$, то

$$f\left(x_1, C_2 - 0; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right) > f\left(x_1, C_2 + 0; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right),\ \forall x_1,$$

інакше ($\sigma_{2,1} > \sigma_{2,2}$)

$$f\left(x_1, C_2 - 0; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right) < f\left(x_1, C_2 + 0; \vec{\Theta}_2^{сп2}\right),\ \forall x_1.$$

Дослідження функції щільності (25) на модальність передбачає знаходження стаціонарних точок ($x_1\left(x_2\right) \ne C_1$, $x_2\left(x_1\right) \ne C_2$) з розв’язку системи рівнянь

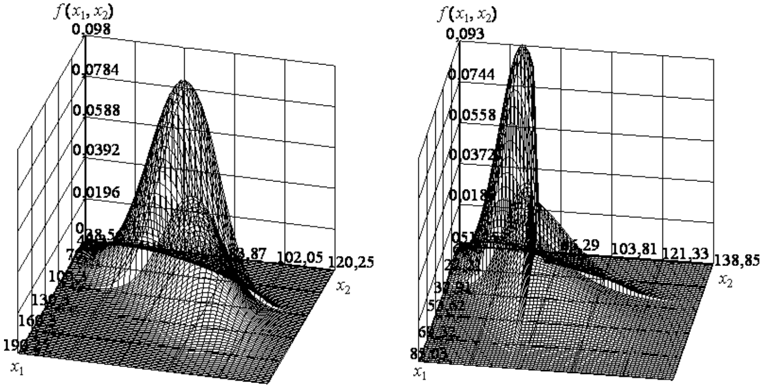
$$\begin{cases} \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right)}{\sigma_{1,1}\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_1-m_{1,1}}{\sigma_{1,1}}-r\dfrac{x_2-m_{2,1}}{\sigma_{2,1}}\right)=0, \\ \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_1^{н2}\right)}{\sigma_{2,1}^2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_2-m_{2,1}}{\sigma_{2,1}}-r\dfrac{x_1-m_{1,1}}{\sigma_{1,1}}\right)=0, \end{cases} \quad x_1\left(x_2\right)<C_1, x_2\left(x_1\right)<C_2,$$

$$\begin{cases} \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right)}{\sigma_{1,1}^2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_1-m_{1,1}}{\sigma_{1,1}}-r\dfrac{x_2-m_{2,2}}{\sigma_{2,2}}\right)=0, \\ \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_2^{н2}\right)}{\sigma_{2,2}^2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_2-m_{2,2}}{\sigma_{2,2}}-r\dfrac{x_1-m_{1,1}}{\sigma_{1,1}}\right)=0, \end{cases} \quad x_1\left(x_2\right)<C_1, x_2\left(x_1\right)>C_2, \tag{26}$$

$$\begin{cases} \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_3^{н2}\right)}{\sigma_{1,3}^2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_1-m_{1,3}}{\sigma_{1,3}}-r\dfrac{x_2-m_{2,1}}{\sigma_{2,1}}\right)=0, \\ \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_3^{н2}\right)}{\sigma_{2,1}^2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_2-m_{2,1}}{\sigma_{2,1}}-r\dfrac{x_1-m_{1,3}}{\sigma_{1,3}}\right)=0, \end{cases} \quad x_1\left(x_2\right)>C_1, x_2\left(x_1\right)<C_2,$$

$$\begin{cases} \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_4^{н2}\right)}{\sigma_{1,3}^2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_1-m_{1,3}}{\sigma_{1,3}}-r\dfrac{x_2-m_{2,2}}{\sigma_{2,2}}\right)=0, \\ \dfrac{n\left(x_1,x_2;\vec{\Theta}_4^{н2}\right)}{\sigma_{2,2}^2\left(1-r^2\right)}\left(\dfrac{x_2-m_{2,2}}{\sigma_{2,2}}-r\dfrac{x_1-m_{1,3}}{\sigma_{1,3}}\right)=0, \end{cases} \quad x_1\left(x_2\right)>C_1, x_2\left(x_1\right)>C_2.$$

З розв’язку системи (26) випливає, якщо $m_{1,1}<C_1, m_{2,1}<C_2$, то стаціонарна точка є $M\left(m_{1,1},m_{2,1}\right)$. При $m_{1,1}<C_1, m_{2,1}>C_2$, стаціонарна точка – це $M\left(m_{1,1},m_{2,2}\right)$, де $m_{2,2}$ визначається згідно (21). При $m_{1,1}>C_1, m_{2,1}<C_2$, стаціонарна точка є $M\left(m_{1,3},m_{2,1}\right)$, де $m_{2,2}$ визначається згідно (5). Якщо ж $m_{1,1}>C_1, m_{2,1}>C_2$, то стаціонарна точка – це $M\left(m_{1,3},m_{2,2}\right)$.



а *б*

Рис. 1. Функція щільності двовимірного сплайн-нормального розподілу:
а **– з однією прямою склеювання (** $m_{1,1} < C, \sigma_{1,1} < \sigma_{1,2}$ **),**

б **– з двома прямими склеювання**
($m_{1,1} < C_1, m_{2,1} < C_2, \quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2}$ **)**

Визначивши частинні похідні другого порядку від (25), легко переконатися, що кожна зі стаціонарних точок при виконанні відповідних умов є точка максимуму функції щільності (25).

З аналізу (25) випливає, що при дослідженні її модальності слід додатково розглядати точки, в яких функція (25) при $x_1 = C_1$ або $x_2 = C_2$ приймає максимальні значення, а саме

$$M\left(C_1, m_{2,1} + r\sigma_{2,1}u_{C_1}\right), \text{ коли } ru_{C_1} < u_{C_2};$$

$$M\left(C_1, m_{2,2} + r\sigma_{2,2}u_{C_1}\right), \text{ коли } ru_{C_1} > u_{C_2};$$

$$M\left(m_{1,1} + r\sigma_{1,1}u_{C_2}, C_2\right), \text{ коли } ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$M\left(m_{1,3} + r\sigma_{1,3}u_{C_1}, C_2\right), \text{ коли } ru_{C_2} > u_{C_1};$$

а також точку $M\left(C_1, C_2\right)$.

З аналізу (25) в цих точках, а також точці максимуму випливає, що функція щільності (25) є одно модальна, якщо виконується одна з умов:

$$m_{1,1} \le C_1, m_{2,1} \le C_2, \ \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2};$$

$$m_{1,1} \le C_1, m_{2,1} \ge C_2, \ \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2};$$

$$m_{1,1} \ge C_1, m_{2,1} \le C_2,\ \ \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2};$$

$$m_{1,1} \ge C_1, m_{2,1} \ge C_2,\ \ \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2}$$

двомодальна при виконанні однієї з умов:

$m_{1,1} \le C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_2} \le u_{C_1}$ або $r = 0$;

$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} \le C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} \le u_{C_2}$ або $r = 0$;

$m_{1,1} \le C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_2} \le u_{C_1}$ або $r = 0$;

$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} \ge C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} \ge u_{C_2}$ або $r = 0$;

$m_{1,1} \ge C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_2} \ge u_{C_1}$ або $r = 0$;

$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} \le C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} \le u_{C_2}$ або $r = 0$;

$m_{1,1} \ge C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_2} \ge u_{C_1}$ або $r = 0$;

$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} \ge C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} \ge u_{C_2}$ або $r = 0$

тримодальна при виконанні однієї з умов:

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} < u_{C_2}, ru_{C_2} \ge u_{C_1};$$

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} \ge u_{C_2}, ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} < u_{C_2}, ru_{C_2} > u_{C_1};$$

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} > u_{C_2}, ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} > u_{C_2}, ru_{C_2} \ge u_{C_1};$$

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} \le u_{C_2}, ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} > u_{C_2}, ru_{C_2} > u_{C_1};$$

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} < u_{C_2}, ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} < u_{C_2}, ru_{C_2} \le u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} \ge u_{C_2}, ru_{C_2} > u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} < u_{C_2}, ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} < C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} > u_{C_2}, ru_{C_2} > u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} > u_{C_2}, ru_{C_2} \le u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} \le u_{C_2}, ru_{C_2} > u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} > C_2,\quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2},\quad ru_{C_1} > u_{C_2}, ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} > C_2, \quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2}, \quad ru_{C_1} < u_{C_2}, ru_{C_2} > u_{C_1}$$

та чотиримодальна при виконанні однієї з умов:

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} < C_2, \quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2}, \quad ru_{C_1} < u_{C_2}, ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$m_{1,1} < C_1, m_{2,1} > C_2, \quad \sigma_{1,1} > \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2}, \quad ru_{C_1} > u_{C_2}, ru_{C_2} < u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} < C_2, \quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} > \sigma_{2,2}, \quad ru_{C_1} < u_{C_2}, ru_{C_2} > u_{C_1};$$

$$m_{1,1} > C_1, m_{2,1} > C_2, \quad \sigma_{1,1} < \sigma_{1,3}, \sigma_{2,1} < \sigma_{2,2}, \quad ru_{C_1} > u_{C_2}, ru_{C_2} > u_{C_1}.$$

Графік функції щільності $f\left(x_1, x_2; \vec{\Theta}_2^{cn2}\right)$, що ілюструє одну з умов, наведено (рис. 1, *б*).

Таким чином, функція розподілу (2) буде неперервна за умов (17), (18), (20), (21) та (23). Залежно від співвідношень між параметрами розподілу функція щільності може мати одну, дві, три або чотири моди.

Висновки. 1. Запропоновано модель розподілу неоднорідних даних у вигляді двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією та двома прямими склеювання, паралельними осям спостережень.
2. Проведено дослідження даних часткових випадків двовимірного сплайн-нормального розподілу. Визначено умови, при яких функції розподілів є неперервні. Досліджено функції щільності розподілів на модальність.
3. Подальші розвідки за даним напрямком передбачають, по-перше, розробку обчислювальних схем відтворення введених моделей, а по-друге, дослідження загальних випадків двовимірного сплайн-нормального розподілу з однією та двома прямими склеювання з метою формулювання вирішальних правил класифікації.

Бібліографічні посилання

1. **Приставка О.П.** Сплайн-розподіли у статистичному аналізі. – Д., 1995. – 152 с.
2. **Приставка А.Ф.** Смеси и сплайн-распределения на неоднородных нормальных пространствах / А.Ф. Приставка, О.В. Райко // Днепропетровский гос. университет. – Д., 1987. – 233 с. Деп. в ВИНИТИ 11.01.88, №33–В88.
3. **Кучугура А.Ю.** Вычислительная схема восстановления двумерного сплайн-нормального распределения // Математическое моделирование. – 1998. – №3. – С. 10–12.
4. **Переверзев Е.С.** Случайные процессы в параметрических моделях надежности. – К., 1987. – 240 с.

Надійшла до редколегії 11.06.08